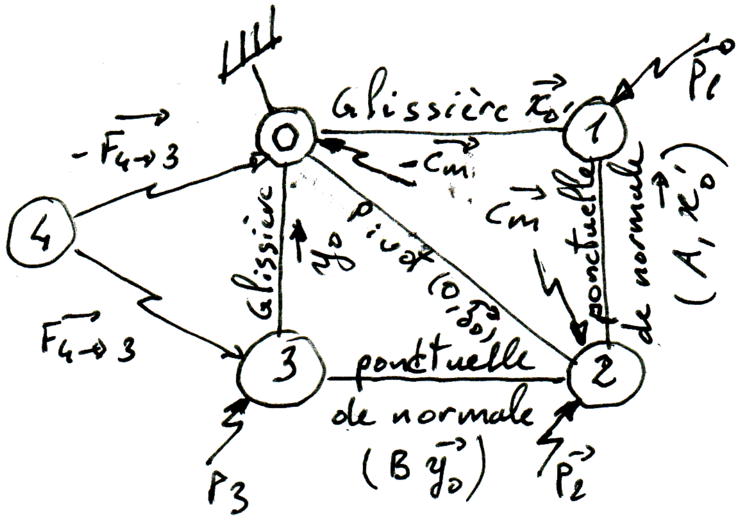
Tamis de trieuse de graviers Corrigé

① Graphe de stucture



$x = d.\sin\alpha$

$y = -r.\sin\alpha$

Donc

$\dot{x} = d.\dot{\alpha}.\cos\alpha$

$\dot{y} = -r.\dot{\alpha}.\cos\alpha$

② Expression du couple moteur.

Calculons l'enegie cinétique de $S = \{1,2,3\}$ dans son mouvement par rapport à 0

$$E_c(S/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0)$$

$$E_c(S/0) = \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{V_{A_1 \in 1/0}}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 \overrightarrow{V_{A_3 \in 3/0}}^2$$

$$E_c(S/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}^2$$

or $\dot{x} = d\dot{\alpha}\cos\alpha = d\omega\cos\alpha$ et $\dot{y} = -r\dot{\alpha}\cos\alpha = -r\omega\cos\alpha$

$$E_c(S/0) = \frac{1}{2} m_1 d^2 \omega^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r^2 \omega^2 \cos^2\alpha$$

soit : $$E_c(S/0) = \frac{1}{2}\left[J_2 + (m_1 d^2 + m_3 r^2)\cos^2\alpha\right]\omega^2$$

Calculons la somme des puissances.

$P(0\to1/0) = P(0\to2/0) = P(0\to3/0) = 0$ car les liaisons de 1, 2 et 3 avec le bâti 0 sont parfaites.

$P(4 \to 3/0) = \overrightarrow{F_{4\to3}} \cdot \overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = -k\,y\,\vec{y_0} \cdot \dot{y}\,\vec{y_0}$

$= -k.(-r\sin\alpha).(-r\dot{\alpha}\cos\alpha)$ avec $\dot{\alpha} = \omega$

$\underline{P(4 \to 3/0) = -k\,r^2\,\omega\,\cos\alpha\,\sin\alpha}$

$\underline{P(C_m \to 2/0) = \overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = C_m\,\vec{z_0} \cdot \omega\,\vec{z_0} = C_m\,\omega}$

$P(Pes \to 1/0) = \vec{P_1} \cdot \overrightarrow{V_{G_1\in 1/0}} = -m_1 g\,\vec{y_0} \cdot \dot{x}\,\vec{x_{0'}}$ avec $\dot{x} = d\omega\cos\alpha$

$P(Pes \to 1/0) = -m_1 g\,d\,\omega\cos\alpha\;\vec{y_0} \cdot \vec{x_{0'}}$ avec $\vec{y_0} \cdot \vec{x_{0'}} = \sin\beta$

$\underline{P(Pes \to 1/0) = -m_1 g\,d\,\omega\,\sin\beta\,\cos\alpha}$

$P(Pes \to 2/0) = \vec{P_2} \cdot \overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}}$ or $\overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}} = \vec{0}$ car $G_2 \in (0, \vec{z_0})$

$\underline{P(Pes \to 2/0) = 0}$

$P(Pes \to 3/0) = \vec{P_3} \cdot \overrightarrow{V_{G_3\in 3/0}} = -m_3 g\,\vec{y_0} \cdot \dot{y}\,\vec{y_0}$ avec $\dot{y} = -r\omega\cos\alpha$

$\underline{P(Pes \to 3/0) = +m_3\,g\,r\,\omega\,\cos\alpha}$

On en deduit la somme des puissances exterieures :

$$\underline{\underline{\sum P(Ext \to S/0) = C_m\omega - kr^2\omega\cos\alpha\sin\alpha + (m_3 r - m_1 d\sin\beta)\,g\,\omega\cos\alpha}}$$

D'autre part le système S etant constitué d'un ensemble de solides en liaisons parfaites les uns avec les autre, la somme des puissances interieures est nulle

$$\underline{\underline{\sum P(Int \to S/0) = 0}}$$

L'application du Theorème de l'Energie cinétique à S.

$\dfrac{d\,E_c(S/0)}{dt} = \sum P(Ext \to S/0) + \sum P(Int \to S/0)$ donne donc :

$$-(m_1 d^2 + m_3 r^2)\,\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\alpha\,\omega^2 = C_m\omega - kr^2\omega\cos\alpha\sin\alpha + m_3 g r\omega\cos\alpha - m_1 g\,d\,\omega\sin\beta\cos\alpha$$

avec $\dot{\alpha} = \omega$

On obtient donc :

$$-(m_1 d^2 + m_3 r^2)\cos\alpha \sin\alpha\, \omega^2 = C_m - K r^2 \cos\alpha \sin\alpha + (m_3 r - m_1 d \sin\beta) g \omega \cos\alpha$$

soit finalement :

$$\boxed{C_m = (m_1 d \sin\beta - m_3 r)\, g\, \omega \cos\alpha + [k r^2 - (m_1 d^2 + m_3 r^2)\, \omega^2] \cos\alpha \sin\alpha}$$

③ Équilibrage.

Étant donné l'expression du couple moteur, celui-ci est nul si et seulement si :

$$\begin{cases} m_1 d \sin\beta - m_3 r = 0 \\ \text{et } \; k r^2 - (m_1 d^2 + m_3 r^2)\,\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{m_3 = m_1 \frac{d}{r} \sin\beta}$$

et

$$\boxed{k = m_1 \frac{d^2 + d.r.\sin\beta}{r^2}\, \omega^2}$$