

# Systèmes équivalents

## 1- Définition et intérêt du système équivalent

### 1.1- Définition

Un système équivalent doit remplir deux conditions quelque soit les vitesses des systèmes:

- ☞
- ☞

### 1.2- Exemple

Soit un système S constitué de deux arbres 1 (arbre moteur) et 2 liés au bâti 0 par deux liaisons pivot. Et une crémaillère liée au bâti par une liaison glissière. Les arbres 1 et 2 ont respectivement  $I_m$  et  $I_2$  pour moment d'inertie par rapport aux axes, et la crémaillère 3 à une masse  $M_3$ .

L'arbre 1 porte une roue dentée de rayon  $R_1$  engrenant avec la roue dentée portée par l'arbre 2 et de rayon  $R_2$ . Enfin la crémaillère 3 est entraînée en translation par la roue dentée de l'arbre 2.

Ce système est soumis à trois actions extérieures : Deux couples de vecteurs  $\vec{C}_m$  et  $\vec{C}_2$  appliqués respectivement sur 1 et 2 et une force  $\vec{F}_3$ .

On note  $\vec{\Omega}_m$  et  $\vec{\Omega}_2$  les taux de rotation des arbres 1 et 2 et  $\vec{V}_3$  le vecteur vitesse de la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti.

Le système équivalent se résume à un arbre E lié au bâti par une liaison pivot identique à celle entre le bâti et l'arbre 1. Cet arbre a le même taux de rotation  $\vec{\Omega}_m$  par rapport au bâti que l'arbre 1 du système étudié.

Cet arbre équivalent a un moment d'inertie  $I_{eq}$  par rapport à son axe de rotation. Et s'applique sur cet arbre un couple résistant équivalent  $C_{req}$ .

☞ Les deux systèmes ayant la même énergie cinétique, on a :

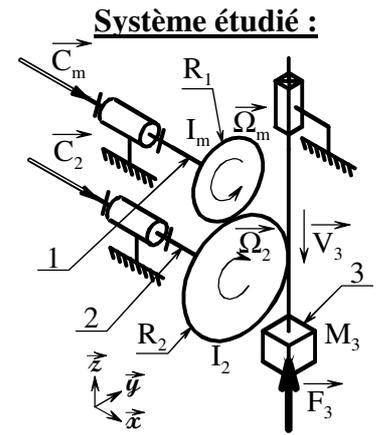
☞ Les deux systèmes ayant les mêmes puissances, on a :

$$\vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_m + \vec{C}_{req} \cdot \vec{\Omega}_m = \sum P(Ext \rightarrow S, R_g) + \sum P(Int \rightarrow S, R_g)$$

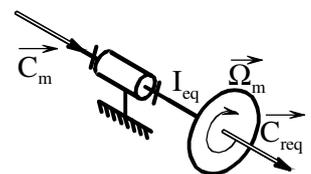
On a alors une écriture simplifiée du PFD :

Ou du TEC :

- ☞ L'inertie équivalente se calcule à partir des différentes inerties et des rapports de transmission.
- ☞ Le couple résistant équivalent se calcule à partir des différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures et des rapports de transmission.
- ☞ En général on a un couple résistant équivalent négatif.



**Système étudié :**



**Système équivalent :**

## 2- Calcul des inerties et moments équivalents

### 2.1- Moment d'inertie équivalent

Posons :  $k = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$  le rapport de transmission de l'arbre 1 à l'arbre 2

$\lambda = \frac{\Omega_2}{\Omega_3}$  le rapport de transmission de l'arbre 2 à la crémaillère 3

L'équation (a) devient : 
$$\frac{1}{2} \cdot I_{eq} \cdot \Omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot I_m \cdot \Omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot k^2 \cdot \Omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot \lambda^2 \cdot k^2 \cdot \Omega_m^2$$

D'où le moment d'inertie équivalent sur l'arbre 1 :

### 2.2- Inertie équivalente ramenée sur un arbre

On définit :  $I_{eq2}$  l'inertie équivalente de l'arbre 2 ramenée sur l'arbre 1 :

$I_{eq3}$  l'inertie équivalente du solide 3 ramenée sur l'arbre 1 :

### 2.3- Couple équivalent

L'équation (b) devient : 
$$\vec{C}_{req} \cdot \vec{\Omega}_m = \vec{C}_2 \cdot k \cdot \vec{\Omega}_m + \vec{F}_3 \cdot \lambda \cdot k \cdot \vec{\Omega}_m$$

D'où le couple équivalent sur l'arbre 1 :

### 2.4- Couple équivalent ramené sur un arbre

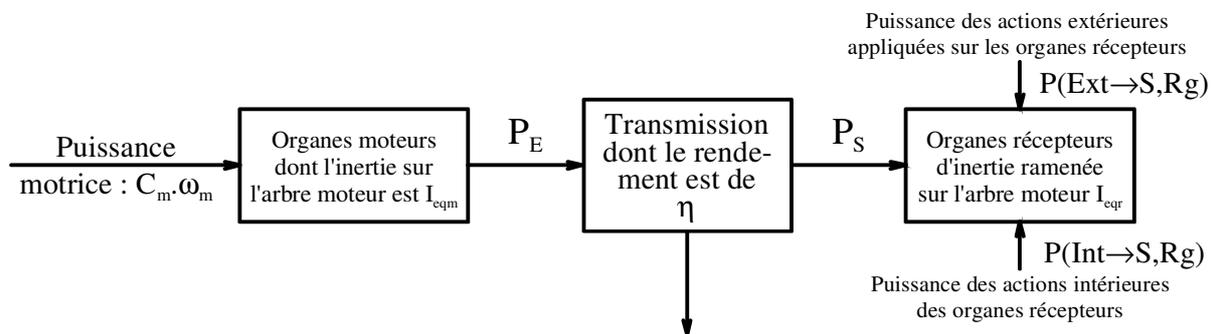
On définit :  $C_{eq2}$  le couple équivalent au couple  $C_2$  ramené sur l'arbre 1 :

$C_{eq3}$  le couple équivalent à la force  $F_3$  ramenée sur l'arbre 1 :

## 3- Transmission avec un rendement $\eta$

### 3.1- Systèmes étudié et équivalent

Soit la chaîne de transmission de puissance suivante :



La transmission a un rendement  $\eta$ . Par définition ce rendement est le rapport entre les puissances à l'entrée de la transmission et celle à la sortie de la transmission.

**3.2- Application du TEC**

☞ Sur le système constitué des organes moteur :

$$C_m \cdot \omega_m - P_E = I_{eqm} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

On en déduit :  $P_E = C_m \cdot \omega_m - I_{eqm} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$

☞ Sur le système constitué des organes récepteurs :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S, R_g) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S, R_g) + \eta \cdot P_E = I_{eqr} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

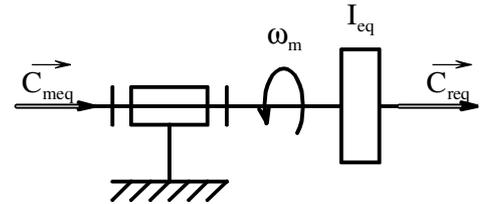
On en déduit :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S, R_g) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S, R_g) + \eta \cdot C_m \cdot \omega_m = (\eta \cdot I_{eqm} + I_{eqr}) \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

**3.3- Modèle équivalent**

Le modèle équivalent est un arbre dont la vitesse de rotation est celle du moteur :  $\omega_m$ .

L'inertie  $I_{eq}$  de cet arbre est égale à la somme des inerties des organes en mouvement ramenées sur l'arbre moteur.



Cet arbre est soumis à deux couples :

- ☞ Un couple moteur équivalent au couple moteur du modèle étudié
- ☞ Un couple résistant équivalent aux différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures appliquées sur le système étudié

L'application du TEC à ce système donne :  $C_{meq} \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = I_{eq} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$

On a alors une écriture simplifiée du PFD :  $C_{meq} + C_{req} = I_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$

Ou du TEC :  $C_{meq} \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = \frac{d (1/2 \cdot I_{eq} \cdot \omega_m^2)}{dt}$

Les différents paramètres du système équivalent se calculent alors de la manière suivante :



avec  $I_{eqm}$  et  $I_{eqr}$  les inerties équivalentes des organes moteur et récepteur ramenées sur l'arbre moteur.



**Remarques :**

- ☞ En général la puissance du couple résistant équivalent est négative.
- ☞ Si on a des puissances d'actions extérieures ou intérieures appliquées sur les organes moteur (autre que le couple moteur) celles-ci sont multipliées par le rendement  $\eta$  :

$$C_{req} = \eta \cdot C_{reqm} + C_{reqr}$$

où :  $C_{reqm}$  est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes moteur

et :  $C_{reqr}$  est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes récepteur