

TD* : Plate-forme hexapode : Corrigé**1- Etude cinématique****1.1- Fermeture géométrique**

La fermeture géométrique entre les points O_M et O_F est : $\overrightarrow{O_F A_1} + \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 O_M} + \overrightarrow{O_M O_F} = \vec{0}$

Soit : $R \cdot \sin(30^\circ + \alpha) \cdot \overrightarrow{x_0} + R \cdot \cos(30^\circ + \alpha) \cdot \overrightarrow{y_0} + \rho \cdot \overrightarrow{w} - r \cdot \cos \beta \cdot \overrightarrow{x_0} - r \cdot \sin \beta \cdot \overrightarrow{y_0} - h \cdot \overrightarrow{z_0} = \vec{0}$

Or : $\overrightarrow{w} = \cos \theta \cdot \overrightarrow{n} - \sin \theta \cdot \overrightarrow{y_0}$ et : $\overrightarrow{n} = \cos \psi \cdot \overrightarrow{z_0} + \sin \psi \cdot \overrightarrow{x_0}$

Donc : $\overrightarrow{w} = \cos \theta \cdot \sin \psi \cdot \overrightarrow{x_0} - \sin \theta \cdot \overrightarrow{y_0} + \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \overrightarrow{z_0}$

Donc si on pose : $A = R \cdot \sin(30^\circ + \alpha) - r \cdot \cos \beta$ et : $B = R \cdot \cos(30^\circ + \alpha) - r \cdot \sin \beta$

Alors : $A \cdot \overrightarrow{x_0} + B \cdot \overrightarrow{y_0} + \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi \cdot \overrightarrow{x_0} - \rho \cdot \sin \theta \cdot \overrightarrow{y_0} + \rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \overrightarrow{z_0} - h \cdot \overrightarrow{z_0} = \vec{0}$

On a donc, en projection sur $\overrightarrow{x_0}$: $A + \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi = 0$ $A = -\rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi$ (a)

sur $\overrightarrow{y_0}$: $B - \rho \cdot \sin \theta = 0$ $B = \rho \cdot \sin \theta$ (b)

sur $\overrightarrow{z_0}$: $\rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi - h = 0$ $h = \rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi$ (c)

☞ La somme de ces trois équations élevées au carré ((a)² + (b)² + (c)²) donne :

$$A^2 + B^2 + h^2 = \rho^2 \quad \text{Soit :} \quad h = \sqrt{\rho^2 - A^2 - B^2}$$

☞ L'équation (b) donne : $\sin \theta = \frac{B}{\rho}$

☞ L'équation (a) donne : $\sin \psi = \frac{A}{-\rho \cdot \cos \theta}$ or : $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ avec : $\sin \theta = \frac{B}{\rho}$

$$\text{Donc :} \quad \sin \psi = \frac{-A}{\rho \cdot \sqrt{1 - \frac{B^2}{\rho^2}}} \quad \text{Soit :} \quad \sin \psi = \frac{-A}{\sqrt{\rho^2 - B^2}}$$

$$\text{On a donc :} \quad h = \sqrt{\rho^2 - A^2 - B^2} \quad \sin \theta = \frac{B}{\rho} \quad \sin \psi = \frac{-A}{\sqrt{\rho^2 - B^2}}$$

$$\text{Avec :} \quad A = R \cdot \sin(30^\circ + \alpha) - r \cdot \cos \beta \quad \text{et :} \quad B = R \cdot \cos(30^\circ + \alpha) - r \cdot \sin \beta$$

1.2- Linéarisation de la relation entre les paramètres h et ρ

Si on linéarise la courbe (qui est déjà très proche d'une droite) représentant la hauteur h en fonction de la longueur ρ du vérin. Le coefficient λ_h tel que est le coefficient directeur de cette droite.

$$\text{On a donc :} \quad \lambda_h = \frac{1\ 600 - 950}{1\ 720 - 1\ 130} = 1,1$$

1.3- Relations entre les vitesses

Etant donné la transmission par courroie entre le moteur et la vis 3 on a : $\omega_{3/0} = k \cdot \omega_m$

Etant donné la liaison hélicoïdale entre 3 et 2 : $V_{2/3} = \frac{p_V}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{2/3}$ avec : $V_{0/3} = \omega_{2/0} = 0$

Donc : $V_{2/0} = \frac{p_V}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{0/3}$ Soit : $\dot{\rho} = \frac{-p_V}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{3/0}$ avec : $\omega_{3/0} = k \cdot \omega_m$ Donc : $\dot{\rho} = \frac{-p_V}{2 \cdot \pi} \cdot k \cdot \omega_m$

Enfin, ayant : $\dot{h} = \lambda_h \cdot \dot{\rho}$ On en déduit : $\dot{h} = \lambda_h \cdot \frac{-p_V}{2 \cdot \pi} \cdot k \cdot \omega_m$

2- Etude cinétique et dynamique

Moment d'inertie équivalent

Les pièces en mouvement sont le rotor du moteur 4 et la vis 3 qui sont en rotation et la tige du vérin 2 et la nacelle S₁ qui sont en translation. L'énergie cinétique des ces pièces est donc :

$$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_4 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_{3/0}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{6} \cdot \dot{h}^2$$

Or on sait que : $\omega_{3/0} = k \cdot \omega_m$ $\dot{\rho} = \frac{-p_V}{2\pi} \cdot k \cdot \omega_m$ et : $\dot{h} = \lambda_h \cdot \frac{-p_V}{2\pi} \cdot k \cdot \omega_m$

On a donc : $E_C(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_4 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot k^2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{-p_V}{2\pi}\right)^2 \cdot k^2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{6} \cdot \lambda_h^2 \cdot \left(\frac{-p_V}{2\pi}\right)^2 \cdot k^2 \cdot \omega_m^2$

Si on ramène l'inertie des pièces sur l'arbre moteur on a : $E_C(s/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_m^2$

Donc J_{eq} le moment d'inertie équivalent à l'inertie des pièces en mouvement du vérin et d'un sixième de la nacelle, ramenée sur l'arbre moteur est :

$$J_{eq} = J_4 + J_3 \cdot k^2 + m_2 \cdot \left(\frac{-p_V}{2\pi}\right)^2 \cdot k^2 + \frac{m}{6} \cdot \lambda_h^2 \cdot \left(\frac{-p_V}{2\pi}\right)^2 \cdot k^2$$

Application numérique :

$$J_{eq} = 11,34 \cdot 10^{-5} + 9,5 \cdot 10^{-5} \times \left(\frac{15}{36}\right)^2 + 10,8 \times \left(\frac{0,025}{2\pi}\right)^2 \times \left(\frac{15}{36}\right)^2 + \frac{1\,000}{6} \times 1,1^2 \times \left(\frac{0,025}{2\pi}\right)^2 \times \left(\frac{15}{36}\right)^2$$

$$J_{eq} = 7,14 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

Couple résistant équivalent

Les pièces en mouvement sont :

- ☞ Le rotor du moteur 4 et la vis 3 qui sont en rotation autour d'un axe passant par leur centre de gravité. Leur centre de gravité ayant une position constante par rapport au sol, le travail de leur poids est nul.
- ☞ La tige 2 qui est en translation rectiligne à la vitesse $\vec{V}_{G2 \in 2/S0} = \dot{\rho} \cdot \vec{w}$. D'où le travail du poids \vec{P}_2 de cette tige 2 : $P(\vec{P}_2/S_0) = -m_2 \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \cdot \dot{\rho} \cdot \vec{w}$
- ☞ La nacelle S₁ qui est en translation rectiligne à la vitesse $\vec{V}_{O_{M \in S1/S0}} = \dot{h} \cdot \vec{Z}_0$. D'où le travail d'un sixième du poids \vec{P}_{S1} de cette nacelle avec sa cuve : $\frac{P(\vec{P}_{S1}, S_0)}{6} = -\frac{m}{6} \cdot g \cdot \vec{Z}_0 \cdot \dot{h} \cdot \vec{w}$

Sachant que : $\dot{\rho} = \frac{-p_V}{2\pi} \cdot k \cdot \omega_m$ et : $\dot{h} = \lambda_h \cdot \frac{-p_V}{2\pi} \cdot k \cdot \omega_m$ On déduit :

La puissance du poids des pièces du vérin en mouvement et de celle d'un sixième de la nacelle :

$$P(\vec{P}_2/S_0) + \frac{P(\vec{P}_{S1}, S_0)}{6} = g \cdot k \cdot \frac{p_V}{2\pi} \cdot \left(m_2 \cdot \cos \alpha + \frac{m}{6} \cdot \lambda_h\right) \cdot \omega_m$$

Donc C_{req} le couple résistant équivalent aux poids des pièces en mouvement du vérin et d'un sixième de la nacelle, ramenée sur l'arbre moteur est : $C_{req} = g \cdot k \cdot \frac{p_V}{2\pi} \cdot \left(m_2 \cdot \cos \alpha + \frac{m}{6} \cdot \lambda_h\right)$

Application numérique : $C_{req} = 9,81 \times \left(\frac{15}{36}\right) \times \left(\frac{0,025}{2\pi}\right) \times \left(10,8 \times \cos 25,4 + \frac{1\,000}{6} \times 1,1\right) = 3,14 \text{ N.m}$

Couple résistant équivalent

L'application du TEC au système donne donc : $C_m \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = J_{eq} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$

D'où l'équation différentielle décrivant la partie mécanique : $C_m + C_{req} = J_e \cdot \dot{\omega}_m$

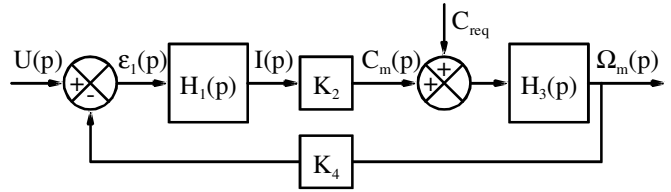
Avec : $J_{eq} = 7,14 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ et : $C_{req} = 3,14 \text{ N.m}$

3- Etude de l'asservissement en vitesse de la rotation du moteur

3.1- Modélisation du moteur

De l'équation précédente passée dans le domaine de Laplace : $C_m(p) - C_{req}(p) = J_e \cdot p \cdot \Omega_m(p)$ on obtient :

$$H_3(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p} = \frac{K_3}{p} \quad \text{avec :} \quad K_3 = \frac{1}{J_{eq}}$$



En passant les équations du moteur (p3/9) dans le domaine de Laplace on obtient :

$$H_1(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \quad \text{Soit :} \quad H_1(p) = \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot p} \quad \text{avec :} \quad K_1 = \frac{1}{R} \quad \text{et :} \quad T_1 = \frac{L}{R} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Ainsi que : $K_2 = K_T$ et : $K_4 = K_E$

3.2- Schéma bloc simplifié

Du principe de superposition on peut affirmer que : $\Omega_m(p) = H_U(p) \cdot U(p) + H_{cr}(p) \cdot C_{req}(p)$

$$\text{Avec :} \quad H_U(p) = \frac{H_1(p) \cdot K_2 \cdot H_3(p)}{1 + H_1(p) \cdot K_2 \cdot H_3(p) \cdot K_4} = \frac{\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}} = \frac{\frac{1}{K_4}}{1 + \frac{1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} \cdot p + \frac{T_1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} \cdot p^2}$$

$$\text{Et :} \quad H_{cr}(p) = \frac{H_3(p)}{1 + H_1(p) \cdot K_2 \cdot H_3(p) \cdot K_4} = \frac{\frac{K_3}{p}}{1 + \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}} = \frac{\frac{1 + T_1 \cdot p}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_4}}{1 + \frac{1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} \cdot p + \frac{T_1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} \cdot p^2}$$

Sachant que : $K_1 = \frac{1}{R}$ $T_1 = \frac{L}{R}$ $K_2 = K_T$ $K_3 = \frac{1}{J_{eq}}$ $K_4 = K_E$

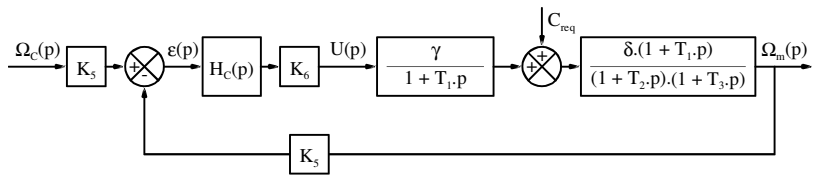
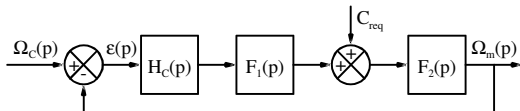
$$\text{On obtient :} \quad \Omega_m(p) = \left[\frac{\gamma}{1 + T_1 \cdot p} \cdot U(p) + C_{req}(p) \right] \cdot \frac{\delta \cdot (1 + T_1 \cdot p)}{(1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + T_3 \cdot p)}$$

$$\text{Avec :} \quad \delta = \frac{1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_4} = \frac{R}{K_T \cdot K_E} \approx 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad \gamma = \frac{1}{K_1 \cdot K_2} = \frac{K_T}{R} = 0,562 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$\text{et :} \quad T_2 + T_3 = \frac{1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} = \frac{R \cdot J_{eq}}{K_T \cdot K_E} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad T_2 \cdot T_3 = \frac{T_1}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} = \frac{L \cdot J_{eq}}{K_T \cdot K_E} = 1,14 \cdot 10^{-7} \text{ s}^2$$

3.3- Schéma bloc à retour unitaire

D'où le schéma bloc simplifié ci-contre qui est équivalent au schéma bloc à retour unitaire ci-dessous



$$\text{avec :} \quad F_1(p) = \frac{K_{F1}}{1 + T_1 \cdot p} \quad \text{où :} \quad K_{F1} = K_5 \cdot K_6 \cdot \gamma = 0,28$$

$$\text{et :} \quad F_2(p) = \frac{K_{F2} \cdot (1 + T_1 \cdot p)}{(1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + T_3 \cdot p)} \quad \text{où :} \quad K_{F2} = \delta = 1$$

3.3- Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$\text{D'où la FTBO pour } H_c(p) = 1 : \quad H_{BONC}(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) = \frac{K_{F1} \cdot K_{F2}}{(1 + T_2 \cdot p) \cdot (1 + T_3 \cdot p)}$$

Qui est un second ordre : ω de gain statique : $K_{BONC} = K_{F1} \cdot K_{F2} = 0,28$

$$\omega \text{ de pulsation propre : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_2 \cdot T_3}} = 2960 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega \text{ de facteur d'amortissement : } m = \frac{\omega_0}{2} \cdot (T_2 + T_3) = 1,07$$

3.5- Choix d'un correcteur

La FTBO non corrigée n'a pas d'intégrateur. Or le cahier des charges impose une erreur statique nulle en réponse à échelon de consigne et de perturbation. **Donc les correcteurs proportionnel et à avance de phase ne peuvent pas répondre au cahier des charges.**

D'autre part à une pulsation de $\omega_{0dB} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$ ($u = \frac{\omega_{0dB}}{\omega_0} = 0,68$) on a une phase de la FTBO

non corrigée de $\varphi_{BONC}(\omega_{0dB}) = \arctan\left(\frac{2.m.u}{1-u^2}\right) = -70^\circ$ (Cela peut être lu sur le diagramme de phase donné en page 7/7). c'est-à-dire une phase de $-70 - 90 = -160^\circ$ avec un correcteur intégral. Soit une marge de phase 20° . Or le cahier des charges impose une marge de phase supérieure à 50° à une pulsation de coupure de 2000 rad.s^{-1} . **Donc le correcteur intégral ne peut pas répondre au cahier des charges.**

On choisit donc un correcteur PI : proportionnel intégral.

3.6- Dimensionnement du correcteur PI

Le correcteur PI a pour fonction de transfert : $H_C(p) = \frac{K_C.(1 + T_C.p)}{p}$.

Donc la phase de la FTBO avec ce correcteur est à $\omega_{0dB} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$ de :

$$\varphi_{BO}(\omega_{0dB}) = -70^\circ - 90^\circ + \arctan(2000.T_C)$$

Or pour une marge de phase de 50° il faut une phase de -130° donc :

$$T_C = \frac{\tan(-130^\circ + 70^\circ + 90^\circ)}{2000} = 2,9.10^{-4} \text{ s}$$

D'autre part à une pulsation de $\omega_{0dB} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$ on a un gain de la FTBO non corrigée de $G_{dBONC}(\omega_{0dB}) = 20.\log K_{BONC} - 10.\log(1 + (4.m^2 - 2).u^2 + u^4) = -15 \text{ dB}$ (Cela peut être lu sur le diagramme de phase donné en page 7/9).

Donc le gain du correcteur à $\omega_{0dB} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$ doit être de $+15 \text{ dB}$. Soit :

$$20.\log K_C - 20.\log 2000 + 10.\log(1 + T_C^2.2000^2) = +15 \text{ dB} \quad \Leftrightarrow \quad 20.\log K_C = 79,8$$

$$K_C = 10^{(79,8/20)} = 9\,800 \text{ s}^{-1}$$

D'où la fonction de transfert du correcteur PI : $H_C(p) = \frac{9\,800K_C.(1 + 2,9.10^{-4})}{p}$

3.7- Validation du cahier des charges

Avec ce correcteur la FTBO a un intégrateur.

Donc l'erreur statique est nulle en réponse à un échelon de consigne et ou de perturbation.

D'autre part l'erreur statique en réponse à une consigne en rampe de pente 320 rad.s^{-2} est de :

$$\varepsilon_T = \frac{320}{0,28 \times 9800} = 0,12 \text{ rad.s}^{-1}$$

Donc ce correcteur permet de vérifier les critères de précision et de robustesse

Ce correcteur a été dimensionné pour avoir une marge de phase 50° à 2000 rad.s^{-1} .

Donc le temps mis pour atteindre la valeur maximale en réponse à un échelon de consigne sera d'environ : $3/2000 = 1,5 \text{ ms}$. On devrait donc avoir un temps de réponse à 5% inférieur à 3 ms .

Enfin la constante de temps du correcteur est telle que $\frac{1}{T_C}$ est proche de ω_0 donc la phase de la FTBO est comprise dans l'intervalle $[-90^\circ; -180^\circ]$. Donc la marge de gain est infinie.

Donc ce correcteur permet de vérifier les critères de rapidité et de stabilité.

Tout cela est vérifié par une simulation numérique permettant d'obtenir le tracé des diagrammes de Bode de la FTBO et la courbe de réponse temporelle à un échelon de consigne