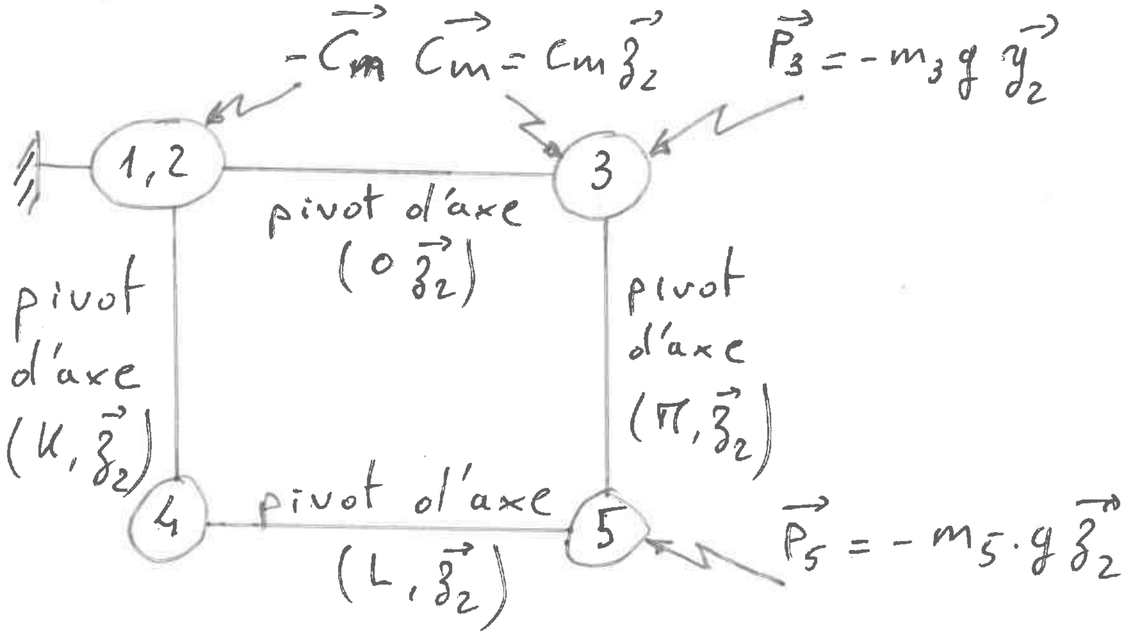
Bras manipulateur : Corrigé

① Graphe de structure



② Le préhenseur 5 est lié au socle 2 par l'intermediaire du bras 3 (en liaisons pivots d'axe $(M \vec{z}_2)$ avec 5 et $(O \vec{z}_2)$ avec 2) et de la tringle 4 (en liaisons pivots d'axe $(L \vec{z}_2)$ avec 5 et $(K \vec{z}_2)$ avec 2). D'autre part $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{KL}\|$ et $\|\overrightarrow{OK}\| = \|\overrightarrow{ML}\|$ Donc OMLK est un parallelogramme deformable soit $(ML) \parallel (OK)$ D'où $\overrightarrow{\Omega_{5/2}} = \vec{0}$

Donc <u>le mouvement de 5 par rapport à 2 est une translation circulaire.</u>

Ayant $\overrightarrow{\Omega_{5/2}} = \vec{0}$ $\overrightarrow{V_{G \in 5/2}} = \overrightarrow{V_{M \in 5/2}}$

or $\overrightarrow{V_{M \in 5/2}} = \overrightarrow{V_{M \in 3/2}}$ car M est sur l'axe de la liaison pivot entre 5 et 3

D'autre part $\overrightarrow{V_{M\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{O\in 3/2}} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}$

Avec $\overrightarrow{V_{O\in 3/2}} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de la liaison pivot entre 3 et 2

Et $\overrightarrow{MO} = -l\,\vec{x_3}$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\beta}\,\vec{z_2} = \dot{\beta}\,\vec{z_3}$

Donc $\overrightarrow{V_{G\in 5/0}} = -l\,\vec{x_3} \wedge \dot{\beta}\,\vec{z_3}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{G\in 5/0}} = l\,\dot{\beta}\,\vec{y_3}}$$

③ Le bras 3 est assimilé à une barre homogène de longueur l de section faible devant l.

D'où son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_3\vec{z_3})$

$I_{G_3\vec{z_3}}(3) = \frac{m_3 l^2}{12}$ avec G_3 tel que $\overrightarrow{OG_3} = \frac{l}{2}\vec{x_3}$

Donc d'après le théorème de Huygens, le moment d'inertie du bras 3 par rapport à l'axe $(O\vec{z_3}) = (O,\vec{z_2})$ est :

$$I_{O3} = I_{O\vec{z_3}}(3) = I_{G_3\vec{z_3}}(3) + m_3\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_3 l^2}{12} + \frac{m_3 l^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{O3} = \frac{m_3 l^2}{3}}$$

④ On néglige l'inertie de 4 et $S = \{3, 4, 5 + \text{carter}\}$

Donc $E_c(S/2) = E_c(5+\text{carter}/2) + E_c(3/2)$

Le mouvement de 3 par rapport à 2 est une rotation d'axe fixe $(O\vec{z_2})$ à la vitesse $\vec{\Omega_{3/2}} = \dot{\beta}\,\vec{z_3}$

Donc $E_c(3/2) = \frac{1}{2} I_{O3} \cdot \dot{\beta}^2$ avec $I_{O3} = \frac{m_3 l^2}{3}$

Le mouvement de 5+carter par rapport à 2 est une translation de vecteur vistesse $\vec{V_{G\in 5/2}} = l\dot{\beta}\,\vec{y_2}$

Donc $E_c(5+\text{carter}/2) = \frac{1}{2} m_5 (l\dot{\beta})^2$

D'où $E_c(S/2) = \frac{1}{2}\frac{m_3 l^2}{3}\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_5 l^2 \dot{\beta}^2$

$$\Rightarrow \boxed{E_c(S/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_3}{3} + m_5\right) l^2 \dot{\beta}^2}$$

5 Le systeme S est constitué de solides en liaisons parfaites les uns avec les autres, sans autres action que celles de ces liaisons parfaites.

Donc la somme des puissances des actions interieures à S est nulle : $\underline{\sum P(\text{Int} \to S/2) = 0}$

Les actions exterieures s'appliquant sur S sont :

* Action de $2 \to 3$ due à la liaison parfaite de 3/2
* Action de $2 \to 4$ due à la liaison parfaite de 4/2
* Couple moteur $\to 3$ de vecteur $\vec{C_m} = C_m \vec{z_2}$
* Poids de 3 : Force $\vec{P_3} = -m_3 g \vec{y_2}$ appliquée en G_3
* Poids de 5 : Force $\vec{P_5} = -m_5 g \vec{y_2}$ appliquee en G_3

D'où la somme des actions extérieures s'appliquant sur S dans son mouvement par rapport à 2 :

$$\sum P(Ext \to S/2) = P(\vec{C_m} \to 3/2) + P(\vec{P_3} \to 3/2) + P(\vec{P_5} \to 5/2)$$

$$\sum P(Ext \to S/2) = \vec{C_m} \cdot \vec{\Omega_{3/2}} + (-m_3 g \vec{y_2}) \cdot \vec{V_{G_3 \in 3/2}} + -m_5 g \vec{y_2} \cdot \vec{V_{G_5 \in 5/2}}$$

D'autre part $\vec{V_{G_3 \in 3/2}} = \cancel{\vec{V_{O \in 3/2}}}^{\vec{0}} + \vec{G_3 O} \wedge \vec{\Omega_{3/2}} = -\frac{l}{2} \vec{x_3} \wedge \dot{\beta} \vec{z_3} = \frac{l}{2} \dot{\beta} \vec{y_3}$

Donc $\sum P(Ext \to S/2) = C_m \vec{z_2} \cdot \dot{\beta} \vec{z_2} - m_3 g \vec{y_2} \cdot \frac{l}{2} \dot{\beta} \vec{y_3} - m_5 g \vec{y_2} \cdot l \dot{\beta} \vec{y_3}$

sachant que $\vec{y_2} \cdot \vec{y_3} = \cos\beta$ on obtient :

$$\underline{\sum P(Ext \to S/2) = \dot{\beta} \left[C_m - \left(\frac{m_3}{2} + m_5\right) l g \cos\beta \right]}$$

L'application du TEC à S :

$$\sum P(Int \to S/2) + \sum P(Ext \to S/2) = \frac{d\,E_c(S/2)}{dt}$$

Donne : $0 + \dot{\beta}\left[C_m - \left(\frac{m_3}{2} + m_5\right) l g \cos\beta\right] = \left(\frac{m_3}{3} + m_5\right) l^2 \dot{\beta} \ddot{\beta}$

On en déduit :

$$\boxed{C_m = \left(\frac{m_3}{3} + m_5\right) l^2 \ddot{\beta} + \left(\frac{m_3}{2} + m_5\right) l g \cos\beta}$$

6 Le couple moteur est donc maximal pour $\ddot{\beta}$ maximal et $\cos\beta$ maximal

Or $\ddot{\beta}$ est maximal pour $t \in [0\, T_1]$ avec

$$\ddot{\beta} = \frac{\dot{\beta}_{max}}{T_1}$$

Et $\cos\beta$ est maximal à la date $t=0$ où $\beta = 0$

Donc la valeur du couple moteur est maximale au demarrage du mouvement (pour $t=0$)

Et $$\boxed{C_{m\,max} = \left(\frac{m_3}{3} + m_5\right) \ell^2 \frac{\dot{\beta}_{max}}{T_1} + \left(\frac{m_3}{2} + m_5\right) \ell g}$$