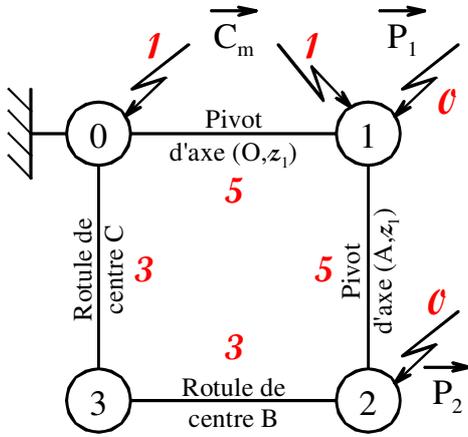


Barrière de parking : Corrigé

Etude de la barrière de type 2

1- Graphe de structure



Torseur sthénique des liaisons pivot d'axe \vec{z}_1 :

$$\{\mathcal{J}_{i \rightarrow j}\} = \begin{matrix} O \text{ ou } A \\ \mathcal{B}_1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{On a donc } \mathbf{5 \text{ inconnues}}$$

3 pour la résultante et 2 pour le moment en O ou A.

Torseur sthénique des liaisons rotules :

$$\{\mathcal{J}_{i \rightarrow j}\} = \begin{matrix} B \text{ ou } C \\ \mathcal{B}_1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ Z_{ij} & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{On a donc } \mathbf{3 \text{ inconnues}} \text{ sur la}$$

résultante. Ces actions sont des glisseurs d'axes passant par B ou C : c'est-à-dire **des forces appliquées en B ou C**.

2- Isolement de la biellette 3

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 3 :

- ☞ Action de 2 sur 3 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ appliquée en B
- ☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 3}$ appliquée en C

Cette biellette 3 est à l'équilibre (inertie négligée) et est soumise à 2 forces (2 glisseurs), ces deux forces ont donc le même support : la droite (BC) = (B, \vec{x}_1).

Du principe des actions mutuelles on en déduit que l'action de 3 sur 2 est une force $\vec{F}_{3 \rightarrow 2}$ appliquée au point B et de direction (B, \vec{x}_1) : $\vec{F}_{3 \rightarrow 2} = X_{32} \cdot \vec{x}_1$.

3- Mouvement de la barre 2

La quadrilatère 0ABC étant un parallélogramme déformable, on a toujours (AB) // (OC). Sachant que les points O et C sont fixes sur 0 et les points A et B fixes sur 2, on a $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$. Le mouvement de 2 par rapport à 0 est donc une translation.

D'autre part, le point A est également fixe sur 1 qui est en rotation d'axe (O, \vec{z}_1) avec 0, donc la trajectoire du point A appartenant à 2 par rapport à 0 est un cercle de rayon [OA] avec $\|\vec{OA}\| = L$.

Donc le mouvement de 2 par rapport à 0 est une translation circulaire de rayon L.

4- Accélération du centre d'inertie de 2

Le mouvement de 2 par rapport à 0 étant une translation : $\vec{V}_{G_{2 \in 2/0}} = \vec{V}_{A \in 2/0}$.

A est le centre de la liaison pivot entre 1 et 2 donc : $\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

O est le centre de la liaison pivot entre 1 et 2 donc : $\vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0}$

On obtient donc : $\vec{V}_{G_{2 \in 2/0}} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -L \cdot \vec{x}_1 \wedge \omega \cdot \vec{z}_1$ $\vec{V}_{G_{2 \in 2/0}} = L \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$

Par dérivation vectorielle on a : $\vec{a}_{G_{2 \in 2/0}} = \left(\frac{d \vec{V}_{G_{2 \in 2/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0}$

Par la relation de Bour : $\left(\frac{d \vec{V}_{G_{2 \in 2/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G_{2 \in 2/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_{G_{2 \in 2/0}}$

Soit : $\vec{a}_{G_{2 \in 2/0}} = L \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{y}_1 + \omega \cdot \vec{z}_1 \wedge L \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$

On obtient donc finalement : $\vec{a}_{G_{2 \in 2/0}} = L \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{y}_1 - L \cdot \omega^2 \cdot \vec{x}_1$

5- Isolement de la barre 2

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 2 :

- ☞ Action de la pesanteur : Force $\vec{P}_2 = -m.g.\vec{y}_0$ appliquée en G_2 .
- ☞ Action de 3 sur 2 : Force $\vec{F}_{3\rightarrow 2} = X_{32}.\vec{x}_1$ appliquée en B
- ☞ Action de 1 sur 2 : Due à la liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1)

Le théorème de la résultante dynamique (TRD) donne : $\vec{P}_2 + \vec{F}_{3\rightarrow 2} + \vec{F}_{1\rightarrow 2} = m.\vec{\alpha}_{G_2 \in 2/0}$

Le théorème du moment dynamique (TMD) au point A donne :

$$\vec{AG}_2 \wedge \vec{P}_2 \cdot \vec{z}_1 + \vec{AB} \wedge \vec{F}_{3\rightarrow 2} \cdot \vec{z}_1 + \mathbf{0} = \vec{AG}_2 \wedge m.\vec{\alpha}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{z}_1$$

On obtient donc les quatre équations scalaires :

$$\begin{aligned} \text{TRD} / \vec{x}_1 : & \quad -m.g.\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1 + X_{32} + X_{12} = m.(L.\dot{\omega}.\vec{y}_1 - L.\omega^2.\vec{x}_1) \cdot \vec{x}_1 \\ \text{TRD} / \vec{y}_1 : & \quad -m.g.\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 + 0 + Y_{12} = m.(L.\dot{\omega}.\vec{y}_1 - L.\omega^2.\vec{x}_1) \cdot \vec{y}_1 \\ \text{TRD} / \vec{z}_1 : & \quad -m.g.\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_1 + 0 + Z_{12} = m.(L.\dot{\omega}.\vec{y}_1 - L.\omega^2.\vec{x}_1) \cdot \vec{z}_1 \\ \text{TMD en A} / \vec{z}_1 : & \quad \frac{L}{2}.\vec{x}_0 \wedge -m.g.\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_1 + d.\vec{y}_0 \wedge X_{32}.\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 = m.\frac{L}{2}.\vec{x}_0 \wedge (L.\dot{\omega}.\vec{y}_1 - L.\omega^2.\vec{x}_1) \cdot \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} X_{32} + X_{12} &= -m.L.\omega^2 + m.g.\sin \theta \\ Y_{12} &= m.L.\dot{\omega} + m.g.\cos \theta \\ Z_{12} &= 0 \\ d.X_{32}.\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0 &= m.\frac{L}{2}.(L.\dot{\omega}.\vec{y}_1 - L.\omega^2.\vec{x}_1) \wedge \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 + m.g.\frac{L}{2}.\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0 \cdot \vec{z}_1 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{aligned} X_{32} + X_{12} &= m.g.\sin \theta - m.L.\omega^2 \\ Y_{12} &= m.L.\dot{\omega} + m.g.\cos \theta \\ Z_{12} &= 0 \\ -d.X_{32}.\cos \theta &= m.\frac{L^2}{2}.\dot{\omega}.\cos \theta - m.\frac{L^2}{2}.\omega^2.\sin \theta + m.g.\frac{L}{2} \end{aligned} \right.$$

Soit finalement :	$\begin{aligned} X_{32} &= \frac{m.L}{2.d.\cos \theta} \cdot [L.\omega^2.\sin \theta - L.\dot{\omega}.\cos \theta - g] \\ X_{12} &= m.g.\sin \theta - m.L.\omega^2 - \frac{m.L}{2.d.\cos \theta} \cdot [L.\omega^2.\sin \theta - L.\dot{\omega}.\cos \theta - g] \\ Y_{12} &= m.L.\dot{\omega} + m.g.\cos \theta \\ Z_{12} &= 0 \end{aligned}$
-------------------	--

6- Moment d'inertie de la barre 1

La barre 1 ayant une section constante et petite devant sa longueur son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_1, \vec{z}_1) est $\frac{m.L^2}{12}$. Par le théorème de Huygens on en déduit le moment d'inertie I_1 de la barre 1

par rapport à l'axe (O, \vec{z}_0) : $I_1 = \frac{m.L^2}{12} + m.\left(\frac{L}{2}\right)^2$ Soit : $I_1 = \frac{m.L^2}{3}$

7- Isolement de la barre 1

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 1 :

- ☞ Action de la pesanteur : Force $\vec{P}_1 = -m.g.\vec{y}_0$ appliquée en G_1 .
- ☞ Action de 2 sur 1 : Force $\vec{F}_{2\rightarrow 1} = -\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -X_{12}.\vec{x}_1 - Y_{12}.\vec{y}_1$ appliquée en A
- ☞ Action de 0 sur 1 : Due à la liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1)
- ☞ Action du couple moteur : Couple de vecteur moment : $\vec{C}_m = C_m.\vec{z}_1$

Le théorème du moment dynamique (TMD) au point O donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_1} \wedge \overrightarrow{P_1} \cdot \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{OA} \wedge (-\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}) \cdot \overrightarrow{z_1} + \mathbf{0} + C_m &= I_1 \cdot \dot{\omega} \\ \frac{L}{2} \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge (-m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} + L \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge (-X_{12} \cdot \overrightarrow{x_1} - Y_{12} \cdot \overrightarrow{y_1}) \cdot \overrightarrow{z_1} + C_m &= \frac{m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} \\ C_m = \frac{m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_0} + L \cdot Y_{12} \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{z_1} + \frac{m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} \\ C_m = \frac{m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \cos \theta + L \cdot (m \cdot L \cdot \dot{\omega} + m \cdot g \cdot \cos \theta) + \frac{m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$C_m = \frac{3 \cdot m \cdot g \cdot L}{2} \cdot \cos \theta + \frac{4 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega}$$

Etude de la barrière de type 1

8- Isolement de la barre 1

La barre 1 ayant une section constante et petite devant sa longueur son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_1, \overrightarrow{z_1})$ est $\frac{2 \cdot m \cdot (2 \cdot L)^2}{12}$. Par le théorème de Huygens on en déduit le moment d'inertie I_1 de la barre

1 par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$: $I_1 = \frac{2 \cdot m \cdot L^2}{3} + 2 \cdot m \cdot L^2$ Soit : $I_1 = \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3}$

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 1 :

- ☞ Action de la pesanteur : Force $\overrightarrow{P_1} = -2 \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_1 .
- ☞ Action de 0 sur 1 : Due à la liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$
- ☞ Action du couple moteur : Couple de vecteur moment : $\overrightarrow{C_m} = C_m \cdot \overrightarrow{z_1}$

Le théorème du moment dynamique (TMD) au point O donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_1} \wedge \overrightarrow{P_1} \cdot \overrightarrow{z_1} + \mathbf{0} + C_m &= I_1 \cdot \dot{\omega} \\ L \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge (-2 \cdot m \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} + C_m &= \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} \\ C_m = 2 \cdot m \cdot g \cdot L \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$C_m = 2 \cdot m \cdot g \cdot L \cdot \cos \theta + \frac{8 \cdot m \cdot L^2}{3} \cdot \dot{\omega}$$

Conclusion

En comparant les les couples moteurs calculés pour les deux types de barrière, on en conclue :

- ☞ La barrière de type 2 permet un couple moteur plus faible
- ☞ la barrière de type 2 ne permet de lever la barrière que d'une hauteur de L la où la barrière de type 1 permet de libérer le passage sur toute la hauteur.