

Pendulage de bielle : Corrigé

1- Equations différentielles et pulsations des oscillations

Dans le cas d'une oscillation autour de l'axe (A, $\vec{z}_1$)

On isole la bielle. Bilan des Actions mécaniques Extérieures :

☞ Poids de la bielle : Force $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{x}_0$ appliquée en G

☞ Action de la lame sur la bielle : Force $\vec{F}_A$ appliquée en A

Théorème du Moment dynamique en A en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F}_A \cdot \vec{z}_0 = J_A \cdot \ddot{\alpha}$$

$$L_A \cdot \vec{x}_1 \wedge m \cdot g \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_0 + 0 = J_A \cdot \ddot{\alpha}$$

$$-m \cdot g \cdot L_A \cdot \sin \alpha = J_A \cdot \ddot{\alpha}$$

L'angle α étant faible on en déduit l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{\alpha} + \frac{m \cdot g \cdot L_A}{J_A} \cdot \alpha = 0$$

Cette équation a une solution de la forme : $\alpha(t) = A \cdot \sin(\omega_A \cdot t + \varphi)$ avec : $\omega_A = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_A}{J_A}}$

Donc pour l'oscillation autour de l'axe (A, $\vec{z}_1$) la pulsation est de :

$$\omega_A = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_A}{J_A}}$$

De la même manière pour l'oscillation autour de l'axe (B, $\vec{z}_1$) on obtient :

L'équation différentielle : $\ddot{\alpha} + \frac{m \cdot g \cdot L_B}{J_B} \cdot \alpha = 0$ Et donc la pulsation : $\omega_B = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L_B}{J_B}}$

2- Position du centre de gravité

Des expressions des deux pulsations on en déduit les deux équations :

$$\begin{cases} J_A \cdot \omega_A^2 = m \cdot g \cdot L_A \\ J_B \cdot \omega_B^2 = m \cdot g \cdot L_B \end{cases}$$

Or le théorème de Huygens permet d'affirmer que : $\begin{cases} J_A = J_G + m \cdot L_A^2 \\ J_B = J_G + m \cdot L_B^2 \end{cases}$

D'autre part ayant G appartenant au segment [AB], on a : $L_B = L_0 - L_A$

Par substitution dans les deux premières équations on obtient :

$$J_G \cdot \omega_A^2 + m \cdot L_A^2 \cdot \omega_A^2 = m \cdot g \cdot L_A \quad (1)$$

$$J_G \cdot \omega_B^2 + m \cdot (L_0 - L_A)^2 \cdot \omega_B^2 = m \cdot g \cdot (L_0 - L_A) \quad (2)$$

Par une combinaison linéaire de ces équations : $(1) \cdot \omega_B^2 - (2) \cdot \omega_A^2$ on obtient :

$$m \cdot L_A^2 \cdot \omega_A^2 \cdot \omega_B^2 - m \cdot (L_0 - L_A)^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2 = m \cdot g \cdot L_A \cdot \omega_B^2 - m \cdot g \cdot (L_0 - L_A) \cdot \omega_A^2$$

$$m \cdot (L_A^2 - L_A^2 - L_0^2 + 2 \cdot L_0 \cdot L_A) \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2 = m \cdot (g \cdot L_A \cdot \omega_B^2 - g \cdot L_0 \cdot \omega_A^2 + g \cdot L_A \cdot \omega_A^2)$$

$$2 \cdot L_0 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2 \cdot L_A - L_0^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2 = g \cdot (\omega_A^2 + \omega_B^2) \cdot L_A - g \cdot L_0 \cdot \omega_A^2$$

$$g \cdot L_0 \cdot \omega_A^2 - L_0^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2 = L_A \cdot (g \cdot (\omega_A^2 + \omega_B^2) - 2 \cdot L_0 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2)$$

Soit finalement :

$$L_A = \frac{g \cdot L_0 \cdot \omega_A^2 - L_0^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2}{g \cdot (\omega_A^2 + \omega_B^2) - 2 \cdot L_0 \cdot \omega_B^2 \cdot \omega_A^2}$$

3- Applications numériques

On sait que : $\omega_A = \frac{2 \cdot \pi}{T_A}$ et : $\omega_B = \frac{2 \cdot \pi}{T_B}$ avec : $T_A = 0,575 \text{ s}$ et : $T_B = 0,569 \text{ s}$

On obtient donc : $\omega_A = 10,93 \text{ rad.s}^{-1}$ et : $\omega_B = 11,04 \text{ rad.s}^{-1}$

D'autre part : $L_0 = 103,5 \text{ mm} = 0,1035 \text{ m}$ et : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Ce qui nous donne après application numérique : **$L_A = 0,0537 \text{ m} = 53,7 \text{ mm}$**

En reprenant l'équation (1), on obtient : **$J_G = \frac{m \cdot g \cdot L_A}{\omega_A^2} - m \cdot L_A^2$** avec : $m = 37 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

Ce qui nous donne après application numérique : **$J_G = 5,65 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$**

Enfin, on a : **$L_B = L_0 - L_A$** Soit : **$L_B = 49,8 \text{ mm}$**

4- Modèle volumique simplifié et homogène

Calculons la masse volumique du matériau.

Le volume total est de : $V_T = 13 \cdot \pi \cdot (12^2 - 7,5^2) + 13 \cdot \pi \cdot (10,5^2 - 6^2) + 5 \times 70 \times 14 = 11\,516 \text{ mm}^3$

Ce qui donne une masse volumique de : **$\rho = \frac{m}{V_T} = \frac{37}{11\,516} = 3,213 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3 = 3\,213 \text{ kg.m}^{-3}$**

Calculons la masse de chacun des 3 volumes homogène simple :

Cylindre creux de pied de bielle : **$m_1 = 13 \cdot \pi \cdot (12^2 - 7,5^2) \times 3,213 \cdot 10^{-3} = 11,52 \text{ g}$**

Cylindre creux de tête de bielle : **$m_2 = 13 \cdot \pi \cdot (10,5^2 - 6^2) \times 3,213 \cdot 10^{-3} = 9,74 \text{ g}$**

Parallélépipède entre le pied et la tête : **$m_3 = 70 \times 14 \times 5 \times 3,213 \cdot 10^{-3} = 15,74 \text{ g}$**

Déterminons la position du centre d'inertie :

Le centre de gravité est le barycentre des points G_1 , G_2 et G_3 centres de gravité de chacun des 3 volumes simples affectés des coefficients m_1 , m_2 et m_3 masses de chacun des 3 volumes simples.

On a donc : $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \overrightarrow{AG} = m_1 \cdot \overrightarrow{AG} = m_1 \cdot \overrightarrow{AG_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{AG_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{AG_3}$

Avec : $\overrightarrow{AG} = L_A \cdot \overrightarrow{x_1}$ $\overrightarrow{AG_1} = (6+44+46) \cdot \overrightarrow{x_1}$ $\overrightarrow{AG_2} = 6 \cdot \overrightarrow{x_1}$ $\overrightarrow{AG_3} = (6+44) \cdot \overrightarrow{x_1}$

On a donc : **$L_A = \frac{11,52 \times 96 + 9,74 \times 6 + 15,74 \times 50}{37} = 52,7 \text{ mm}$**

Déterminons les moments d'inertie des 3 volumes simples par rapport aux axes (G_i , $\overrightarrow{z_0}$)

Cylindre creux de pied de bielle : **$J_1 = \frac{m_1 \cdot (R_1^2 + r_1^2)}{2} = \frac{11,52 \cdot (12^2 + 7,5^2)}{2} = 1153 \text{ g.mm}^2$**

Cylindre creux de tête de bielle : **$J_2 = \frac{m_2 \cdot (R_2^2 + r_2^2)}{2} = \frac{9,74 \cdot (10,5^2 + 6^2)}{2} = 712 \text{ g.mm}^2$**

Parallélépipède entre le pied et la tête : **$J_3 = \frac{m_3 \cdot (a^2 + b^2)}{12} = \frac{15,74 \cdot (70^2 + 14^2)}{12} = 6684 \text{ g.mm}^2$**

Déterminons le moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe (G , $\overrightarrow{z_0}$)

On a en mm : $\overrightarrow{G_3G} = \overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{AG} = -(44 + 6) \cdot \overrightarrow{x_1} + L_A \cdot \overrightarrow{x_1} = 2,7 \cdot \overrightarrow{x_1}$

On en déduit : $\overrightarrow{GG_1} = (46 - 2,7) \cdot \overrightarrow{x_1} = 43,3 \cdot \overrightarrow{x_1}$ et : $\overrightarrow{GG_2} = -(2,7 + 44) \cdot \overrightarrow{x_1} = 46,7 \cdot \overrightarrow{x_1}$

Par le théorème de Huygens (appliqué trois fois) on obtient :

$J_G = J_1 + m_1 \cdot 43,3^2 + J_2 + m_2 \cdot 46,7^2 + J_3 + m_3 \cdot 2,7^2 = 51\,504 \text{ g.mm}^2 = 5,15 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$

Remarque :

Les résultats du modèle simplifié à 3 volumes homogènes simples confirment les ordres de grandeur obtenus par la mesure des périodes d'oscillation. Cependant ce résultat est 10% plus faible.

Cela s'explique par le fait que ce modèle ne tient pas compte qu'on a deux bagues en bronze au pied et en tête de bielle dont la masse volumique (6800 kg.m^{-3}) est plus importante que le matériau de la bielle qui est probablement de l'aluminium.

Cela explique également la masse volumique (3200 kg.m^{-3}) déterminée à partir du modèle simplifié trop élevée pour de l'aluminium qui a suivant les alliages une masse volumique de 2600 à 2800 kg.m^{-3} .