

**PSI 2024-2025****DS N°1****Corrigé****Robot SPHERO (Concours Centrale Supélec MP 2018)****II – Etude préliminaire et respect de l'exigence 2 de maniabilité****Question 1**

La trajectoire théorique comporte 2 virages donc il y a 3 changements de caps nécessaires :

- ☞ 1<sup>er</sup> changement de cap : direction en face (démarrage du Sphéro)
- ☞ 2<sup>ème</sup> changement de cap : 90° à droite
- ☞ 3<sup>ème</sup> changement de cap : direction en face

**Question 2**

L'utilisateur réalise 8 changements de cap. L'exigence id 2 n'est pas validée car :

- ☞ id 2.3.1 non validée : écartement de plus de 25 cm par rapport à la trajectoire de consigne (position 6 du Sphéro)
- ☞ id 2.1.1 non validée : oscillations en lacet lors des changements de cap (position 1, 2, 3 du Sphéro)
- ☞ id 2.1.3 non validée : dérive de cap par rapport à la consigne (position 1, 2, 3 du Sphéro)

**III – Interface utilisateur / Sphero****Question 3**

La longueur de la diagonale en pixel est de  $\sqrt{750^2 + 1334^2} = 1\,530,38$  px pour 11,938 cm.

Donc la largeur de l'écran (750 px) mesure :  $\frac{750 \times 11,938}{1\,530,38} = 5,85$  cm

Et la longueur de l'écran (1 334 px) mesure :  $\frac{1\,334 \times 11,938}{1\,530,38} = 10,41$  cm

**Question 4**

La longueur de la diagonale est de 1 530,38 px pour 11,938 cm. D'où la taille d'un pixel :

$$\frac{11,938}{1530,38} = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

**Question 5**

Un carré de  $0,25 \text{ cm}^2$  est de carré de  $\sqrt{0,25} = 0,5$  cm de coté. Soit  $\frac{0,5}{7,8 \cdot 10^{-3}} \approx 65$  px de coté. Et par

conséquent un nombre de  $\left(\frac{0,5}{7,8 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \approx 4\,110$  px.

**Question 6**

Le curseur dont la taille est comprise dans un carré de 85 px est bien plus grand que la surface de contact d'u doigt (65 px de coté). Le contrôle est donc compatible.

**Question 7**

Les coordonnées  $j_c$  et  $i_c$  du centre de l'écran sont :  $j_c = \frac{1334}{2} = 667$  et  $i_c = \frac{750}{2} = 375$ .

On a donc :  $X = j_D - 667$  et :  $Y = i_D - 375$

**Question 8**

La longueur du vecteur  $\vec{O_cD}$  est de  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  pixels. Le cap correspond à l'angle  $-\widehat{(-\vec{y}_e, \vec{O_cD})}$  soit l'angle :  $-\widehat{(-\vec{y}_e, \vec{x}_e)} - \widehat{(\vec{x}_e, \vec{O_cD})} = \frac{\pi}{2} - \widehat{(\vec{x}_e, \vec{O_cD})}$  avec :  $-\widehat{(\vec{x}_e, \vec{O_cD})} = \arccos(X/\|\vec{O_cD}\|)$  si  $Y \geq 0$   
 ou :  $-\widehat{(\vec{x}_e, \vec{O_cD})} = -\arccos(X/\|\vec{O_cD}\|)$  si  $Y < 0$

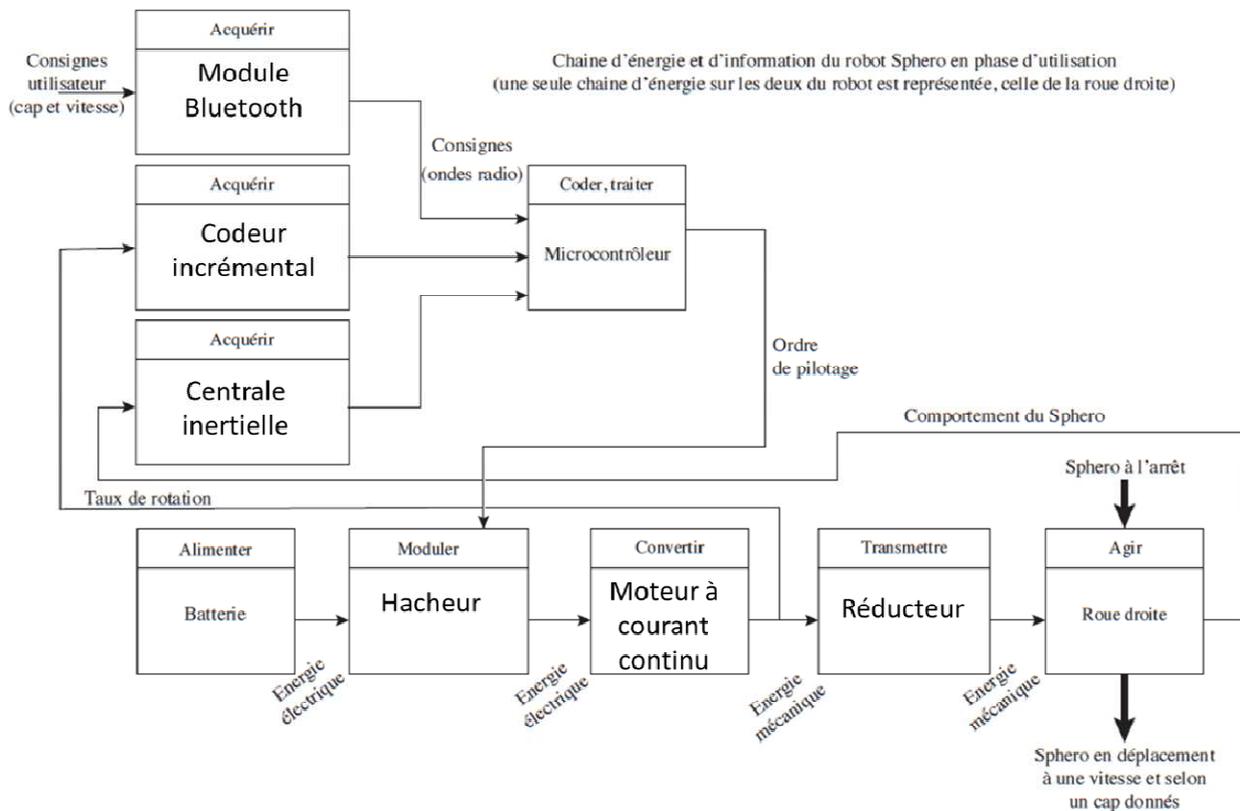
Or le Cap est tel que :  $\text{Cap} \in [0^\circ; 360^\circ[$  donc on prend :  $\text{Cap} = \left(\frac{\pi}{2} \pm \arccos(X/\|\vec{O_cD}\|)\right) \cdot \frac{180}{\pi} \% 360$

D'où le code Python pour la fonction `Get_CV(X, Y)`

```
def Get_CV(X, Y) :
    OcD = sqrt(X**2+Y**2)           # Calcul de la distance OcD
    Vitesse=100*OcD/305             # Calcul de la consigne de vitesse
    if OcD > 305 :                  # Si le curseur est en dehors de la cible
        return (None,None)
    else :
        if Y>=0 :                   # Calcul du cap en radian si Y positif ou nul
            Cap=pi/2+acos(X/OcD)
        Else :                       # Calcul du cap en radian si Y négatif
            Cap=pi/2-acos(X/OcD)
        Cap=Cap*180/pi%360           # Cap en degré avec cap inclus dans [0,360[
    return (Cap,Vitesse)
```

**IV – Architecture détaillée du robot Sphéro**

**Question 9**



**V – Déplacement et réglage de cap du robot Sphéro**

**Question 10**

On a :  $\{\mathcal{V}_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O_S, \mathcal{B}_6}$       Donc :  $\overrightarrow{V_{O_S \in 6/1}} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{6/1}} = \begin{pmatrix} p_{61} \\ 0 \\ r_{61} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6}$

or :  $\overrightarrow{V_{A \in 6/1}} = \overrightarrow{V_{O_S \in 6/1}} + \overrightarrow{AO_S} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/1}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ H \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6} \wedge \begin{pmatrix} p_{61} \\ 0 \\ r_{61} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ H.p_{61} + L.r_{61} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6}$

D'où le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$  exprimé au point A :  $\{\mathcal{V}_{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & H.p_{61} + L.r_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6}$

On a entre 2 et 6 une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_{6'})$

D'où le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{6/2}\}$  exprimé au point A :  $\{\mathcal{V}_{6/2}\} = \begin{Bmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6}$

On a :  $\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{I, \mathcal{B}_6}$       Donc :  $\overrightarrow{V_{I \in 1/2}} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ q_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6}$

or :  $\overrightarrow{V_{A \in 1/2}} = \overrightarrow{V_{I \in 1/2}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6} \wedge \begin{pmatrix} p_{12} \\ q_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6} = \begin{pmatrix} R.q_{12} \\ -R.p_{12} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_6}$

D'où le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{1/2}\}$  exprimé au point A :  $\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} p_{12} & R.q_{12} \\ q_{12} & -R.p_{12} \\ r_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6}$

**Question 11**

La loi de composition des mouvements nous permet d'écrire :  $\{\mathcal{V}_{6/2}\} = \{\mathcal{V}_{6/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/2}\}$

On en déduit :  $\begin{Bmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & H.p_{61} + L.r_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6} + \begin{Bmatrix} p_{12} & R.q_{12} \\ q_{12} & -R.p_{12} \\ r_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{B}_6}$

Et donc le système :  $\begin{cases} p_{62} = p_{61} + p_{12} \\ 0 = q_{12} \\ 0 = r_{61} + r_{12} \\ 0 = R.q_{12} \\ 0 = H.p_{61} + L.r_{61} - R.p_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{12} = -p_{26} - p_{61} \\ q_{12} = 0 \\ r_{21} = r_{61} \\ H.p_{61} + L.r_{21} - R.(-p_{26} - p_{61}) = 0 \end{cases} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix}$

Car  $\begin{cases} p_{62} = -p_{26} \\ \text{et} \\ r_{12} = -r_{21} \end{cases}$       Donc de l'équation (d) on en déduit donc :  $R.p_{26} + (R+H).p_{61} + L.r_{21} = 0$

**Question 12**

D'après l'énoncé :  $k = -\frac{p_{26}}{p_{36}}$       Et :  $r_{21} = r_{41} = k \cdot \frac{R}{2.L} \cdot (p_{36} - p_{56})$

Donc de l'équation précédente on a :  $-k.R.p_{36} + (R+H).p_{61} + L.k \cdot \frac{R}{2.L} \cdot (p_{36} - p_{56}) = 0$

On en déduit :  $p_{61} = \frac{k.R}{2.(R+H)} \cdot (p_{36} + p_{56})$       Soit :  $p_{61} = \mu \cdot (p_{36} + p_{56})$       Avec :  $\mu = \frac{k.R}{2.(R+H)}$

**Question 13**

Des équations précédentes :

$$\left| \begin{array}{l} R.p_{26} + (R+H).p_{61} + L.r_{21} = 0 \\ (c) : r_{61} = r_{21} \\ p_{61} = \frac{k.R}{2.(R+H)}.(p_{36} + p_{56}) \\ k = -\frac{p_{26}}{p_{36}} \end{array} \right| \text{ On obtient :}$$

$$-k.R.p_{36} + (R+H).\frac{k.R}{2.(R+H)}.(p_{36} + p_{56}) + L.r_{61} = 0 \Leftrightarrow L.r_{61} = \frac{k.R}{2}.(p_{36} - p_{56})$$

On en déduit :  $r_{61} = \frac{k.R}{2.L}.(p_{36} - p_{56})$  Soit :  $r_{61} = \lambda.(p_{36} - p_{56})$  Avec :  $\lambda = \frac{k.R}{2.L}$

**Question 14**

On a :  $\{V_{1/0}\} = \begin{pmatrix} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{pmatrix} K, \mathcal{B}_S$  Donc :  $\overrightarrow{V_{K \in 1/0}} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{pmatrix} p_{10} \\ q_{10} \\ r_{10} \end{pmatrix} \mathcal{B}_S$

or :  $\overrightarrow{V_{O_S \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{K \in 1/0}} + \overrightarrow{O_S K} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_S \end{pmatrix} \mathcal{B}_S \wedge \begin{pmatrix} p_{10} \\ q_{10} \\ r_{10} \end{pmatrix} \mathcal{B}_S = \begin{pmatrix} -R_S.q_{10} \\ -R_S.p_{10} \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{B}_{6'}$

Sachant que :  $\overrightarrow{V_{O_S \in 1/0}} = v.\overrightarrow{y_S}$  On a :  $q_{10} = 0$  et :  $v = -R_S.p_{10}$

**Question 15**

D'après la loi de composition des mouvements :  $\overrightarrow{\Omega_{6/0}} = \overrightarrow{\Omega_{6/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Soit en projection sur  $\overrightarrow{x_{6'}}$  :  $\overrightarrow{\Omega_{6/0}}.\overrightarrow{x_{6'}} = \overrightarrow{\Omega_{6/1}}.\overrightarrow{x_{6'}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}.\overrightarrow{x_{6'}}$

Or  $\dot{\alpha} = p_{60} = \overrightarrow{\Omega_{6/0}}.\overrightarrow{x_{6'}} = 0$  et :  $\overrightarrow{\Omega_{6/1}}.\overrightarrow{x_{6'}} = p_{61}$  Donc :  $0 = p_{61} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}.\overrightarrow{x_{6'}}$

Sachant qu'on a posé  $\beta = 0$  :  $\overrightarrow{x_{6'}} = \overrightarrow{x_6}$  D'autre part :  $q_{10} = 0$  Donc :  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = p_{10}.\overrightarrow{x_S} + r_{10}.\overrightarrow{z_S}$

D'où :  $0 = p_{61} + (p_{10}.\overrightarrow{x_S} + r_{10}.\overrightarrow{z_S}).\overrightarrow{x_6}$  Avec  $\overrightarrow{x_6} = \overrightarrow{x_S}$  On en déduit :  $p_{61} = -p_{10}$

**Question 16**

Des deux relations précédentes :  $v = -R_S.p_{10}$  et :  $p_{61} = -p_{10}$  On obtient :  $v = R_S.p_{61}$

Or on a vu précédemment que :  $p_{61} = \mu.(p_{36} + p_{56})$  Donc :  $v = R_S.\mu.(p_{36} + p_{56})$

**Question 17**

De la relation :  $r_{61} = \lambda.(p_{36} - p_{56})$  et sachant que :  $\omega_{cap} = \overrightarrow{\Omega_{6/0}}.\overrightarrow{z_S} = r_{61}.\cos \alpha$ .

On obtient :  $\omega_{cap} = \lambda.(p_{36} - p_{56}).\cos \alpha$

**Question 18**

Des deux relations précédentes on en déduit :

$$\left| \begin{array}{l} p_{36} - p_{56} = \frac{\omega_{cap}}{\lambda.\cos \alpha} \\ p_{36} + p_{56} = \frac{v}{R_S.\mu} \end{array} \right|$$

Donc par addition et soustraction de ces équations on obtient :

$$\left| \begin{array}{l} p_{36} = \frac{1}{2}.\left(\frac{v}{R_S.\mu} + \frac{\omega_{cap}}{\lambda.\cos \alpha}\right) \\ p_{56} = \frac{1}{2}.\left(\frac{v}{R_S.\mu} - \frac{\omega_{cap}}{\lambda.\cos \alpha}\right) \end{array} \right|$$

**Question 19**

En ligne droite on a  $\omega_{cap} = 0$ . Donc on obtient :  $v = 2.R_s.\mu.p_{36}$

Sachant que la fréquence maximale de rotation des moteurs est : 6 500 tr/min la valeur maximale de  $p_{36}$  est de :  $p_{36Max} = \frac{2.\pi \times 6\,500}{60} = 680,7 \text{ rad.s}^{-1}$ . D'où la vitesse maximale du robot en ligne droite :

$$v_{Max} = 2 \times 0,037 \times 0,042 \times 680,7 = 2,11 \text{ m.s}^{-1}.$$

**Question 20**

Dans un virage avec  $\omega_{cap} = 60 \text{ deg.s}^{-1} = \frac{60.\pi}{180} \text{ rad.s}^{-1} = 1,047 \text{ rad.s}^{-1}$ , si le moteur de la roue droite tourne à sa vitesse maximale :  $p_{36Max} = 680,7 \text{ rad.s}^{-1}$ , alors d'après la relation établie à la question 17 :

$$p_{56} = p_{36} - \frac{\omega_{cap}}{\lambda} = 680,7 - \frac{1,047}{0,073} = 666,4 \text{ rads}^{-1}.$$

**Question 21**

D'après la relation établie à la question 16 :

$$V = R_s.\mu.(p_{36} + p_{56}) = 0,037 \times 0,042 . (680,7 + 666,4) = 2,09 \text{ m.s}^{-1}.$$

**Question 22**

L'exigence Id 2.3.2 du cahier des charges impose que la vitesse linéaire du robot soit de  $2 \text{ m.s}^{-1} \pm 10\%$  soit une vitesse appartenant à l'intervalle [1,8 m/s ; 2,2 m/s].

Or d'après les questions précédentes la vitesse linéaire du robot varie, suivant la vitesse de changement de cap, de 2,09 à 2,11  $\text{m.s}^{-1} \in [1,8 \text{ m/s} ; 2,2 \text{ m/s}]$ . **Donc le cahier des charges est respecté.**

**VI – Comportement en tangage du robot Sphéro**

**Question 23**

La symétrie axiale d'axe  $(O_S, \vec{z}_{6'})$  des éléments principaux du module interne permet d'avoir un centre de gravité du module interne appartenant à cet axe  $(O_S, \vec{z}_{6'})$ .

**Question 24**

Ayant  $G \in (O_S, \vec{z}_{6'})$  on a forcément :  $x_g = y_g = 0$

D'autre part le centre de gravité G est tel que :  $\sum_i m_i.\vec{OG}_i = \vec{0}$  où i est l'indice des principaux éléments du module interne. On obtient alors, avec le théorème de Chasles ( $\vec{GG}_i = \vec{GO}_S + \vec{O}_S\vec{G}_i$ ) et par projection sur l'axe  $\vec{z}_{6'}$  :

$$O_S\vec{G}. \vec{z}_{6'} = z_g = \frac{0.m_c - 2.h_b.m_b - h_i.m_i + h_s.m_s - 2.h_r.m_r - 2.h_m.m}{m_c + 2.m_b + m_i + m_s + 2.m_r + 2.m}$$

$$z_g = \frac{2 \times 9 \times 7 - 35 \times 27 + 9 \times 8 - 2 \times 12 \times 1 - 2 \times 15 \times 26}{12 + 2 \times 7 + 27 + 8 + 2 \times 1 + 2 \times 26} = -15,7 \text{ mm}$$

**Question 25**

On isole l'ensemble  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$  Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur S sont :

- ☞ Le poids de S (pesanteur sur S) : modélisé par une force :  $\vec{P}_S = - M.g. \vec{z}_S$  appliquée en G
- ☞ L'action du sol sur 1 : modélisée par une force  $\vec{F}_{Sol \rightarrow 1} = x_{S1}. \vec{x}_S + y_{S1}. \vec{y}_S + z_{S1}. \vec{z}_S$  appliquée en K. Car entre le sol et la sphère 1 on a une liaison sphère plan avec adhérence.

Si on considère que l'ensemble du système est en translation alors le moment dynamique au centre de gravité du système S dans son mouvement par rapport à 0 est nul :  $\delta_G(\vec{S}/0) = \vec{0}$ .

La résultant dynamique étant le vecteur M.  $\vec{\alpha}_{O_S \in 6/0}$  on a par la relation de Varignon :

$$\begin{aligned} \delta_K(S/0) &= \delta_G(S/0) + \overline{KG} \wedge M. \overline{a_{OS \in 6/0}} = \vec{0} + M.(\overline{KO_S} + \overline{O_S G}) \wedge \overline{a_{OS \in 6/0}} \\ \delta_K(S/0) &= M.(\overline{R_S} \cdot \overline{z_S} + z_g \cdot \overline{z_g'}) \wedge a. \overline{y_S} = M.(\overline{R_S} \cdot \overline{z_S} + z_g \cdot (\cos \alpha \cdot \overline{z_S} - \sin \alpha \cdot \overline{y_S})) \wedge a. \overline{y_S} \\ \delta_K(S/0) &= -M.a.(\overline{R_S} + z_g \cdot \cos \alpha). \overline{x_S} \end{aligned}$$

**L'application du Théorème du Moment dynamique en K en projection sur  $\overline{x_S}$  donne :**

$$\overline{KG} \wedge \overline{P_S} \cdot \overline{x_S} + 0 = \delta_K(S/0) \cdot \overline{x_S}$$

Soit :  $(\overline{R_S} \cdot \overline{z_S} + z_g \cdot (\cos \alpha \cdot \overline{z_S} - \sin \alpha \cdot \overline{y_S})) \wedge (-M.g \cdot \overline{z_S}) \cdot \overline{x_S} = -M.a.(\overline{R_S} + z_g \cdot \cos \alpha) \cdot \overline{x_S} \cdot \overline{x_S}$

Ou :  $M.g.z_g \cdot \sin \alpha = -M.a.(\overline{R_S} + z_g \cdot \cos \alpha)$

On obtient donc : 
$$a = \frac{-g \cdot z_g \cdot \sin \alpha}{\overline{R_S} + z_g \cdot \cos \alpha}$$

**Question 26**

L'exigence 2.2.1.1 impose que l'angle de tangage reste inférieur à 30°. Or étant donné la relation précédente, pour un angle de 30° l'accélération est de :  $a = \frac{-9,81 \times (-16) \times \sin 30^\circ}{37 - 10 \cdot \cos 30^\circ} = 3,39 \text{ m.s}^{-1}$ .

**Or la fonction  $a(\alpha, z_g, \overline{R_S}, g)$  est croissante en  $\alpha$ , donc pour une accélération de  $1,5 \text{ m.s}^{-1}$  l'angle  $\alpha$  sera bien inférieur à 30°. Donc l'exigence 2.2.1.1 est bien respectée.**

Remarque : pour un angle de 12° on trouve une accélération de  $1,53 \text{ m.s}^{-1}$ . Cela confirme bien que l'exigence 2.2.1.1 est largement vérifiée.

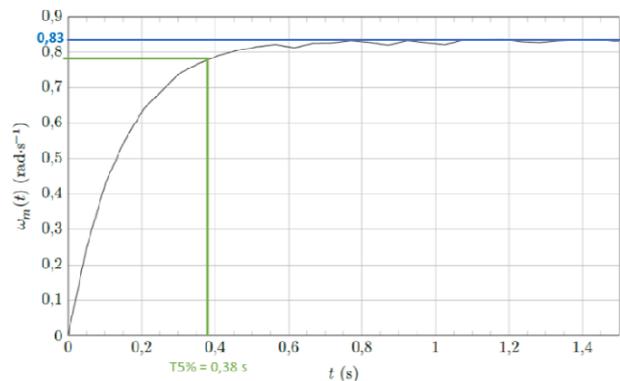
**VI – Performances en changement de cap du Sphero**

**Question 27**

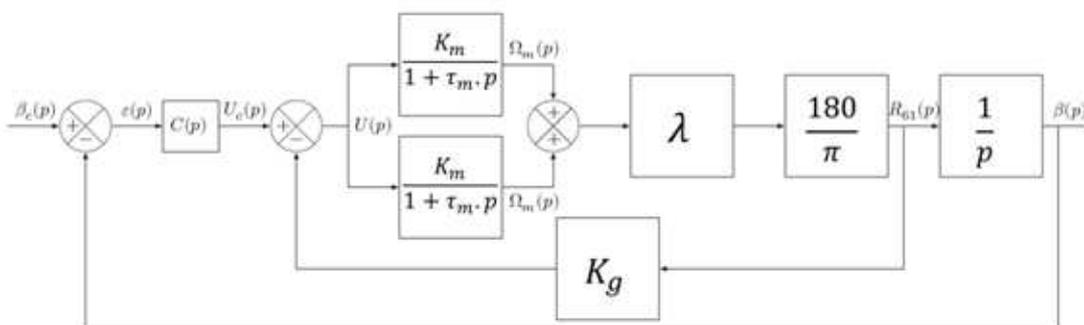
La réponse temporelle à un échelon unitaire de tension est bien celle d'un premier ordre (Tangente à l'origine non horizontale et pas de dépassement de la valeur finale).

La valeur finale de cette réponse temporelle est de 0,83 rad. Donc le gain de la fonction de transfert est de :  $K_m = \frac{0,83}{1} = 0,83 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

Le temps de réponse à 5% est de  $t_{5\%} = 0,38 \text{ s}$  donc la constante de temps  $\tau_m$  de la fonction de transfert est de :  $\tau_m = \frac{0,38}{3} \approx 0,13 \text{ s}$



**Question 28**



**Question 29**

Posons  $H_i(p)$  la fonction de transfert de la boucle interne :  $H_i(p) = \frac{R_{61}(p)}{U_C(p)}$

On obtient : 
$$H_i(p) = \frac{\frac{2.K_m.\lambda.180}{\pi.(1 + \tau_m.p)}}{1 + \frac{2.K_m.\lambda.180.K_g}{\pi.(1 + \tau_m.p)}} = \frac{360.K_m.\lambda}{360.K_m.K_g.\lambda + \pi + \pi.\tau_m.p}$$

On en déduit alors la fonction de transfert de l'asservissement pour C(p) = 1 :

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)} = \frac{\frac{360.K_m.\lambda}{360.K_m.K_g.\lambda + \pi + \pi.\tau_m.p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{360.K_m.\lambda}{360.K_m.K_g.\lambda + \pi + \pi.\tau_m.p} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{360.K_m.\lambda}{360.K_m.\lambda + (360.K_m.K_g.\lambda + \pi).p + \pi.\tau_m.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \left( K_g + \frac{\pi}{360.K_m.\lambda} \right) \cdot p + \frac{\pi.\tau_m}{360.K_m.\lambda} \cdot p^2}$$

**Question 30**

$H(p) = \frac{1}{1 + b.p + a.p^2}$  est une fonction de transfert du 2<sup>nd</sup> ordre de la forme :  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Donc de :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{0,019}} = 7,25 \text{ rad.s}^{-1}$

$\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot b = \frac{b}{2.\sqrt{a}} = \frac{0,17}{2.\sqrt{0,019}} = 0,62$

Gain statique :  $K = 1$

Donc avec l'abaque on obtient :  $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5,3$ .

Le temps de réponse du système de commande en lacet est donc de :

$$t_{5\%} = \frac{5,3}{7,25} = 0,73 \text{ s}$$

**Question 31**

Le tableau 2 de la page 12/15 nous précise que :

- ☞ L'erreur de position en lacet en régime permanent doit être nulle
- ☞ Le temps de réponse à 5% du système de commande en lacet doit être inférieur à 0,3 s.
- ☞ Il ne doit y avoir aucun dépassement de la valeur finale

Pour le système non corrigé : C(p) = 1

La première performance de précision est respectée car le gain statique de H(p) est de 1.

La seconde performance de rapidité n'est pas respectée car  $t_{5\%} = 0,73 \text{ s} > 0,3 \text{ s}$ .

La troisième performance de stabilité n'est pas respectée car  $\xi < 1$  donc il y a un dépassement de la valeur finale.

**Donc les performances requises pour l'asservissement en lacet ne sont pas atteintes.**

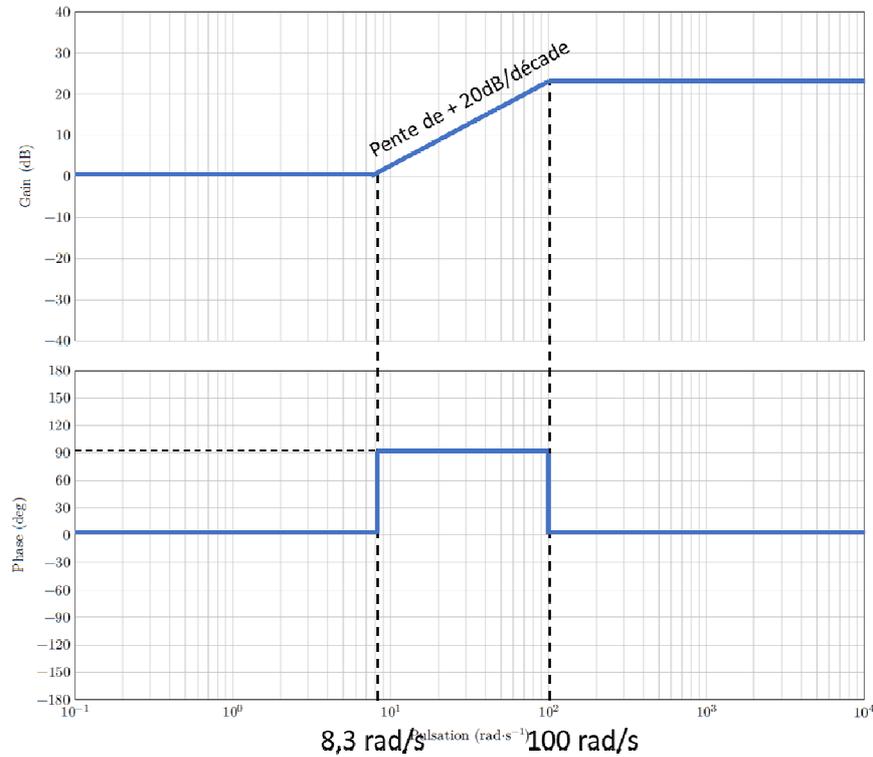
**Question 32**

La fonction de transfert du correcteur à avance de phase pour K = 1 est le produit de :

☞ Une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre :  $\frac{1}{1 + a.p}$  de pulsation de coupure  $\omega_a = \frac{1}{a} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ .

☞ Une fonction de transfert de rang 1 :  $1 + b.p$  de pulsation de coupure  $\omega_b = \frac{1}{b} = \frac{1}{0,12} = 8,3 \text{ rad.s}^{-1}$ .

On en déduit le diagramme asymptotique de C(p) la fonction de transfert du correcteur pour K = 1 par additions des diagrammes asymptotiques de ces deux fonctions de transfert. On obtient donc :



Ce type de correcteur permet d'améliorer la rapidité du système, à la condition que la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO soit suffisamment élevée tout en préservant la stabilité car la phase de la FTBO peut être remonté à la pulsation de coupure à 0 dB.

Remarque : Seuls les 5/2 sont en mesure de répondre à cette partie de la question.

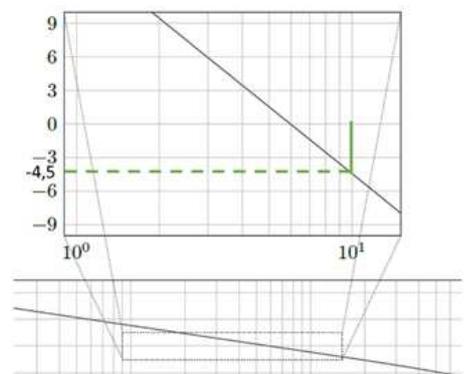
**Question 33**

La figure 20 de la page 15/15 nous montre que le gain dynamique de la FTBO pour  $K = 1$  à la pulsation  $\omega_u = 10 \text{ rad.s}^{-1}$  est de  $-4,5 \text{ dB}$ .

Or le gain  $K$  permet de translater verticalement la courbe de gain de  $20 \cdot \log K_C$ .

Il faut donc que :  $20 \cdot \log K_C = +4,5 \text{ dB}$

Soit :  $K_C = 10^{(4,5/20)} = 1,68 \text{ V.deg}^{-1}$



**Question 34**

La figure 21 de la page 15/15 nous montre que :

- ☞ La valeur finale de la réponse à un échelon de consigne de  $\beta_C(p) = 10 \text{ deg}$  est de 10 deg. L'erreur en position en régime permanent est donc nulle. Critère de précision vérifié.
- ☞ Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,25 s < 0,3 s. Critère de rapidité vérifié.
- ☞ Il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. Ou alors un très faible dépassement qui peut s'expliquer par les imprécisions de la mesure de l'angle de lacet. Critère de stabilité vérifié.

**Donc les performances exigées du système de commande en lacet sont vérifiées avec le correcteur à avance de phase de fonction de transfert :**  $C(p) = 1,68 \cdot \frac{1 + 0,12 \cdot p}{1 + 0,01 \cdot p}$