

**Sciences Industrielles de l'Ingénieur**  
**DS N°1 : Sujet B**

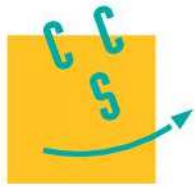
**Consignes pour la réalisation du sujet**

Ce sujet correspond à l'épreuve d'SII du concours MP CCS 2018  
qui a cependant été modifié.

Le sujet est constitué de :

**15 pages d'énoncé (pages 1/15 à 15/15)**  
**3 Pages de documents réponse à la suite de l'énoncé**

**Vous répondrez sur feuille de copies**  
**aux questions de l'énoncé**  
**Sauf pour les questions 9, 28 et 32**  
**où vous utiliserez les documents réponses**  
**que vous détacherez du sujet**  
**et rendrez avec votre copie.**



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

S2I

MP

2018

4 heures

Calculatrices autorisées

## Robot SPHERO



### I Présentation du support

#### I.A – Description du robot Sphero

Une nouvelle génération de robots à mobilité non conventionnelle a vu le jour avec la conception de robots en forme de sphère. Ces robots commencent à être utilisés dans des environnements difficiles (centrale nucléaire, terrain irrégulier) pour des missions d'inspection et de surveillance. Ce type de robot est aussi présent dans l'industrie du divertissement sous la forme d'objets connectés contrôlables avec un smartphone (ou tablette). C'est le cas du robot Sphero créé par la société Orbotix et qui sert de support d'étude pour ce sujet. Créé pour le loisir et l'éducation, le robot Sphero roule sur lui-même pour se déplacer. Une base robotique appelée module interne et dite différentielle (plateforme munie de deux roues motrices indépendantes, de même axe) est placée dans une sphère (le corps du robot) qui sert de liaison au sol et permet le déplacement (figure 1). Le Sphero est commandé par un smartphone avec lequel l'utilisateur guide le robot.



Figure 1 Constitution du Sphero

Même si les consignes de l'utilisateur correspondent au comportement attendu du Sphero (cap et vitesse du corps sphérique), c'est en réalité le module interne que l'utilisateur commande grâce à son smartphone. Le principe de déplacement du Sphero peut être comparé à celui d'une roue de hamster : quand l'animal court à l'intérieur, il déplace le centre de gravité du système, ce qui fait tourner la roue. Ainsi, les deux roues motrices du module interne créent le roulement du corps sphérique du Sphero.

#### I.B – Manipulation et déplacement du robot Sphero

Pour commander le robot l'utilisateur dispose d'une application sur son smartphone (ou sa tablette). Une fois la connexion bluetooth établie entre le Sphero et le smartphone, l'utilisateur peut mettre en mouvement le robot grâce à une interface tactile (figure 2). L'utilisateur place son doigt au centre du cadran (sur le curseur ayant le sigle Sphero) puis le déplace dans le cadran. La position du doigt sur le cadran fournit une consigne de cap (par rapport à la marche avant) et de vitesse au robot : plus le doigt est éloigné du centre du cadran plus le robot va vite.

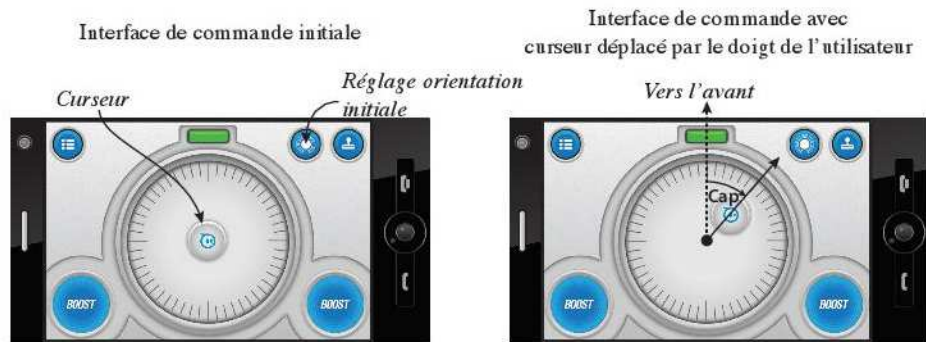


Figure 2 Interface homme-machine (IHM) de commande du Sphero

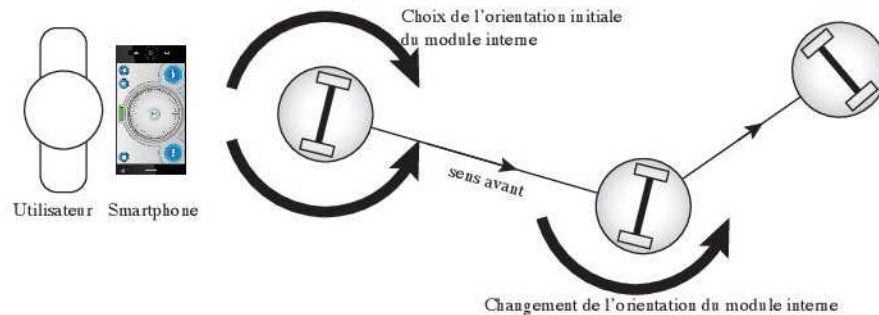


Figure 3 Déplacement du robot

Un exemple de déplacement du robot Sphero est décrit par la figure 3. Pour un cap donné le Sphero se déplace selon une trajectoire rectiligne. Lorsque le cap est changé par l'utilisateur, le module interne change son orientation autour d'un axe vertical de lacet et une nouvelle direction est ainsi imposée au Sphero. Ce dernier reprend un déplacement en ligne droite suivant le nouveau cap. Afin que l'utilisation du robot soit à la hauteur des attentes de l'utilisateur, le robot Sphero doit satisfaire les exigences définies figure 4.

## II Étude préliminaire et respect de l'exigence 2 de maniabilité

Cette partie préliminaire propose de mener une analyse comportementale du Sphero afin de mettre en évidence la problématique qui sera traitée dans ce sujet. Cette analyse permettra de définir l'objectif du sujet.

Un essai est réalisé avec le Sphero en mode non asservi. Les capteurs du robot ne sont pas utilisés pour la commande de ce dernier (figure 5).

La figure 5 montre la trajectoire suivie par le Sphero lors de l'essai. Le Sphero est en mode non asservi et connecté à un ordinateur (liaison sans fil). À l'écran de l'ordinateur est affiché un parcours délimité par deux lignes et l'utilisateur peut cliquer à l'écran pour imposer au Sphero une consigne de cap. Celle-ci correspond à la direction du vecteur ayant pour origine la position mesurée du Sphero au moment du clic et pour extrémité le point cliqué à l'écran. L'expérimentation est réalisée en intérieur et sans aucune perturbation pouvant altérer le fonctionnement du robot. La vitesse du robot est volontairement limitée à 50% de sa vitesse maximale afin de rendre la manipulation plus aisée pour l'utilisateur.

**Q1.** En considérant le Sphero comme parfaitement asservi aux consignes de clic de l'utilisateur, quel serait le nombre minimal de consignes de changement de cap nécessaire pour faire évoluer le robot selon la trajectoire théorique ? Pour chacune de ces consignes de changement de cap quelle est la valeur du cap imposé (à l'instant initial le cap est de 0 deg) ?

**Q2.** D'après l'expérimentation, l'exigence 2 de maniabilité est-elle respectée ? Justifier la réponse à partir du nombre d'actions de changement de cap réalisées par l'utilisateur lors de l'expérimentation. Au vu de l'essai analysé précédemment il apparaît que sans commande spécifique le robot Sphero n'atteint pas toutes les exigences attendues. Le comportement précédemment observé impose à l'utilisateur de compenser sans cesse les défauts de trajectoire du Sphero, ce qui rend ce dernier difficilement maniable et donc inutilisable. La suite du sujet vise à résoudre ce problème.

---

### Objectif

Évaluer les solutions techniques mises en jeu dans la conception du Sphero et déterminer une commande du Sphero permettant à ce robot d'atteindre les exigences de stabilité, de maniabilité et de respect des consignes de l'utilisateur.

---

Deux aspects de la commande du robot Sphero seront étudiés : la génération des consignes de cap et de vitesse envoyées au Sphero et le principe de commande de la chaîne d'énergie du Sphero.

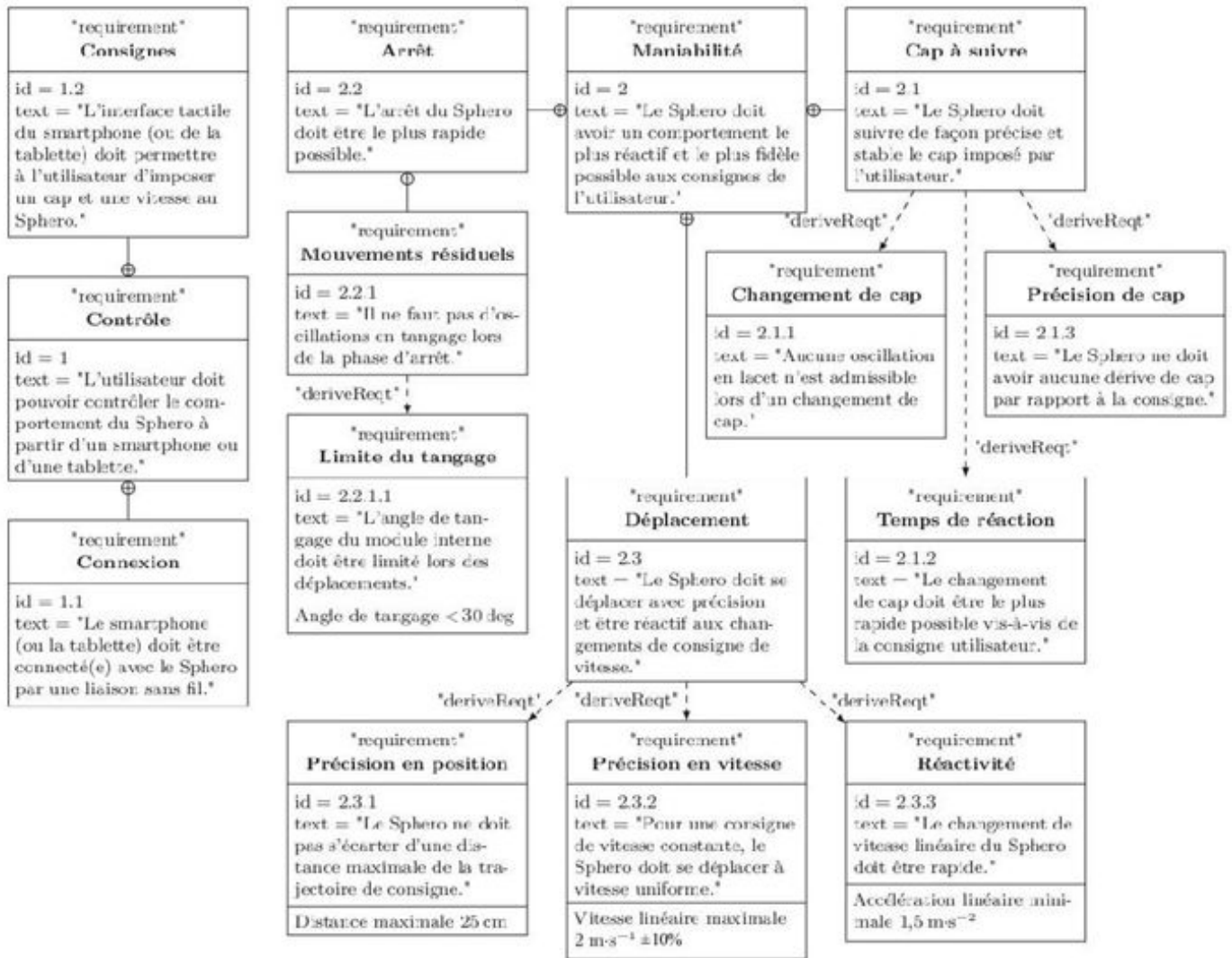


Figure 4 Diagramme des exigences du Sphero

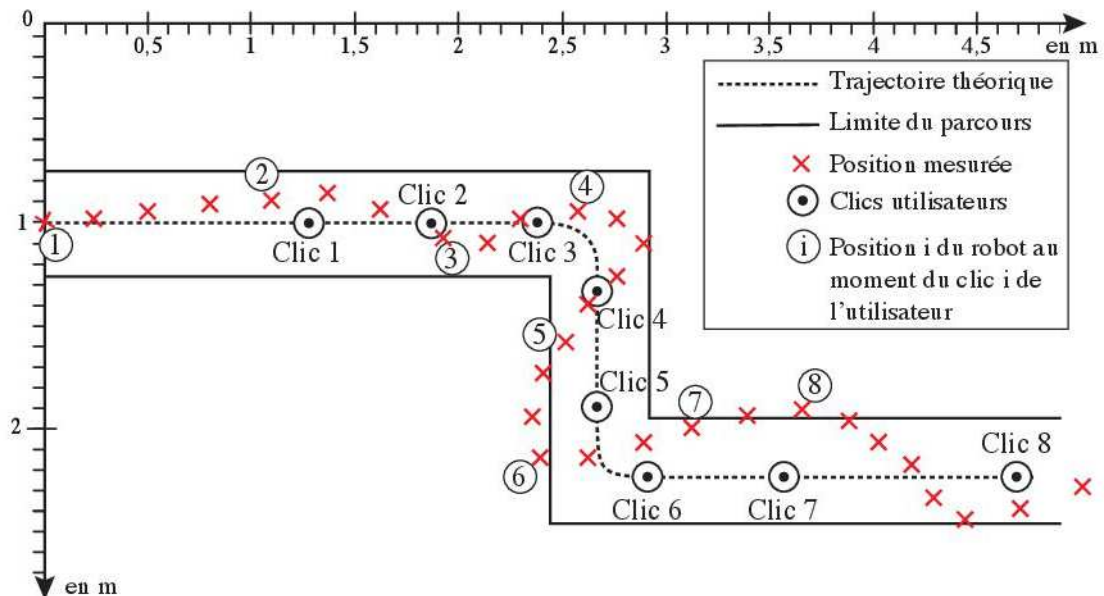


Figure 5 Trajectoire du Sphero

### III Interfaçage utilisateur / Sphero (exigence 1 de contrôle)

Une première approche de la commande du robot Sphero concerne la génération des consignes de cap et de vitesse à envoyer au robot.

Objectif

Concevoir un algorithme générant les consignes d'utilisation du Sphero (vitesse et cap) à partir de la manipulation de l'interface tactile.

#### III.A – Présentation de la technologie des écrans tactiles capacitifs

Dans les écrans tactiles capacitifs simples, la surface de l'écran est recouverte d'une couche conductrice protégée par une couche isolante (verre, plastique, etc.). Lorsqu'un objet conducteur (comme le doigt de l'utilisateur) touche la couche isolante, il crée une capacité à l'endroit du contact. Étant donné que la couche conductrice est résistante, l'impédance mesurée à chaque coin de l'écran est différente et la comparaison des mesures effectuées aux quatre coins permet de localiser le point de contact.

Les écrans tactiles capacitifs plus élaborés fonctionnent sur le même principe mais utilisent un réseau d'électrodes au lieu d'une couche conductrice continue, ce qui permet la détection de plusieurs points de contacts simultanés. Une unité de traitement récupère les mesures des capteurs et construit une matrice  $A$ , de mêmes dimensions que celles du réseau d'électrodes. La valeur d'un terme de  $A$  est d'autant plus élevée que l'électrode correspondante est plus proche d'un point de contact.

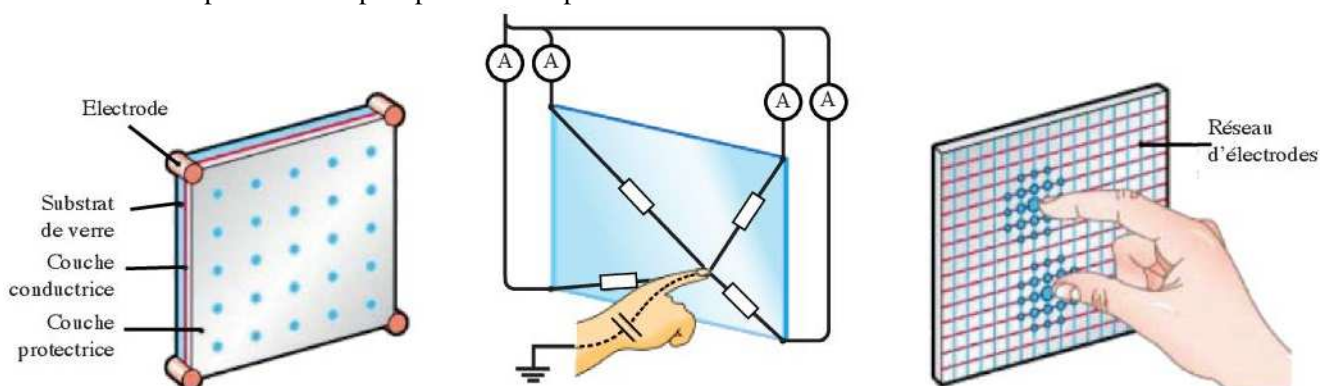


Figure 6 Principe d'une surface tactile capacitive

#### III.B – Interface graphique et respect de l'exigence 1

La zone de l'interface graphique utilisée pour guider le robot à partir d'un smartphone est présentée sur la figure 7. En faisant glisser le curseur à l'intérieur du cadran, l'utilisateur indique au Sphero une consigne de cap et de vitesse.

L'écran considéré a une taille de  $1334 \times 750$  pixels. On suppose que les pixels sont carrés et qu'à chaque pixel d'affichage est associé un point du réseau d'électrodes.

**Q3.** En déduire la largeur et la hauteur de l'écran en cm sachant que sa diagonale est de 4,7 pouces (11,938 cm).

**Q4.** En déduire la taille en cm d'un pixel.

**Q5.** Calculer, en pixels, les dimensions de la surface de contact d'un doigt sachant qu'elle correspond approximativement à un carré d'une surface de  $0,25 \text{ cm}^2$  (arrondir au pixel supérieur).

**Q6.** Le curseur circulaire de l'interface graphique, qui doit être supérieur à la surface de contact d'un doigt est contenu dans un carré de largeur 85 pixels. Le choix du curseur est-il compatible avec le contrôle du Sphero par l'utilisateur ?

Dans le programme Python de contrôle du Sphero à partir de l'interface tactile, la détection du doigt sur l'écran est gérée par trois fonctions :

- `Get_A()` renvoie la matrice  $A$  qui indique les points de contact sur l'écran tactile (voir section III.A) ;
- `On_cursor(A)` renvoie `True` si le doigt de l'utilisateur est posé sur le curseur ;
- `On_dial(A)` renvoie `True` si le doigt de l'utilisateur est à l'intérieur du cadran.



### III.C – Consignes utilisateur

Les consignes de cap à suivre et de vitesse sont élaborées à partir de la position du curseur (et donc du doigt) sur le cadran. La figure 7 montre le repérage du curseur dans le cadran. Le repère  $(O_e, \vec{x}_e, \vec{y}_e)$  est lié à l'écran (avec  $O_e$  correspondant au bord supérieur gauche) et le point  $O_c$  est au centre de l'écran et du cadran. À l'état initial le curseur se trouve au point  $O_c$ .

La matrice  $A$  possède 750 lignes et 1334 colonnes.  $(0,0)$  sont les coordonnées du point  $O_e$ , et les indices des termes de la matrice  $A$  correspondent aux coordonnées des pixels dans le repère  $(O_e, \vec{x}_e, \vec{y}_e)$ .

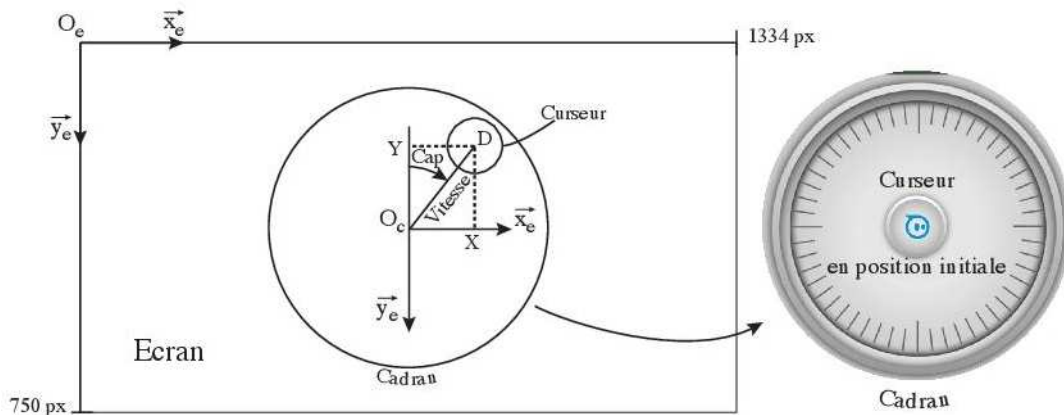


Figure 7 Paramétrage de l'interface tactile

Lors de la manipulation du curseur, son centre (noté  $D$ ) est confondu avec le centre de la surface de contact du doigt avec l'écran. Ses coordonnées en pixels dans le repère  $(O_c, \vec{x}_e, \vec{y}_e)$  sont notées  $(X, Y)$ . La fonction  $\text{Get\_XY}(A)$ , qui prend la matrice  $A$  en paramètre, renvoie un couple d'entiers correspondant aux coordonnées  $(j_D, i_D)$  de  $D$  dans le repère  $(O_e, \vec{x}_e, \vec{y}_e)$ , exprimées en pixels.

**Q7.** Donner l'expression de  $X$  et  $Y$  en fonction des coordonnées  $(j_D, i_D)$ .

L'interface tactile permet de fournir les consignes de cap et de vitesse au Sphero. La consigne de cap est une consigne en degrés et celle de vitesse est une consigne en pourcentage (0% pour l'arrêt et 100% pour la vitesse maximale) qui correspond à l'éloignement du curseur par rapport au centre du cadran ; elle vaut 100% quand la distance  $O_cD$  est de 305 pixels. Quant à la consigne de cap, elle est fournie par l'angle  $(-\vec{y}_e, \widehat{O_eD})$  exprimé en degrés dans l'intervalle  $[0,360[$ .

**Q8.** Écrire en langage Python la fonction  $\text{Get\_CV}(X, Y)$  qui prend en paramètre deux entiers correspondant à la position du curseur en pixels par rapport au centre du cadran et renvoie un couple de flottants  $(C, V)$  correspondant aux consignes de cap et de vitesse correspondantes. Cette fonction renvoie  $(\text{None}, \text{None})$  si le point  $(X, Y)$  n'est pas à l'intérieur du cadran.

On suppose pour cela que la bibliothèque « math » est entièrement importée. On rappelle quelques fonctions de cette bibliothèque : Constante pi :  $\pi$  ; Fonction racine carrée :  $\text{sqrt}$  ; Fonctions cosinus et sinus :  $\text{cos}$  et  $\text{sin}$  ; Fonctions arc-cosinus et arc-sinus :  $\text{acos}$  et  $\text{asin}$  (angles en radians).

## IV Architecture détaillée du robot Sphero

La génération des consignes de cap et de vitesse ainsi que l'interfaçage support tactile/Sphero étant définis par l'étude menée précédemment, il convient de s'intéresser à l'architecture détaillée du robot et à ses performances. Ces dernières devant être en accord avec les exigences attendues, il est nécessaire d'évaluer les capacités du robot afin de déterminer la nécessité ou non d'une commande spécifique.

La composition du robot est fournie par le diagramme de définition des blocs figure 8 de la page suivante.

L'avance et l'orientation du robot sont créées par le module interne qui possède deux blocs de motorisation identiques et indépendants (comprenant chacun en particulier une roue motrice et un moteur). Le module interne est également équipé d'une centrale inertielle composée d'un magnétomètre (mesure du champ magnétique terrestre), d'un accéléromètre numérique (qui calcule les déplacements selon trois axes par double intégration des accélérations mesurées) ainsi que d'un gyromètre (mesure des vitesses de rotation en  $\text{deg.s}^{-1}$  autour de trois axes) permettant d'acquérir les informations décrites par la figure 9 de la page suivante.

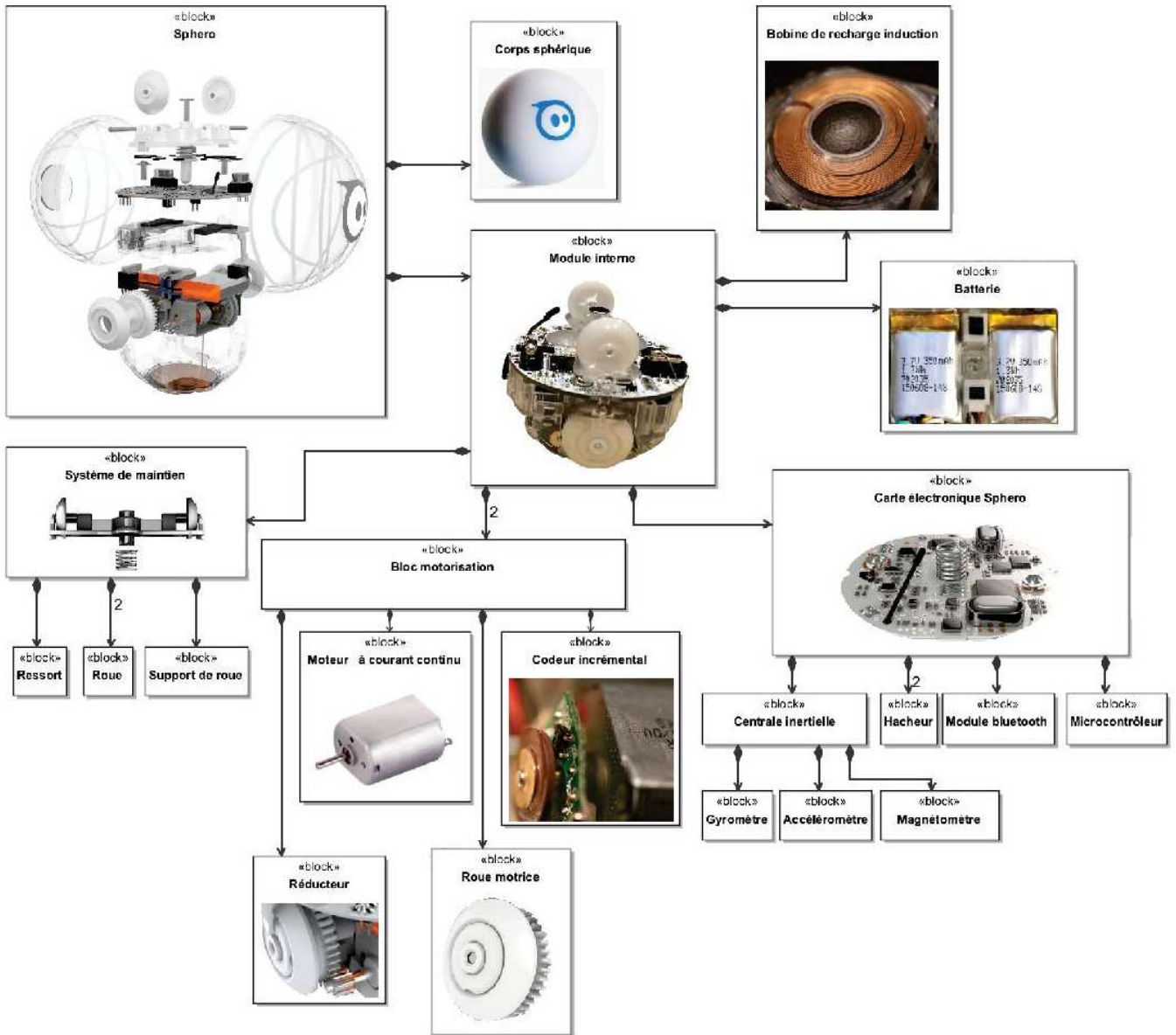


Figure 8 Diagramme de définition des blocs du Sphero

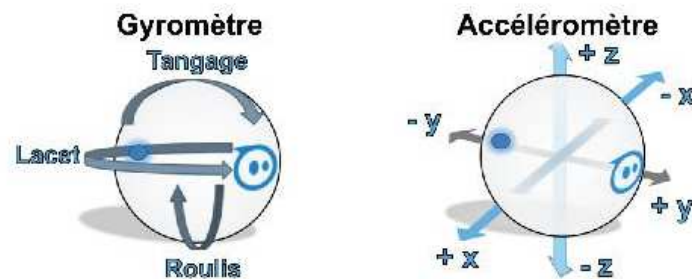


Figure 9 Illustration des informations acquises par la centrale inertielle

**Q9.** Compléter sur la figure A du document réponse la description chaîne d'information / chaîne d'énergie du robot Sphero.

# V Déplacement et réglage de cap du robot Sphero

Le robot est équipé de deux actionneurs (moteurs électriques à courant continu) indépendants. Il est de fait nécessaire de mettre en évidence le lien entre le comportement du robot Sphero et celui des actionneurs.

## Objectif

Mettre en évidence la relation entre les actionneurs et le comportement du Sphero, afin de déterminer la façon dont les actionneurs doivent être commandés.

### V.A – Modélisation et paramétrage

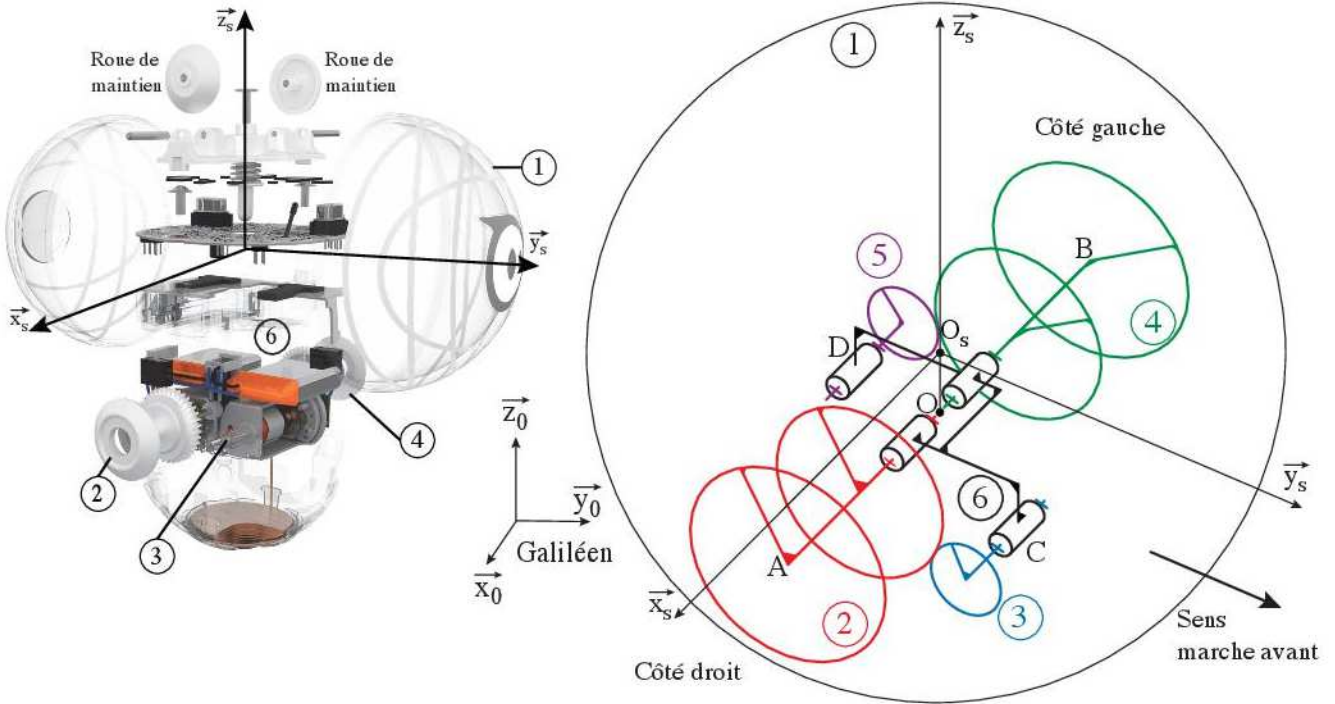


Figure 10 Schéma cinématique 3D du Sphero (sans le système de maintien)

1 désigne le corps sphérique du robot, 2 la roue motrice droite, 3 l'arbre moteur denté droit, 4 la roue motrice gauche, 5 l'arbre moteur denté gauche et 6 le châssis du module interne. Par la suite la désignation « **module interne** » correspond à l'ensemble {2+3+4+5+6}.

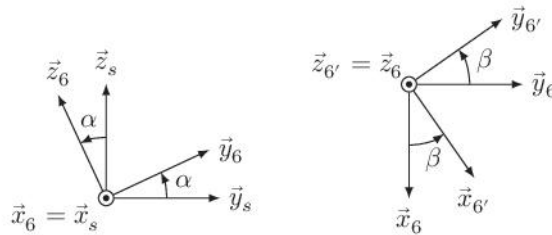


Figure 11 Définition des repères  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_{6'}$

Le repère  $\mathcal{R}_S$  ( $O_S; \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S$ ) accompagne le robot Sphero et est tel que  $\vec{z}_S = \vec{z}_0$  à chaque instant du mouvement, avec  $\vec{z}_0$  la verticale du lieu et  $\vec{y}_S$  dans la direction d'avance du robot. Le point  $O_S$  correspond au centre du corps sphérique du robot.

Le châssis du module interne possède une mobilité en lacet et une en tangage par rapport au corps du Sphero. Le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière.

Le repère  $\mathcal{R}_6$  ( $O_6; \vec{x}_6 = \vec{x}_S, \vec{y}_6, \vec{z}_6$ ) se déduit du repère  $\mathcal{R}_S$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe ( $O, \vec{x}_S$ ). Cet angle  $\alpha$  définit l'angle de tangage du châssis du module interne par rapport au repère  $\mathcal{R}_S$ .

Le repère  $\mathcal{R}_{6'}$  ( $O_6; \vec{x}_{6'}, \vec{y}_{6'}, \vec{z}_{6'} = \vec{z}_6$ ) lié au châssis du module interne se déduit du repère  $\mathcal{R}_6$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe ( $O, \vec{z}_6$ ). Cet angle  $\beta$  définit l'angle de lacet du châssis du module interne par rapport au repère  $\mathcal{R}_S$ .

La figure 12 propose un schéma cinématique du Sphero projeté dans le plan ( $O; \vec{y}_S, \vec{z}_S$ ) ainsi que dans le plan ( $O; \vec{x}_S, \vec{y}_S$ ) (le système de maintien n'est pas pris en compte).



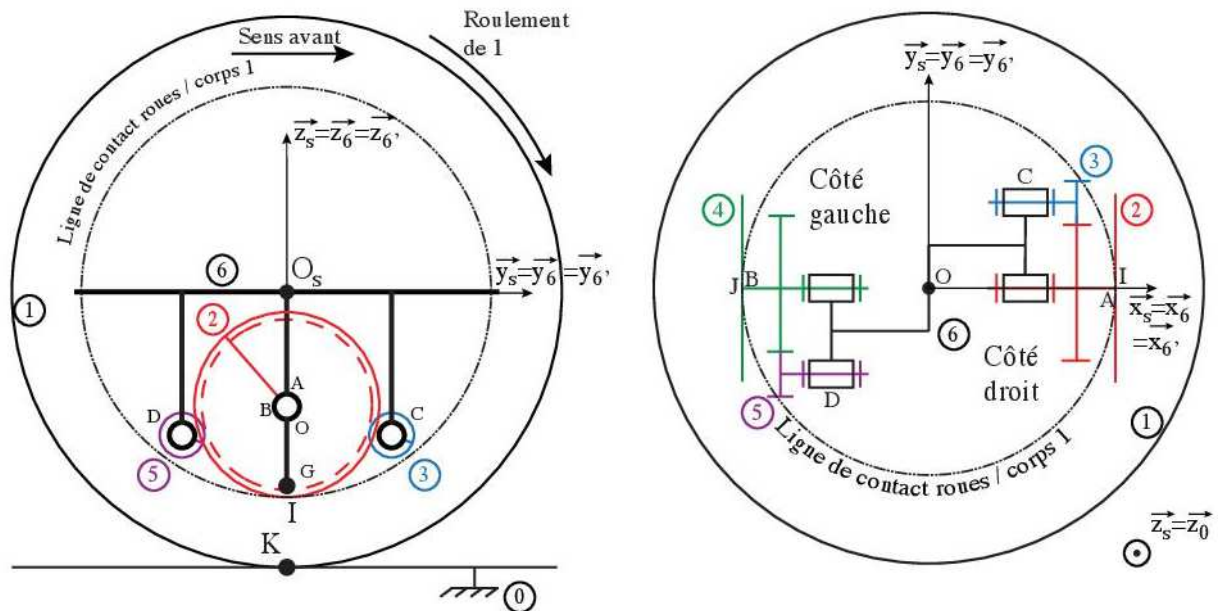


Figure 12 Schémas cinématiques du Sphero vu de côté et de dessus avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

Le graphe des liaisons du robot Sphero (sans le système de maintien) est présenté figure 13.

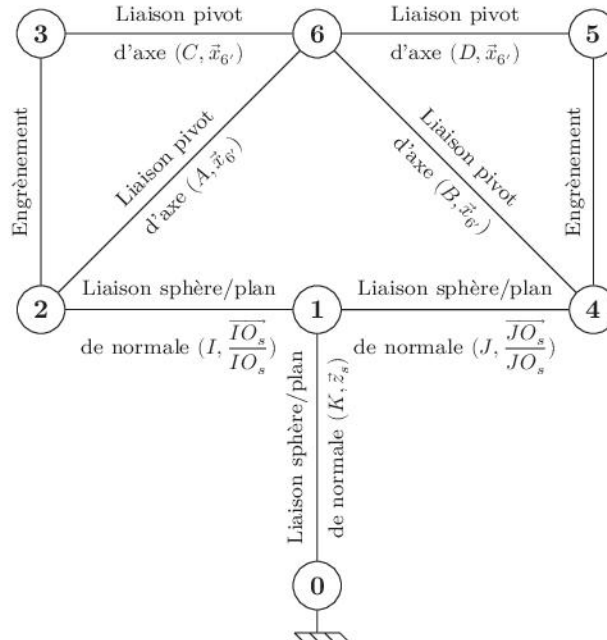


Figure 13 Graphe des liaisons du Sphero

### Hypothèses

L'hypothèse de roulement sans glissement sera adoptée au point  $I$  (point de contact 2/1), au point  $J$  (point de contact 4/1) et au point  $K$  (point de contact 1/0).

### Modèles cinématiques

— Les torseurs cinématiques sont notés :  $\{\mathcal{V}_{Si/Sj}\} = \begin{Bmatrix} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix} X, \mathcal{B}_6'$

— Du fait de l'hypothèse de roulement sans glissement au point  $I$ , le torseur cinématique de la liaison 2/1 s'écrit

$$\text{en } I \text{ et dans la base } \mathcal{B}_6' \text{ (} \vec{x}_6', \vec{y}_6', \vec{z}_6' \text{)} : \{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{Bmatrix} I, \mathcal{B}_6'$$

$$\text{Pour les mêmes raisons : } \{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{Bmatrix} J, \mathcal{B}_6'$$

— Le roulis du module interne par rapport au corps sphérique étant interdit par la forme de roues et leur matière, le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$  en  $O_S$  est de la forme  $\{\mathcal{V}_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O_S, \mathcal{B}_6}$

$p_{61}$  correspond au taux de rotation en tangage du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero, et  $r_{61}$  correspond au taux de rotation en lacet du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero.

— Les autres liaisons mécaniques ont aussi leur torseur cinématique défini dans la base  $\mathcal{B}_6$ .

### Données

—  $\overrightarrow{IA} = R \cdot \overrightarrow{z_6'}$  avec  $R = 8$  mm rayon de la roue motrice 2 ;

—  $\overrightarrow{O_S A} = L \cdot \overrightarrow{x_6'} - H \cdot \overrightarrow{z_6'}$  et :  $\overrightarrow{O_S B} = -L \cdot \overrightarrow{x_6'} - H \cdot \overrightarrow{z_6'}$  Avec :  $H = 12$  mm et  $L = 11,5$  mm

—  $\overrightarrow{O_S K} = -R_S \cdot \overrightarrow{z_S}$  avec  $R_S = 37$  mm rayon du corps sphérique 1 ;

— le rapport de réduction entre 2 et 3 (et entre 4 et 5) est noté  $k$  avec  $k = 0,21 = -\frac{p_{26}}{p_{36}} = -\frac{p_{46}}{p_{56}}$

En exploitant la fermeture cinématique 2-6-4-1 il est possible d'écrire que :  $r_{21} = r_{41} = k \cdot \frac{R}{2 \cdot L} \cdot (p_{36} - p_{56})$  avec  $p_{36}$  le taux de rotation du moteur droit et  $p_{56}$  celui du moteur gauche.

**Q10.** Écrire au point A, les torseurs cinématiques suivants :  $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$ ,  $\{\mathcal{V}_{6/2}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{1/2}\}$

**Q11.** Par composition des mouvements faisant intervenir les solides 1, 2 et 6, montrer que l'on peut écrire la relation suivante :  $R \cdot p_{26} + (R+H) \cdot p_{61} + L \cdot r_{21} = 0$

**Q12.** Montrer que l'expression de  $p_{61}$  est de la forme  $p_{61} = \mu \cdot (p_{36} + p_{56})$  avec  $\mu$  à déterminer.

**Q13.** Montrer que l'expression de  $r_{61}$  est de la forme  $r_{61} = \lambda \cdot (p_{36} - p_{56})$  avec  $\lambda$  à déterminer.

Pour la suite on considère que  $\mu = 0,042$  et  $\lambda = 0,073$ .

D'autre part on suppose que l'on est en régime établi (accélération constante et module interne ne présentant pas d'oscillations par rapport au sol, et donc que l'angle  $\alpha$  est constant :  $\dot{\alpha} = p_{60} = \overrightarrow{\Omega}_{6/0} \cdot \overrightarrow{x_6'} = 0$

A l'instant où on étudie le mouvement on pose  $\beta = 0$ .

Au point K de contact entre le corps 1 et le sol noté 0 il y a roulement sans glissement et donc le torseur

cinématique de la liaison 1/0 s'écrit en K et dans la base  $\mathcal{B}_S$  ( $\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S}$ ) :  $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{K, \mathcal{B}_S}$

**Q14.** Lorsque le robot avance à la vitesse  $v$ , on a la vitesse du centre de la sphère :  $\overrightarrow{V}_{O_S \in 1/0} = v \cdot \overrightarrow{y_S}$ . En déduire la relation entre la vitesse  $v$ ,  $R_S$  et  $p_{10}$ .

**Q15.** Justifier que :  $p_{61} = -p_{10}$ .

**Q16.** En déduire la relation existant entre la vitesse  $v$  du robot ( $\overrightarrow{V}_{O_S \in 1/0} = v \cdot \overrightarrow{y_S}$ ) et les vitesses de rotation des moteurs :  $p_{36}$  et  $p_{56}$ .

Le changement de cap du robot est imposé par celui du module interne. Si le module interne est incliné en tangage d'un angle  $\alpha$  on a alors la vitesse de changement de cap :  $\omega_{\text{cap}} = \overrightarrow{\Omega}_{6/0} \cdot \overrightarrow{z_S} = r_{61} \cdot \cos \alpha$ .

**Q17.** Déterminer la relation existant entre la vitesse de changement de cap du robot  $\omega_{\text{cap}}$  et les vitesses de rotation des moteurs :  $p_{36}$  et  $p_{56}$ .

**Q18.** En déduire les expressions des vitesses de rotation des roues du robot  $p_{36}$  et  $p_{56}$ . En fonction de la vitesse du robot :  $v$  et sa vitesse de changement de cap  $\omega_{\text{cap}}$ .

**Q19.** Les deux moteurs du robot ont une fréquence de rotation maximale de 6 500 tr/min. En déduire la vitesse maximale du robot en ligne droite (pour  $\omega_{\text{cap}} = 0$ ).

**Q20.** Si le moteur de la roue droite tourne à sa fréquence maximale de rotation : 6 500 tr/min et que la vitesse de changement de cap est de  $\omega_{\text{cap}} = 60 \text{ deg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Quelles est (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) la vitesse de rotation du moteur de la roue gauche :  $p_{56}$ . On supposera pour cela que la vitesse linéaire du robot est constante et donc que  $\alpha = 0$ .

**Q21.** En déduire la vitesse maximale du robot lorsqu'il change de cap à la vitesse de  $60 \text{ deg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q22.** L'exigence Id. 2.3.2 du cahier des charges est-elle respectée ? Justifier votre réponse.

Maintenant que la manière avec laquelle les moteurs doivent être pilotés est connue et que ces derniers semblent cinématiquement bien dimensionnés, il reste à évaluer les performances dynamiques du robot en tangage.

## VI Comportement en tangage du Sphero (exigences 2.2.1 et 2.2.1.1)

Les choix technologiques de conception du robot Sphero ont été réalisés afin que « naturellement » le robot n'ait pas d'oscillations en tangage à l'arrêt et que le tangage du module interne soit à angle constant lors des phases de mouvement à vitesse uniforme.

### Objectif

Vérifier que la structure mécanique du robot permet le respect de la contrainte sur le tangage du module interne.

### VI.A – Analyse de l'agencement mécanique du robot

La figure 14 représente le robot Sphero à l'arrêt vu de côté et de dessus. Le robot a été conçu de façon à ce que les éléments principaux du module interne soient disposés symétriquement par rapport à l'axe  $(O_s; \vec{z}_6)$ . Quant à la carte électronique, son centre de gravité est confondu avec le centre  $O_s$ .

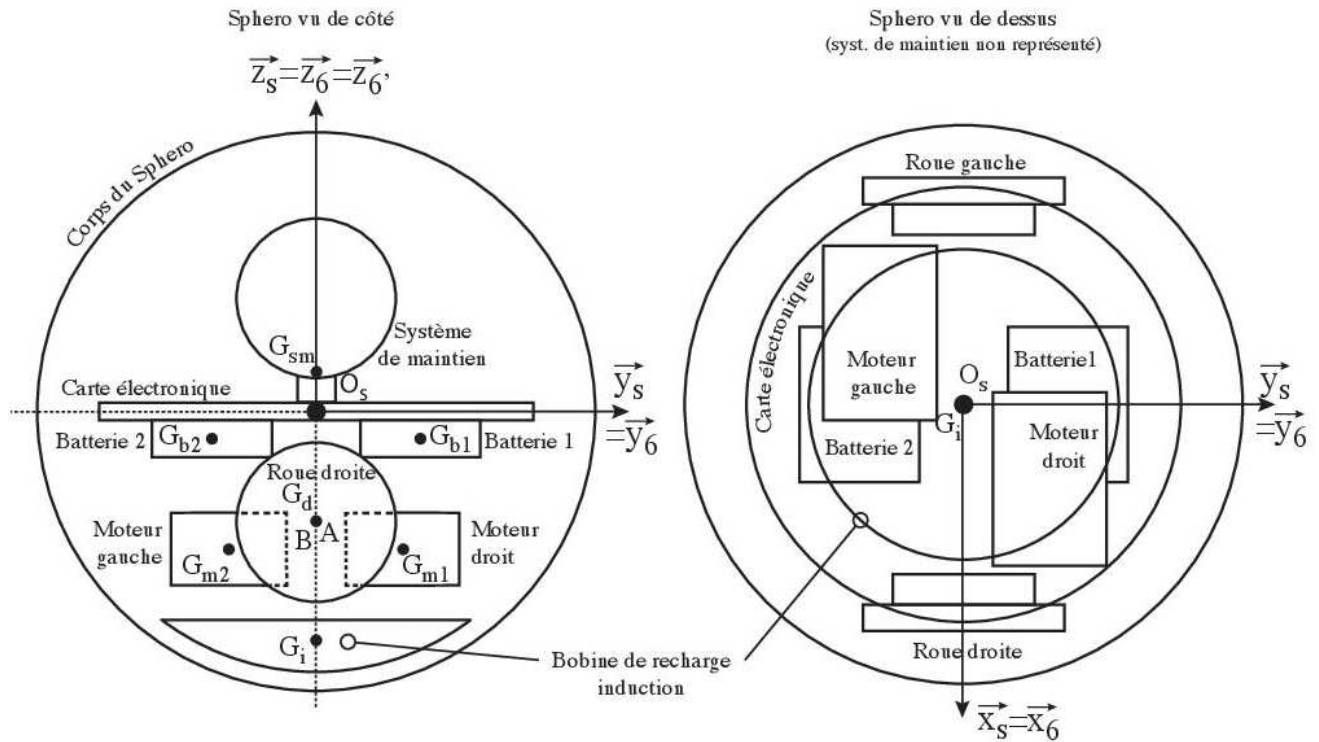


Figure 14 Robot Sphero représenté à l'arrêt de profil et vu de dessus  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$

$G_i$  est le centre de gravité de la bobine de recharge par induction,  $G_{m1}$  celui du moteur droit,  $G_{m2}$  celui du moteur gauche,  $G_{b1}$  celui de la batterie 1,  $G_{b2}$  celui de la batterie 2,  $A$  celui de la roue droite,  $B$  celui de la roue gauche et  $G_{sm}$  celui du système de maintien. Ces points sont définis par :

- $O_s \vec{G}_{b1} \cdot \vec{z}_6 = O_s \vec{G}_{b2} \cdot \vec{z}_6 = -h_b$
- $O_s \vec{G}_{m1} \cdot \vec{z}_6 = O_s \vec{G}_{m2} \cdot \vec{z}_6 = -h_m$
- $O_s \vec{A} \cdot \vec{z}_6 = O_s \vec{B} \cdot \vec{z}_6 = -h_r$
- $O_s \vec{G}_{sm} \cdot \vec{z}_6 = h_m$
- $O_s \vec{G}_i \cdot \vec{z}_6 = -h_i$

La masse totale du module interne est  $M = 115$  g. Les masses des différents composants sont fournies tableau 1.

Désignation	Position	Masse
Carte électronique	en $O_s$	$m_c = 12$ g
Batterie 1	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Batterie 2	$h_b = 9$ mm	$m_b = 7$ g
Bobine de recharge	$h_i = 35$ mm	$m_i = 27$ g
Système de maintien	$h_s = 9$ mm	$m_s = 8$ g

Désignation	Position	Masse
Roue droite	$h_r = 12$ mm	$m_r = 1$ g
Roue gauche	$h_r = 12$ mm	$m_r = 1$ g
Moteur droit	$h_m = 15$ mm	$m = 26$ g
Moteur gauche	$h_m = 15$ mm	$m = 26$ g

Tableau 1 Masses et positions des composants

**Q23.** Quel est l'intérêt de la disposition symétrique par rapport à l'axe  $(O_s; \vec{z}_6')$ , des éléments principaux du module interne, sur la position du centre d'inertie du module interne ?

**Q24.** La position du centre de gravité G du module interne étant définie par  $\vec{O}_s\vec{G} = x_g \cdot \vec{x}_6' + y_g \cdot \vec{y}_6' + z_g \cdot \vec{z}_6'$  déterminer  $x_g, y_g$  et  $z_g$  en fonction des paramètres dimensionnels du robot. Faire les applications numériques.

### VI.B – Comportement en tangage du module interne

Même si la structure du robot semble en cohérence avec les exigences à atteindre, il reste encore à analyser le comportement en tangage du module interne lors de l'avance du robot.

Il faut que lors d'un mouvement d'avance rectiligne et pour l'accélération minimale préconisée du robot Sphero, l'angle de tangage du module interne soit constant et n'excède pas 30 deg (exigence 2.2.1.1.). Au delà de cette valeur, les oscillations en tangage du Sphero lors de son arrêt seront d'amplitude trop grande et leur nombre trop important. De plus, sur un sol dur et non parfait (tel que du béton), ces oscillations couplées aux défauts du sol peuvent induire des petites oscillations en lacet qui ont pour conséquence un changement d'orientation du robot. De fait, avant tout nouveau démarrage, l'utilisateur serait contraint de régler de nouveau le cap s'il voulait que le robot reprenne celui initialement suivi.

Pour ce qui suit  $\beta = \beta = 0$  (pas de lacet) et donc les repères  $\mathcal{R}_6$  et  $\mathcal{R}_6'$  sont confondus. La liaison corps 1/sol est une liaison sphère/plan de centre K et de normale  $\vec{z}_s$  avec frottement (adhérence).

On rappelle  $\vec{O}_s\vec{K} = -R_s \cdot \vec{z}_s$  avec  $R_s = 37$  mm.

Expression du torseur mécanique de l'action du sol sur le corps 1 :

$$\{\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} T_{01} \cdot \vec{y}_s + N_{01} \cdot \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K \quad \text{avec : } N_{01} > 0 \text{ et } T_{01} > 0$$

L'accélération constante minimale préconisée du Sphéro s'écrit :  $\vec{a}_{O_s \in 6/0} = a \cdot \vec{y}_s$  avec  $a = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$

On néglige les masses des solides 1, 2, 3, 4, 5 au regard de la masse du châssis du module interne 6.

La masse de l'ensemble des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6} est :  $M = 115$  g, et le centre de gravité de cet ensemble est G avec :  $\vec{O}_s\vec{G} = z_g \cdot \vec{z}_6'$  et  $z_g = -16$  mm.

L'angle de tangage,  $\alpha$ , du châssis du module interne est défini est défini sur la figure 15 ci-contre.

On considère un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré du châssis du module interne du Sphero et donc un angle  $\alpha$  de tangage du châssis du module interne constant.

Le système isolé est l'ensemble du Sphero constitué des solides {1, 2, 3, 4, 5, 6},

**Q25.** Après avoir précisé le ou les théorème(s) utilisé(s), déterminer l'accélération a en fonction de l'angle de tangage  $\alpha$  de  $z_g$  de  $R_s$  et de l'accélération gravitationnelle g :  $a(\alpha, z_g, R_s, g)$

**Q26.** En admettant que la fonction  $a(\alpha, z_g, R_s, g)$  est croissante en  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0 \text{ deg}, 40 \text{ deg}]$ , conclure au regard de l'exigence 2.2.1.1.

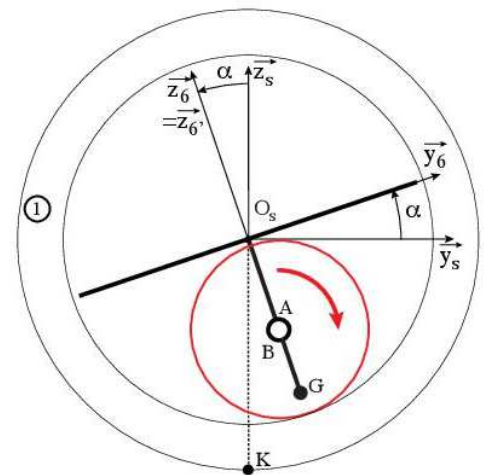


Figure 15 Vue de profil du Sphero avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$

### VI.C – Conclusion sur l'étude menée

L'étude précédemment menée a permis de mettre en évidence les conséquences des choix de conception du robot sur son comportement. Ainsi, il est permis de conclure que la structure du robot induit une commande du comportement du Sphéro plus simple puisque la gestion du comportement en tangage n'est pas à réaliser. Il reste maintenant à vérifier les performances du robot d'un point de vue du cap à suivre. Si la commande de cap est défaillante alors la maniabilité du robot ne sera pas à la hauteur des attentes de l'utilisateur.



## VII Performances en changement de cap du Sphero (exigence 2.1 de suivi de cap)

### Objectif

Déterminer la loi de commande en lacet du module interne qui permettra le respect des exigences de cap lors de l'utilisation du Sphero (exigences 2.1, 2.1.1 et 2.1.2).

Lors d'un réglage de cap le module interne admet un mouvement de lacet d'angle  $\beta$  (voir figure 16). Le cap du robot Sphero est imposé par celui du module interne.

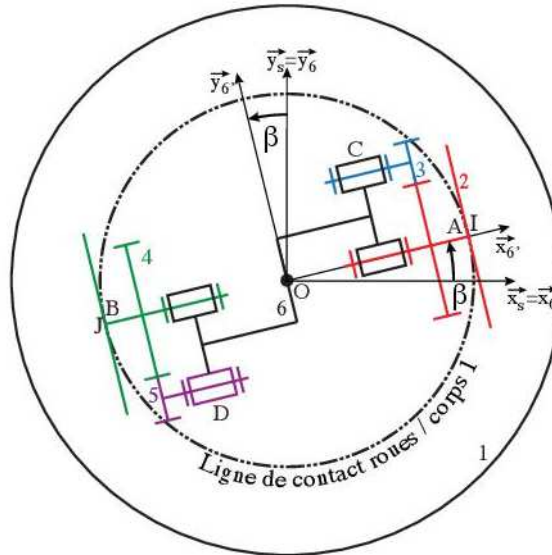


Figure 16 Schéma cinématique plan du Sphero vu de dessus avec  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$

Lors de la rotation du module interne autour de l'axe  $(O, z_6')$  aucun mouvement de lacet du corps sphérique 1 n'est induit. Ceci est rendu possible du fait de l'action combinée des deux moteurs associée à la résistance au roulement au niveau du contact Sphero/sol.

L'étude proposée dans cette partie est réalisée robot à l'arrêt. Si les performances en lacet du module sont satisfaisantes dans ces conditions, elles le seront également en mouvement car le fait que le robot avance n'induit pas de perturbations sur le lacet du module interne.

Lors du réglage de cap, le mouvement du module interne est un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z}_6)$ , le corps 1 étant considéré immobile  $\vec{z}_6' = \vec{z}_6$

Les moteurs devant avoir le même taux de rotation, la notation suivante est adoptée :  $p_{36} = -p_{56} = \omega_m(t)$ .

Afin que les exigences 2.1, 2.1.1 et 2.1.2 soient vérifiées par le robot, les performances données tableau 2 doivent être atteintes.

Performance	Critère	Niveau
Précision angulaire	Erreur en position en régime permanent	Nulle pour une entrée en échelon
Rapidité	Temps de réponse à 5%	$tr_{5\%} \leq 0,3 \text{ s}$
Stabilité	Dépassement	aucun

Tableau 2

### VII.A – Commande en lacet du module interne

La loi entrée-sortie de la transmission mécanique étant connue, l'objectif est maintenant d'évaluer les performances de la commande en lacet du module interne. Dans un premier temps la commande étudiée sera sans correction afin de mettre en évidence les performances intrinsèques liées au choix de l'architecture de commande.

La commande en lacet du module interne est décrite figure 17.

La commande des motorisations se fait directement par l'acquisition de la vitesse de tangage  $r_{61}(t)$  du module interne et par une tension de consigne  $u_c(t)$ . Cette tension  $u_c(t)$  est générée par un correcteur à partir de la différence entre l'orientation de consigne  $\beta_c(t)$  du module interne et son orientation réelle  $\beta(t)$  (information fournie par la centrale inertielle).

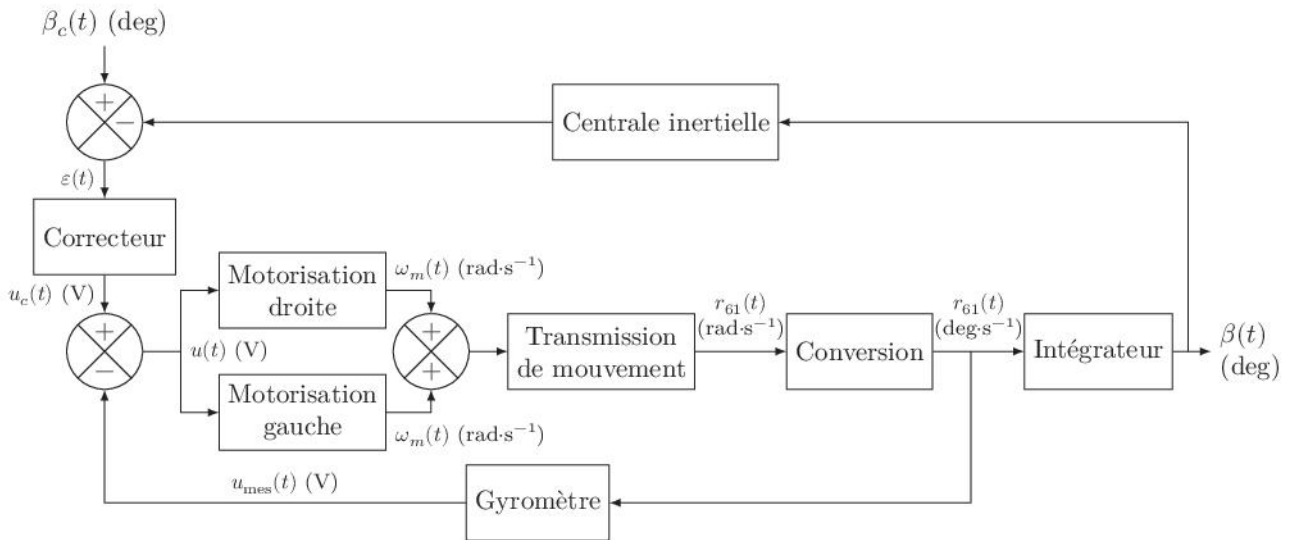


Figure 17 Schéma fonctionnel de l'asservissement en lacet

Données

- la centrale inertielle est modélisée par un gain unité ;
- la fonction de transfert du correcteur est notée  $C(p)$  ;
- la sensibilité du gyromètre est de  $K_g = 0,028 \text{ V.s.deg}^{-1}$  ;
- les blocs motorisation ont la même fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$ . Le bloc motorisation modélise l'ensemble hacheur + moteur ;
- $r_{61} = 2 \cdot \lambda \cdot \omega_m(t)$  avec :  $\lambda = 0,073$

La figure 18 représente la réponse indicielle du moteur droit pour un essai avec un échelon d'entrée  $u(t) = 1 \text{ V}$ . Le bloc gauche possède la même réponse.

Q27. Déduire de l'essai les valeurs numériques de  $K_m$  et  $\tau_m$ .

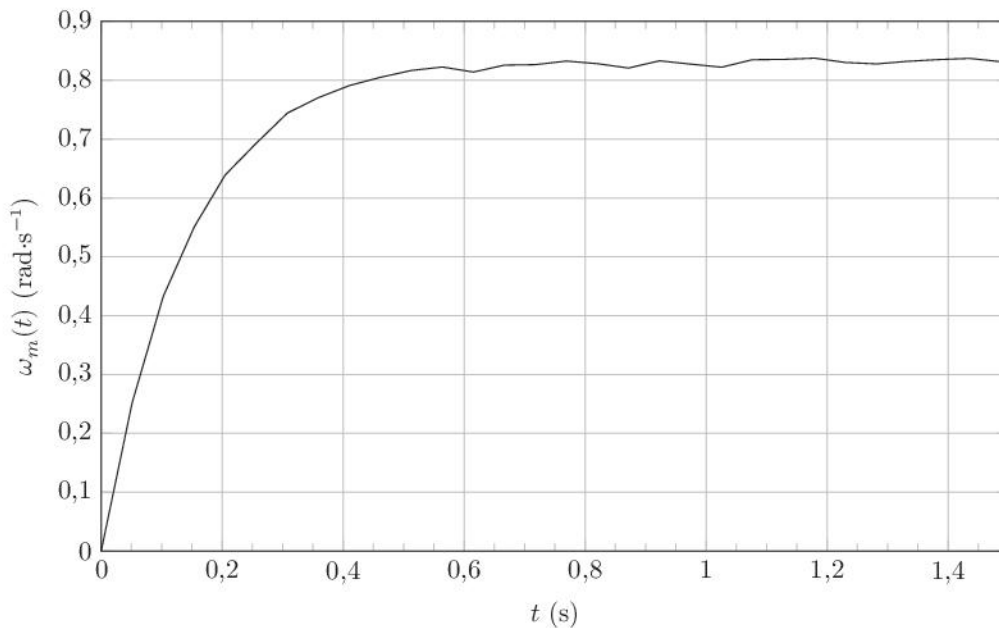


Figure 18 Réponse indicielle du moteur droit

Q 28. En se plaçant dans le domaine de Laplace, compléter sur la figure B du document réponse le schéma blocs de l'asservissement de l'angle de lacet du module interne.

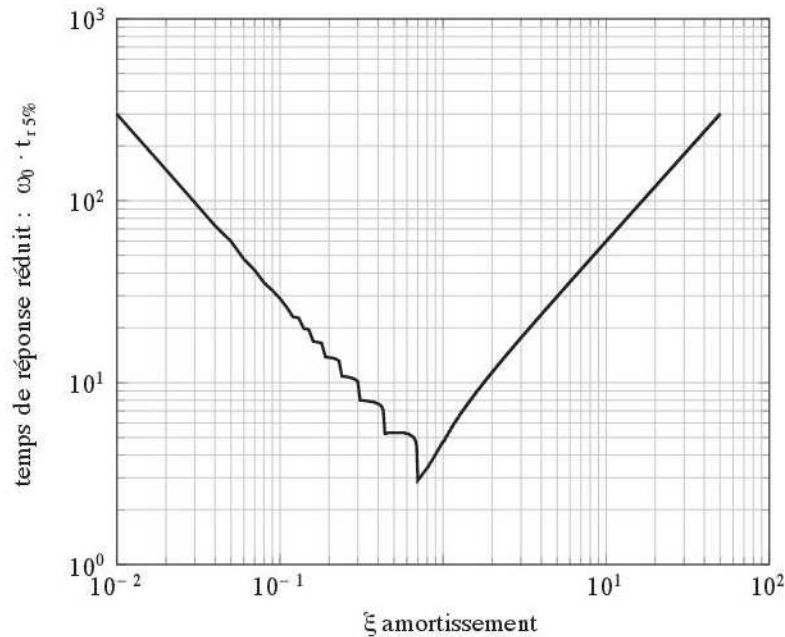
Dans cette première étude de la commande, il n'y a pas de correction :  $C(p) = 1$ .

Q 29. Déterminer l'expression sous forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)}$ .

Pour la suite la forme numérique de  $H(p)$  est  $H(p) = \frac{1}{1 + b \cdot p + a \cdot p^2}$  avec :  $a = 0,019 \text{ s}^2$  et  $b = 0,17 \text{ s}$

**Q 30.** En utilisant l'abaque de la figure 19 fournissant la valeur de  $tr_{5\%} \cdot \omega_0$  en fonction de  $\xi$ , déterminer le temps de réponse à 5% du système de commande en lacet.

**Q 31.** D'après les questions précédemment traitées, les performances requises pour l'asservissement sont-elles atteintes ? Justifier les réponses apportées.



**Figure 19** Abaque des temps de réponse

Il apparaît que certaines performances de la commande en lacet sans correction sont à améliorer. L'utilisation d'un correcteur est nécessaire à l'optimisation du comportement en lacet précédemment mis en évidence.

### **VII.B – Optimisation de la commande en lacet**

Afin que la commande permette le respect des critères de performance attendus, un correcteur à avance de phase de fonction de transfert :  $C(p) = K_C \cdot \frac{1 + b.p}{1 + a.p}$  avec :  $a = 0,01$  s et  $b = 0,12$  s est implanté dans la chaîne de commande en lacet du Sphero.

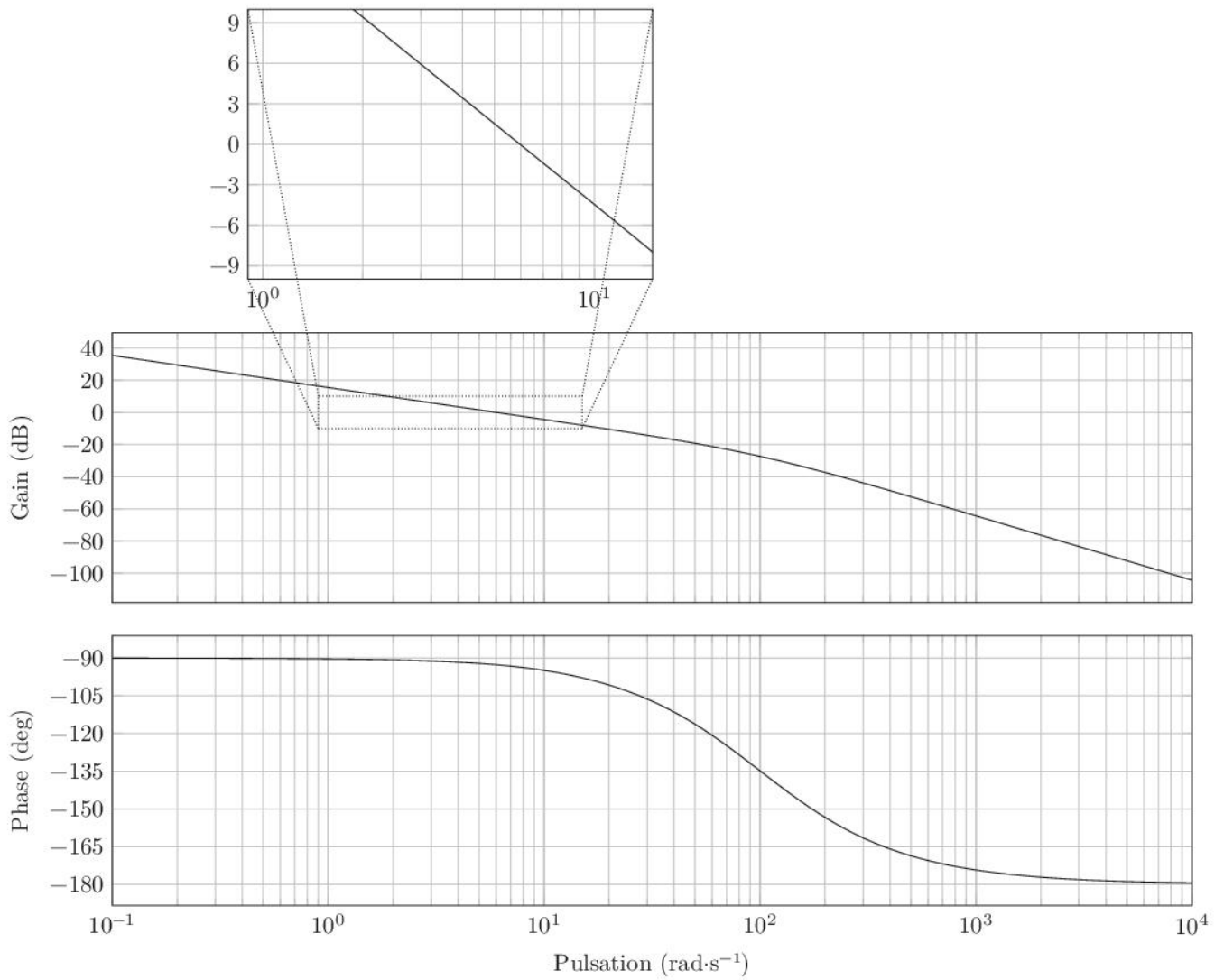
**Q 32.** Tracer sur la figure C du document réponse le diagramme de Bode asymptotique du correcteur  $C(p)$  pour  $K_C = 1$  et justifier le choix d'un tel correcteur dans l'optique d'une amélioration des performances de la commande en lacet.

La figure 20 représente le diagramme de Bode de la boucle ouverte avec correcteur pour  $K_C = 1$ . Afin que le critère de rapidité soit respecté sans dégrader les performances de dépassement, la pulsation de coupure à 0 dB notée  $\omega_u$  doit être choisie à  $10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

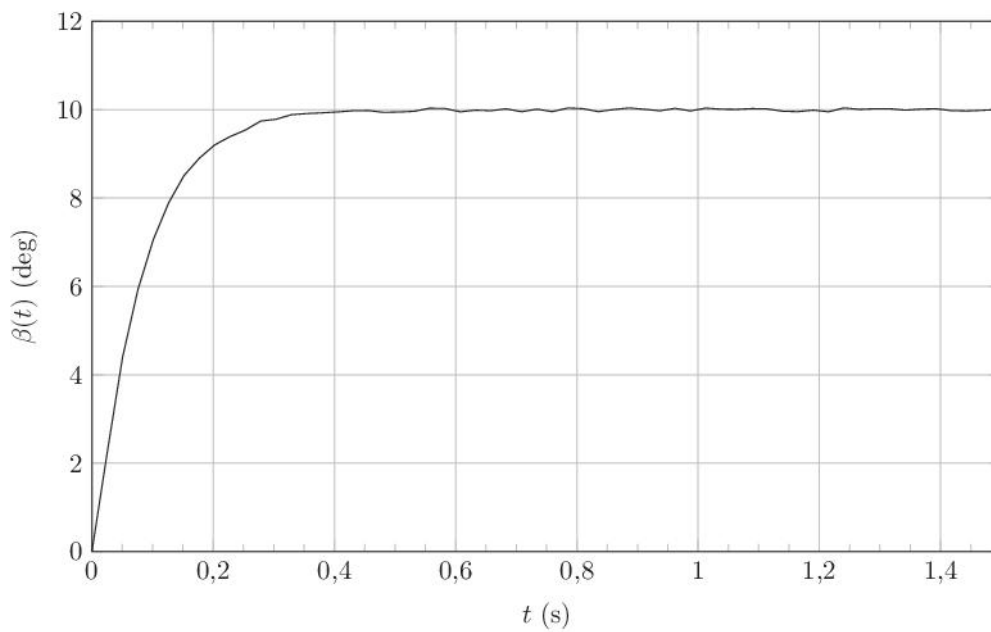
**Q 33.** Déterminer la valeur de  $K_C$  permettant d'avoir  $\omega_u = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La figure 21 représente le comportement en lacet du module interne pour un essai indiciel  $\beta_c(t) = 10 \text{ deg}$ . Cet essai a été réalisé avec la correction de la commande précédemment déterminée.

**Q 34.** Conclure sur les performances du système de commande en lacet du module interne une fois la correction appliquée.



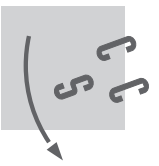
**Figure 20** Diagramme de Bode en boucle ouverte pour  $K_c = 1$



**Figure 21** Réponse temporelle de la commande corrigée du Sphero pour un échelon  $\beta_c(t) = 10$  deg

• • • FIN • • •





Numéro de place  
Numéro d'inscription


Signature

Nom  
Prénom


Épreuve : S21 MP

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 

--	--

 / 

--	--

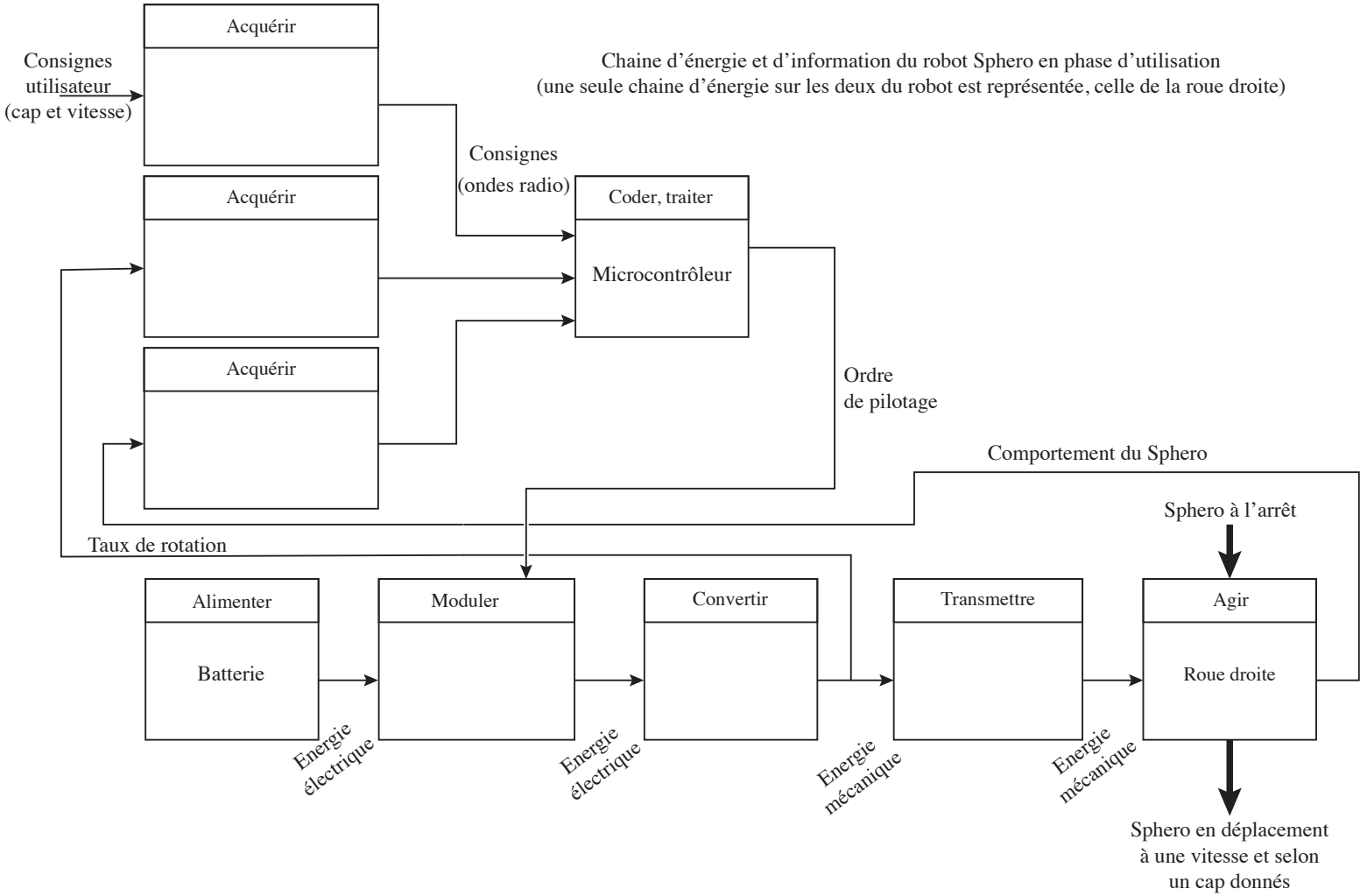


Figure A (question 9)

Ne rien écrire

dans la partie barrée

S001-DR/20171006 23:21 MKIV

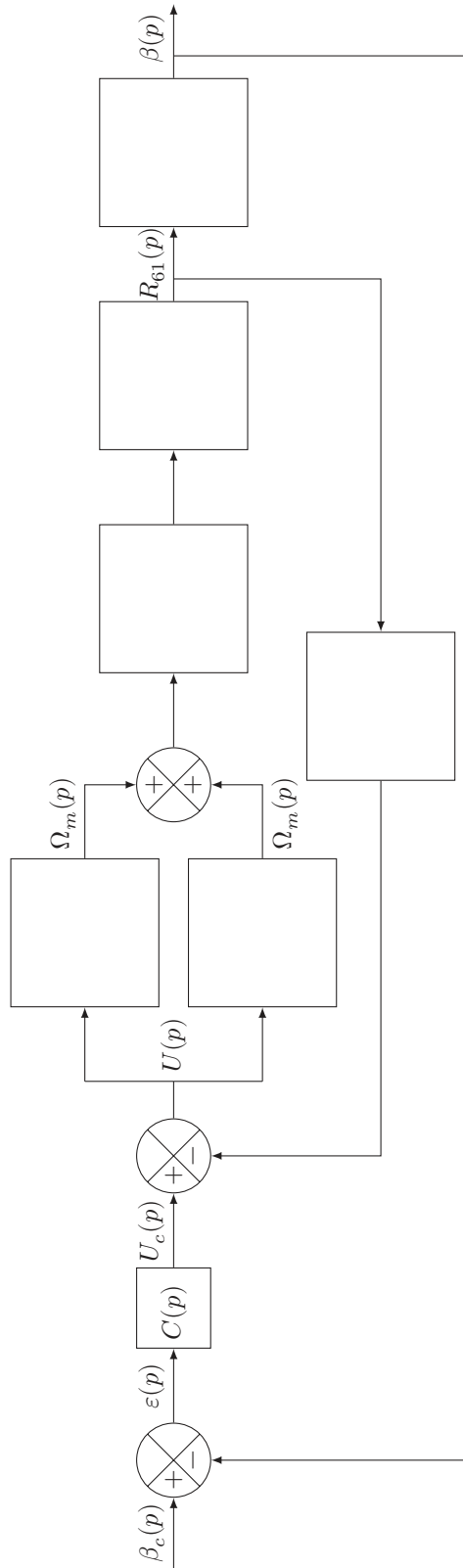


Figure B (question 28)

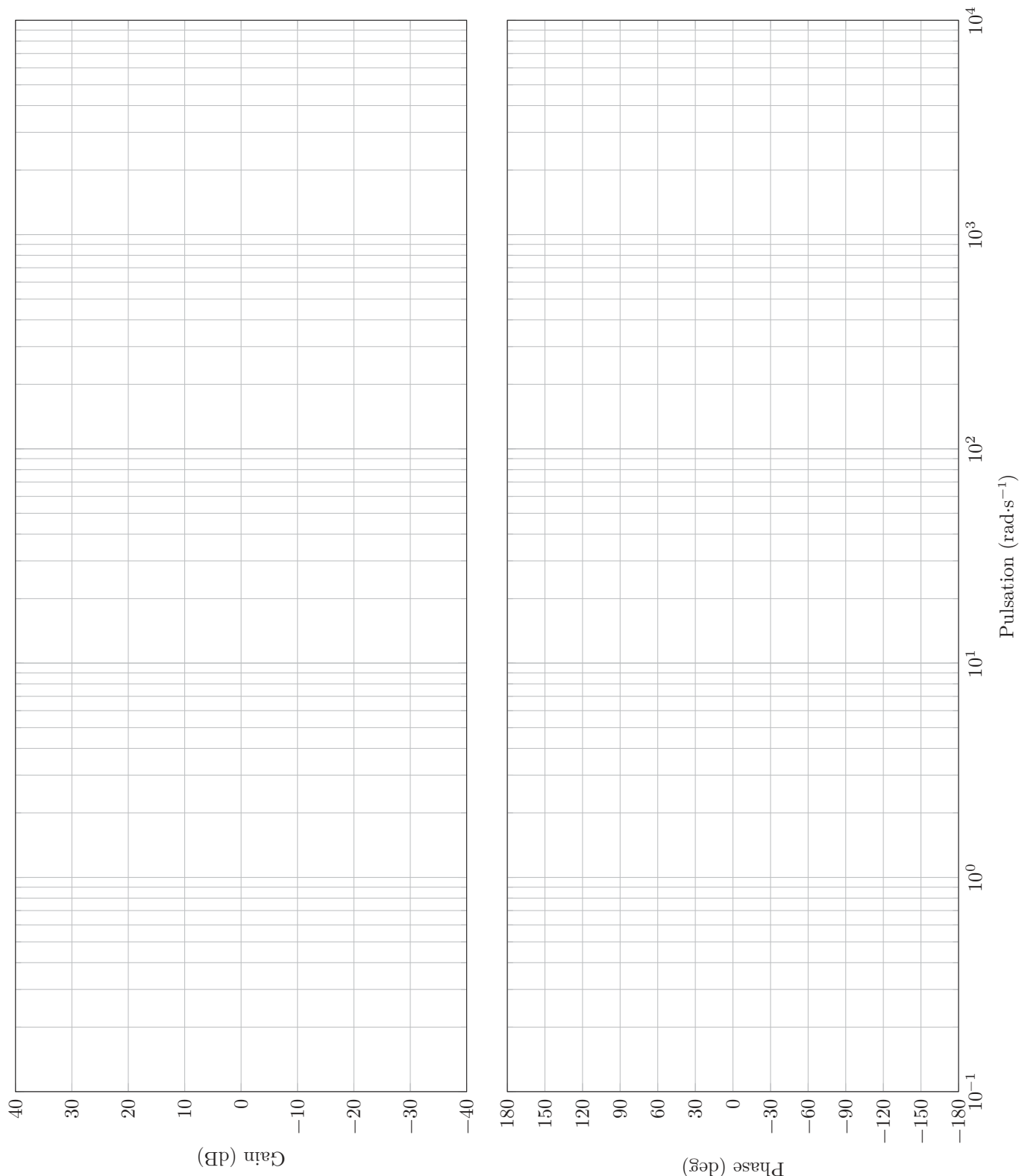


Figure C (question 32)