

Principe Fondamental de la Dynamique : Cas des mouvements simples

1-principe général

1.1- Enoncé général

La somme des actions extérieures exercées sur un système S est égale aux quantités d'accélération de ce système S dans son mouvement par rapport à un repère galiléen.

Un repère R_1 est galiléen lorsque :

- Ce repère est immobile dans un autre repère galiléen R_0 .
- Ce repère est en translation rectiligne uniforme dans un autre repère galiléen R_0 .

Pour tous les exercices de mécanique que nous traiterons, tous les repères fixes par rapport à la terre seront considérés comme galiléens. (Ce principe n'est pas toujours valable)

1.2- Traduction mathématique du PFD

Si les actions extérieures appliquées sur le système S sont modélisées par un torseur $\{\mathcal{J}(\text{Ext}/S)\}$, et les quantités d'accélération sont modélisées par le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ on a alors :

$$\{\mathcal{J}(\text{Ext}/S)\} = \{\mathcal{D}(S/R_g)\}$$

Pour appliquer le PFD il faut donc exprimer le torseur dynamique et les torseurs des actions mécaniques extérieures

1.3- Remarque sur le PFS

En statique : $\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{0\}$

2- Calcul du torseur dynamique

2.1- Quantité d'accélération d'une masse ponctuelle dm

Si on a une masse ponctuelle dm concentrée en un point M, alors la quantité d'accélération de cette masse dans le repère galiléen R_g est le produit de cette masse et du vecteur accélération du point M par rapport au repère galiléen : Quantité d'accélération de la masse dm : $dm \cdot \vec{a}_{M/R_g}$

2.2- Quantité d'accélération d'un solide S_i

Les quantités d'accélération d'un solide S_i se modélisent par un torseur constitué d'une résultante

dynamique et d'un moment dynamique : $\{\mathcal{D}(S_i/R_g)\} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_D(S_i/R_g) \\ \delta_A(S_i/R_g) \end{array} \right\}$

Avec : La résultante dynamique : $\vec{R}_D(S_i/R_g) = \iiint_{S_i} \vec{a}_{M \in S_i/R_g} \cdot dm$

et : Le moment dynamique en A : $\delta_A(S_i/R_g) = \iiint_{S_i} \vec{AM} \wedge \vec{a}_{M \in S_i/R_g} \cdot dm$

Pour un système S est constitué de n solides :

Si : $S = \sum_{i=1}^n S_i$ Alors : $\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{D}(S_i/R_g)\}$

3- Résultante dynamique

Soit un solide S_i de centre d'inertie G en mouvement quelconque par rapport au repère galiléen R_g .

A tout instant et pour tout point $M \in S_i$ on a :
$$\vec{V}_{M \in S_i / R_g} = \vec{V}_{G \in S_i / R_g} + \vec{MG} \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) \quad (1)$$

Sachant que :
$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \left(\frac{d\vec{V}_{M \in S_i / R_g}}{dt} \right)_{R_g} \quad \text{et que :} \quad \vec{a}_{G \in S_i / R_g} = \left(\frac{d\vec{V}_{G \in S_i / R_g}}{dt} \right)_{R_g}$$

On a en dérivant (1) dans R_g :
$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_g} \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$
$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left[\left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_i} + \vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG} \right] \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Les points M et G étant fixes au cours du temps sur le solide S_i on a :
$$\left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_i} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + (\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG}) \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Or par définition la résultante dynamique est donnée par :
$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = \iiint_{S_i} \vec{a}_{M \in S_i / R_g} \cdot dm \quad \text{donc :}$$

$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = \iiint_{S_i} \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \cdot dm + \iiint_{S_i} [(\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG}) \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g)] \cdot dm + \iiint_{S_i} \left[\vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g} \right] \cdot dm$$

$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = \left(\iiint_{S_i} dm \right) \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left[\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \left(\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm \right) \right] \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \left(\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm \right) \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Sachant que par définition de la masse m du solide S_i : $\iiint_{S_i} dm = m$ et que par définition du centre d'inertie G du solide S_i : $\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm = \vec{0}$ On obtient, quelque soit le mouvement du solide S_i par rapport au solide S_0 , la résultante dynamique du solide S_i dans le repère lié au solide S_0 :

$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = m \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g}$$

Quelque soit le mouvement du solide la résultante dynamique est le produit de sa masse par l'accélération du centre d'inertie du solide

4- Cas du mouvement de translation

4.1- Moment dynamique au centre de gravité

Soit le moment dynamique en G centre d'inertie du solide S_i :
$$\delta_{G(S_i / R_g)} = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{M \in S_i / R_g} \cdot dm$$

Or en translation : $\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g}$ donc :
$$\delta_{G(S_i / R_g)} = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \cdot dm = \left(\iiint_{S_i} \vec{GM} \cdot dm \right) \wedge \vec{a}_{G \in S_i / R_g}$$

Or par définition du centre d'inertie :
$$\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm = \vec{0} \quad \text{Donc :}$$

**Pour un mouvement de translation
le moment dynamique au centre d'inertie est nul.**

4.2- Expression du torseur dynamique

Soit S_i un solide de masse m et de centre d'inertie G , en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors le torseur dynamique de ce solide par rapport au repère R_g est :

$$\{\mathcal{D}(S_i / R_g)\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \\ \vec{AG} \wedge m \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \end{array} \right\}}$$

4.3- Théorème de la résultante dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

$$\sum \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} = m \cdot \vec{a}_{G \in S/R_g}$$

Où : $\sum \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ est la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système S

Et : $\vec{a}_{G \in S/R_g}$ est le vecteur accélération du centre de gravité G

4.4- Théorème du moment dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

$$\sum \mathcal{M}_G(\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S_i}) = \vec{0} \quad \text{ou :} \quad \sum \mathcal{M}_A(\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S_i}) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{a}_{G \in S/R_g}$$

Où : $\sum \mathcal{M}_G(\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S_i})$ et $\sum \mathcal{M}_A(\vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S_i})$ sont respectivement la somme des moments en G et en A des actions extérieures s'appliquant sur le solide S_i .

4.5- Cinématique du mouvement de translation rectiligne

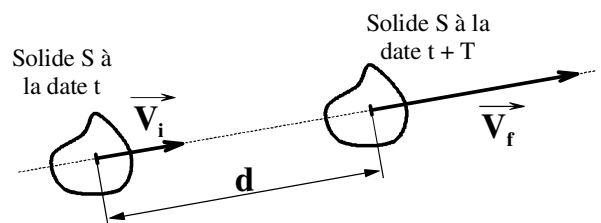
Soit un solide S en mouvement de translation rectiligne pour lequel on pose :

☞ V_f et V_i les modules des vecteurs vitesses finales et initiales (Vecteurs de même sens). Et $v(t)$ la vitesse du solide S à un instant t .

☞ d la distance parcourue sur le mouvement

☞ T la durée de ce mouvement

☞ a la valeur algébrique de l'accélération : $\|\vec{a}_{G \in S/R_g}\| = |a|$



En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de $v(t)$) on a :

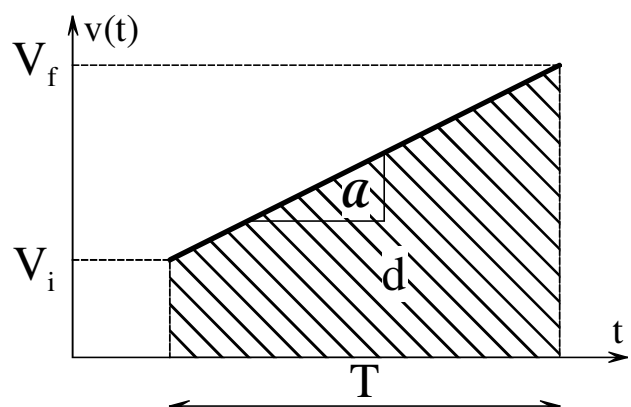
☞ **L'accélération $a(t)$ qui est la pente du diagramme des vitesses : $v(t)$**

☞ **La distance d parcourue sur la durée T qui est l'aire sous la courbe.**

Par exemple, pour un mouvement uniformément varié (a est constante) on a :

$$a = \frac{V_f - V_i}{T}$$

$$d = \frac{V_f + V_i}{2} \cdot T = \frac{V_f^2 - V_i^2}{2 \cdot a}$$



Et : $\vec{a}_{G \in S/R_g}$ est parallèle à la direction de translation

Enfin : Si $V_f > V_i$ alors $\vec{a}_{G \in S/R_g}$ et $\vec{V}_{G \in S/R_g}$ sont de même sens

Si $V_f < V_i$ alors $\vec{a}_{G \in S/R_g}$ et $\vec{V}_{G \in S/R_g}$ sont de sens opposés

5- Cas des mouvements de rotation autour d'un axe fixe

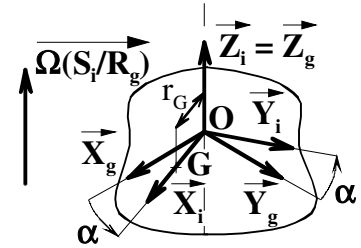
5.1- Moment dynamique par rapport à l'axe de rotation

Soit le solide S_i en mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans un repère galiléen R_g . On pose :

☞ $R_g = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$ Un repère galiléen fixe lié au solide fixe S_0 .

☞ $R_i = (\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ Un repère fixe par rapport au solide S_i

☞ α le paramètre angulaire de la position de S_i dans R_0 : $\alpha = (\widehat{\vec{X}_g, \vec{X}_i})$



☞ $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}$ le vecteur rotation du solide S_i par rapport au repère R_g : $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} = \dot{\alpha} \cdot \vec{Z}_g = \omega \cdot \vec{Z}_g$

☞ G le centre de gravité du solide S_i situé à une distance r_G de l'axe de rotation $\Delta = (O, \vec{Z}_g) = (O, \vec{Z}_i)$

On sait que le moment dynamique en O est défini par : $\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} \cdot dm$

Associons à chaque point M du solide S_i un repère local $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{z})$ où :

☞ $\vec{z}$ est parallèle à l'axe de rotation : $\vec{z} = \vec{Z}_0$

☞ $\vec{n}$ est perpendiculaire à l'axe de rotation (Il est défini par un rayon passant par M)

☞ $\vec{t}$ est orthogonal à l'axe de rotation (Il est tangent au cercle d'axe Δ passant par M)

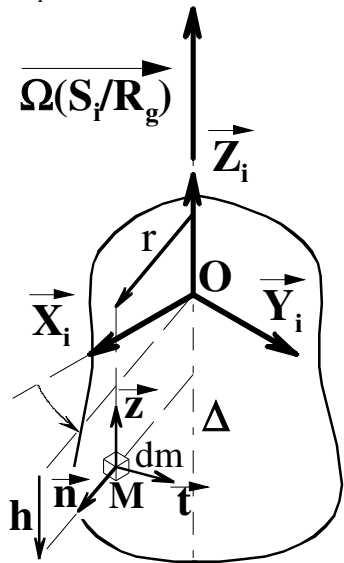
Etant donné le mouvement de rotation autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\alpha}$ du solide S_i par rapport au Repère R_g , l'accélération du point M se compose de deux accélérations

☞ une accélération centripète : $-\vec{r} \cdot \omega^2 \cdot \vec{n}$

☞ une accélération tangentielle : $\vec{r} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{t}$

On en déduit le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} = (\vec{r} \cdot \vec{n} + \vec{h} \cdot \vec{z}) \wedge (-\vec{r} \cdot \omega^2 \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{t})$$



Sachant que le moment dynamique en O est défini par : $\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} \cdot dm$

$$\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} (\vec{r}^2 \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} - \vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) \cdot dm$$

$$\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \vec{r}^2 \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} + \iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) \cdot dm$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ varient à l'intérieur de l'intégrale, mais restent toujours orthogonaux à $\vec{z}$.

Donc le vecteur : $\iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) \cdot dm$ est orthogonal à $\vec{z}$.

Donc : $\left[\iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot \vec{h} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) \cdot dm \right] \cdot \vec{z} = 0$

$$\delta_{O(S_i/R_g)} \cdot \vec{z} = \iiint_{S_i} \vec{r}^2 \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} \cdot dm \Rightarrow \delta_{O(S_i/R_g)} \cdot \vec{z} = I_{\Delta}(S_i) \cdot \dot{\omega}$$

Où : ☞ $I_{\Delta}(S_i)$ est le moment d'inertie du solide S_i par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{z})$

☞ $I_{\Delta}(S_i)$ est défini par l'intégrale sur le solide S_i : $I_{\Delta}(S_i) = \iiint_{S_i} \vec{r}^2 \cdot dm$

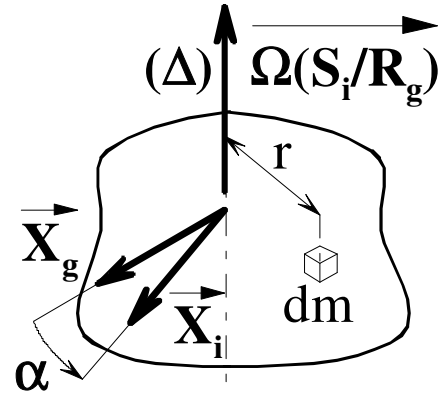
☞ L'unité S.I. de ce moment d'inertie est le : **kg.m²**

5.2- Théorème du moment dynamique par rapport à un axe de rotation fixe

Soit le solide S_i en rotation d'axe (Δ) (fixe dans R_g) à la vitesse angulaire ω par rapport au repère R_g .

On pose :

- ☞ α : la position angulaire du solide S_i par rapport au repère galiléen R_g : $\omega = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$
- ☞ $I_{\Delta}(S_i)$: Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) du solide S_i : $I_{\Delta}(S_i) = \iiint_{S_i} r^2 \cdot dm$
- ☞ $\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\text{Ext} \rightarrow S_i)$: la somme des moments par rapport à l'axe (Δ) des actions extérieures.



On a alors :

$$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\text{Ext} \rightarrow S_i) = I_{\Delta}(S_i) \cdot \dot{\omega} = I_{\Delta}(S_i) \cdot \ddot{\alpha}$$

Cas où l'axe de rotation est l'axe $(O, \vec{Z})$:

Dans ce cas la somme des moments par rapport à l'axe de rotation est la projection sur l'axe $\vec{Z}$ de la somme des moments en O des actions extérieures. On a donc :

$$\Sigma \mathcal{M}_O(\vec{\text{Ext}} \rightarrow S_i) \cdot \vec{Z} = I_{O\vec{Z}}(S_i) \cdot \dot{\omega} = I_{O\vec{Z}}(S_i) \cdot \ddot{\alpha}$$

5.3- Cinématique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide S en mouvement de rotation autour d'un axe fixe pour lequel on pose :

- ☞ ω_f et ω_i les vitesses angulaires finales et initiales du mouvement. Et $\omega(t)$ la vitesse angulaire du solide S à un instant t.
- ☞ $\dot{\omega}(t)$ l'accélération angulaire du mouvement
- ☞ T la durée de ce mouvement
- ☞ $\Delta\alpha$ l'angle parcouru sur la durée T du mouvement

En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de $\omega(t)$) on a :

☞ L'accélération $\dot{\omega}(t)$ qui est la pente du diagramme des vitesses : $\omega(t)$

☞ L'angle parcouru $\Delta\alpha$ sur la durée T qui est l'aire sous la courbe $\omega(t)$.

Par exemple, pour un mouvement uniformément varié ($\dot{\omega}$ est constante) on a :

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_f - \omega_i}{T}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\omega_f + \omega_i}{2} \cdot T = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2 \cdot \dot{\omega}}$$

