PSI 2024-2025 DS N°1 : Véhicule intelligent Robucar Corrigé

1.A- Etude des phases transitoires, Accélération/freinage en ligne droite

Question 1

La vitesse maximale du véhicule est : $V_{Max} = \frac{2.\pi.N_{mot.Max}}{60} \times \frac{1}{N} \times R = \frac{3\,200 \times 2.\pi \times 0{,}2}{60 \times 13}$

Soit : $\mathbf{V_{Max} = 5{,}16\ .m.s^{-1} = 18{,}6\ km.h^{-1}}$

Cela est conforme au cahier des charges car $V_{Max} \geq 15\ km.h^{-1}$

Question 2

On isole le véhicule, le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ L'action du sol sur la roue avant : Force $\overrightarrow{F_A} = T_A.\overrightarrow{X_0} + N_A.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en A
- ☞ L'action du sol sur la roue arrière : Force $\overrightarrow{F_B} = T_B.\overrightarrow{X_0} + N_B.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en B
- ☞ Poids du véhicule : Force $\overrightarrow{P} = -M.g.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en G

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{P} = M.\overrightarrow{a_{G\in véhicule/Sol}}$

Théorème du moment dynamique en G : $\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{F_B} + \vec{0} = \overrightarrow{\delta_G(veh./sol)}$

Or on a une translation du véhicule avec G centre d'inertie. Donc : $\overrightarrow{\delta_G(veh./sol)} = \vec{0}$

On obtient donc les 3 équations scalaires :

TRD en projection sur $\overrightarrow{X_0}$ $\quad \mathbf{T_A + T_B = M.\ddot{x}_G} \quad$ **(a)**

TRD en projection sur $\overrightarrow{Y_0}$ $\quad \mathbf{N_A + N_B - M.g = 0} \quad$ **(b)**

TMD en G en projection sur $\overrightarrow{Z_0}$: $\quad \mathbf{-\ell_1.N_A - h.T_A + \ell_2.N_B - h.T_B = 0} \quad$ **(c)**

Question 3

Les deux roues étant en limite d'adhérence, on a : $T_A = -\mu.N_A$ et : $T_B = -\mu.N_B$

Les équations (b) et (c) précédentes donnent donc : (a) $\Rightarrow$ $-\mu.N_A - \mu.N_B = M.\ddot{x}_G$

(b) $\Rightarrow$ $N_A + N_B = M.g$

On a donc : $M.\ddot{x} = -\mu.M.g$ Soit: $\mathbf{\ddot{x}_G = -\mu.g = -0{,}9 \times 9{,}81 = -8{,}83\ m.s^{-2}}$

Cela est conforme au cahier des charges car $\ddot{x}_G \leq -5\ m.s^{-2}$

Question 4

Si on isole la roue arrière le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ L'action du sol sur la roue arrière : Force $\overrightarrow{F_B} = T_B.\overrightarrow{X_0} + N_B.\overrightarrow{Y_0}$ appliquée en B
- ☞ L'action du châssis sur la roue arrière : Force appliquée en O_B centre de la roue arrière

L'inertie de la roue étant négligée ces deux forces ont même support : (O_BB). Le centre de la roue étant à la verticale de B, $\overrightarrow{F_B}$ est vertical donc $T_B = 0$

Question 5

La roue avant étant en limite d'adhérence : $T_A = -\mu.N_A$ d'autre part $T_B = 0$. Les équations de la question 2 nous donnent donc : (a) $\Rightarrow -\mu.N_A = M.\ddot{x}_G \iff N_A = -\frac{M.\ddot{x}_G}{\mu}$

$$\text{(b)} \Rightarrow -\frac{M.\ddot{x}_G}{\mu} + N_B = M.g \iff N_B = M.g - N_A = M.g + \frac{M.\ddot{x}_G}{\mu}$$

$$\text{(c)} \Rightarrow -\ell_1.\frac{M.\ddot{x}_G}{\mu} + h.M.\ddot{x}_G - \ell_2.\left(M.g + \frac{M.\ddot{x}_G}{\mu}\right) = 0$$

Soit après calcul : $\mathbf{\ddot{x}_G = \frac{-\mu.\ell_2.g}{\ell_1 + \ell_2 - \mu.h}}$ Application numérique : $\mathbf{\ddot{x}_G = -5{,}26\ m.s^{-2}}$ **.**

Sachant que $\ddot{x}_G \leq -5\ m.s^{-2}$, il est donc possible de ne freiner qu'avec la roue avant.

Question 6

En isolant la roue avant avec le même raisonnement qu'à la question 4 on en déduit $T_A = 0$.

Question 7

La roue arrière étant en limite d'adhérence : $T_B = -\mu.N_B$ d'autre part $T_A = 0$. Les équations de la question 2 nous donnent donc : (a) $\Rightarrow -\mu.N_B = M.\ddot{x}_G \Leftrightarrow N_B = -\dfrac{M.\ddot{x}_G}{\mu}$

$$\text{(b)} \Rightarrow N_A - \frac{M.\ddot{x}_G}{\mu} = M.g \Leftrightarrow N_A = M.g + \frac{M.\ddot{x}_G}{\mu}$$

$$\text{(c)} \Rightarrow \ell_1.\left(M.g + \frac{M.\ddot{x}_G}{\mu}\right) + \ell_2.\frac{M.\ddot{x}_G}{\mu} + h.\mu.\frac{M.\ddot{x}_G}{\mu} = 0$$

Soit après calcul : $\boldsymbol{\ddot{x}_G = \dfrac{-\mu.\ell_1.g}{\ell_1 + \ell_2 + \mu.h}}$ Application numérique : $\boldsymbol{\ddot{x}_G = -3{,}95\ m.s^{-2}}$ **.**

Sachant que $\ddot{x}_G > -5\ m.s^{-2}$, il n'est donc pas possible de ne freiner qu'avec la roue arrière.

Question 8

```
while y2 > 0 :                    # ZONE A
        t=t+h
        ##======
        ## Euler                      # DEBUT ZONE B
        f = 0.8 + 0.2*exp(-y2/Vref)
        y2n = y2 - f*g*h
        y1n = y1 + y2*h
        ##=================== # FIN ZONE B
        y1=y1n
        y2=y2n
##==============================================
                                  # DEBUT ZONE C
DA= y1n
Vf= y2n
tf= t
                                  # FIN ZONE C
```

1.B- Etude du suivi de trajectoire, Modélisation du virage

Question 9

Le point C étant le centre des trajectoires des différents point du véhicule par rapport au sol, on a : $\overrightarrow{V_{C\in S/Sol}} = \vec{0}$. Donc de la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{O1\in S/Sol}} = \overrightarrow{V_{C\in S/Sol}} + \overrightarrow{O_1C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/Sol}}$ on en déduit :

$$\overrightarrow{V_{O1\in S/Sol}} = (\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/Sol}} = \left[-a.\vec{X} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right).\vec{Y}\right] \wedge \dot{\psi}.\overrightarrow{Z_0}$$

Soit finalement : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{O1\in S/Sol}} = a.\dot{\psi}.\vec{Y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right).\dot{\psi}.\vec{X}}$

Par un calcul similaire on obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{O2\in S/Sol}} = a.\dot{\psi}.\vec{Y} + \left(\rho + \frac{d}{2}\right).\dot{\psi}.\vec{X}}$

Question 10

Par composition des vitesses on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{Roue\ i/Sol}} = \overrightarrow{\Omega_{Roue\ i/S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/Sol}} = \dot{\theta}_i.\overrightarrow{Y_i} + \dot{\psi}.\overrightarrow{Z_0}}$

Question 11

Ayant un roulement sans glissement de la roue 1 sur le sol, on a : $\overrightarrow{V_{J1\in Roue1/S}} = \vec{0}$. Donc de la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{O1\in Roue1/Sol}} = \overrightarrow{V_{J1\in Roue1/S}} + \overrightarrow{O_1J} \wedge \overrightarrow{\Omega_{Roue1/Sol}}$ on en déduit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_{O1\in Roue1/Sol}} = -R.\overrightarrow{Z_0} \wedge (\dot{\theta}_1.\overrightarrow{Y_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{Z_0}) = R.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{X_1}}$$

Par un calcul similaire on obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{O2\in Roue2/Sol}} = R.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{X_2}}$

Question 12

O_1 est le centre de la liaison pivot entre S et 1, donc : $\overrightarrow{V_{O1\in Roue1/S}} = \vec{0}$.

Donc de la loi de composition des vitesses on obtient : $\overrightarrow{V_{O1\in Roue1/Sol}} = \overrightarrow{V_{O1\in S/Sol}}$

D'après les résultats précédents, on a donc : $R.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{X_1} = a.\dot{\psi}.\overrightarrow{Y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right).\dot{\psi}.\overrightarrow{X}$

Soit en projection : ☞ sur $\overrightarrow{X}$: $\boldsymbol{R.\dot{\theta}_1.\cos\delta_1 = \left(\rho - \frac{d}{2}\right).\dot{\psi}}$ **(d)**

☞ sur $\overrightarrow{Y}$: $\boldsymbol{R.\dot{\theta}_1.\sin\delta_1 = a.\dot{\psi}}$ **(e)**

Question 13

Des équations précédentes et : (f) : $R.\dot{\theta}_2.\cos\delta_2 = \left(\rho + \frac{d}{2}\right).\dot{\psi}$ (g) : $R.\dot{\theta}_2.\sin\delta_2 = a.\dot{\psi}$

On obtient : $\frac{(e)}{(d)} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\tan\delta_1 = \frac{a}{\rho - \frac{d}{2}}}$ $\frac{(g)}{(f)} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\tan\delta_2 = \frac{a}{\rho + \frac{d}{2}}}$

Applications numériques : $\boldsymbol{\delta_1 = 0,147\ rad = 8,4°}$ $\boldsymbol{\delta_2 = 0,116\ rad = 6,6°}$

Question 15

Sachant que : $\cos\delta_1 \approx \cos\delta_2 \approx 1$, on en déduit des équations (d) et (f) :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\psi}.\frac{\rho - \frac{d}{2}}{R} \quad \text{et :} \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\psi}.\frac{\rho + \frac{d}{2}}{R}$$

1.C- Etude du taux de rotation des roues 1 et 2 au cours d'un virage

Question 16

Le changement d'orientation total effectué représente l'aire sous la courbe $\dot{\psi}(t)$.

Soit : $\psi_{TOT} = (t_1 - t_0).\frac{\dot{\psi}_C}{2} + (t_2 - t_1).\dot{\psi}_C + (t_3 - t_2).\frac{\dot{\psi}_C}{2}$ Or : $t_3 - t_2 = t_1 - t_0$

Donc : $\psi_{TOT} = (t_1 - t_0).\dot{\psi}_C + (t_2 - t_1).\dot{\psi}_C$ Soit finalement : $\boldsymbol{\psi_{TOT} = (t_2 - t_0).\dot{\psi}_C}$ (h)

Question 17

On a : $t_3 - t_0 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_0)$ Or : $t_3 - t_2 = \left|\frac{\dot{\psi}_C}{\ddot{\psi}_0}\right|$

D'autre part : (h) $\Rightarrow$ $t_2 - t_0 = \frac{\psi_{TOT}}{\dot{\psi}_C}$ Avec : $\psi_{TOT} = \frac{\pi}{4}$ et : $\dot{\psi}_C = \frac{V}{\rho}$

Donc : $t_3 - t_0 = \left|\frac{\dot{\psi}_C}{\ddot{\psi}_0}\right| + \frac{\psi_{TOT}}{\dot{\psi}_C}$ Soit finalement : $\boldsymbol{t_3 - t_0 = \frac{V}{\rho.\ddot{\psi}_0} + \frac{\rho.\pi}{4.V}}$

<u>A.N. :</u> $V = 10\ km.h^{-1} = 2,78\ m.d^{-1}$ $\rho = 6,4\ m$ $\ddot{\psi}_0 = 1\ rad.s^{-2}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{t_3 - t_0 = 2,23\ s}$

Le temps nécessaire à un virage de 45° = $\frac{\pi}{4}$ rad et un rayon de $\rho = 6,4$ m est bien inférieur à 3 s. Donc le cahier des charges est bien vérifié.

2.A- modélisation du comportement de l'ensemble moto-réducteur-roue

Question 18

L'inertie de l'arbre 2 de sortie étant négligée l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma_{12} = \{1,2\}$ s'écrit :

$E_C(\Sigma_{12}/0) = \frac{1}{2}.J_m.\dot{\theta}_m^2$ D'où la dérivée de cette énergie cinétique : $\frac{d\ E_C(\Sigma_{12}/0)}{dt} = J_m.\ddot{\theta}_m.\dot{\theta}_m$

La liaison entre 1 et 2 est parfaite donc : $\Sigma\ P(Int \rightarrow \Sigma_{12}/0) = 0$

La liaison entre 0 et 2 est parfaite donc : $P(0 \rightarrow 2/0) = 0$

La liaison entre 0 et 1 a un coefficient de frottement visqueux f_m donc : $P(0 \rightarrow 2/0) = -f_m.\dot{\theta}_m.\dot{\theta}_m$

D'autre part la puissance du couple moteur est : $P(\overrightarrow{C_m} \rightarrow 1/0) = C_m.\dot{\theta}_m$

Et : $P(-\overrightarrow{C_{re}} \rightarrow 1/0) = -C_{re}.\dot{\theta}_{re}$ avec : $\dot{\theta}_{re} = \dfrac{\dot{\theta}_m}{N}$

Donc : $\Sigma\, P(Ext \rightarrow \Sigma_{12}/0) = \left(C_m - \dfrac{C_{re}}{N}\right).\dot{\theta}_m - f_m.\dot{\theta}_m^{\,2}$

L'application du Théorème de l'Energie Cinétique $\dfrac{d\,E_C(\Sigma_{12}/0)}{dt} = \Sigma\, P(Int \rightarrow \Sigma_{12}/0) + \Sigma\, P(Ext \rightarrow \Sigma_{12}/0)$

donne donc : $J_m.\ddot{\theta}_m.\dot{\theta}_m = \left(C_m - \dfrac{C_{re}}{N}\right).\dot{\theta}_m - f_m.\dot{\theta}_m^{\,2}$ Soit : $\mathbf{J_m.\ddot{\theta}_m + f_m.\dot{\theta}_m = C_m - \dfrac{C_{re}}{N}}$ **(i)**

Question 19

On isole la roue {4}, BAME :
- ☞ Couple $\overrightarrow{C_{re}}$ (de direction l'axe de la roue)
- ☞ Couple $-\overrightarrow{C_P}$ (de direction l'axe de la roue)
- ☞ Action de 0 sur 1 de moment par rapport à l'axe $-f_r.\dot{\theta}_r$

L'application du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe de la roue donne donc :

$C_{re} - C_P - f_r.\dot{\theta}_r = J_r.\ddot{\theta}_r$ Soit : $\mathbf{J_r.\ddot{\theta}_r + f_r.\dot{\theta}_r = -C_P + C_{re}}$ **(j)**

Question 20

On a trivialement : $\mathbf{C_{re} = K.(\theta_{re} - \theta_r)}$ **(k)**

Question 21

Sachant que : $\theta_{re} = \dfrac{\theta_m}{N}$ de la relation (k) on obtient : $C_{re} = K.\left(\dfrac{\theta_m}{R} - \theta_r\right)$

Donc de la relation (i) on obtient : $J_m.\ddot{\theta}_m + f_m.\dot{\theta}_m = C_m - K.\left(\dfrac{\theta_m}{R} - \theta_r\right).\dfrac{1}{N}$

On a donc bien : $J_m.\ddot{\theta}_m + \alpha.\dot{\theta}_m = C_m - \beta.\left(\dfrac{\theta_m}{R} - \theta_r\right).\dfrac{1}{N}$ (b) Avec : $\mathbf{\alpha = f_m}$ et : $\mathbf{\beta = K}$

De même de la relation (j) on obtient : $J_r.\ddot{\theta}_r + f_r.\dot{\theta}_r = -C_P + K.\left(\dfrac{\theta_m}{R} - \theta_r\right)$

On a donc bien : $J_r.\ddot{\theta}_r + \gamma.\dot{\theta}_r = -C_P - \beta.\left(\dfrac{\theta_m}{R} - \theta_r\right)$ (c) Avec : $\mathbf{\gamma = f_r}$ et : $\mathbf{\beta = K}$

2.B- Identification et simulation du système de commande de la vitesse angulaire

Question 22

En passant dans le domaine de Laplace les équations (b) et (c)

Et sachant que : $\Theta_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{p}$ ainsi que : $\Theta_r(p) = \dfrac{\Omega_r(p)}{p}$

On obtient : (b) $\Rightarrow$ $(\alpha + J_m.p).\Omega_m(p) = C_m(p) - \beta.\dfrac{1}{p}.\left(\dfrac{\Omega_m(p)}{N} - \Omega_r(p)\right).\dfrac{1}{N}$

Et : (c) $\Rightarrow$ $(B + J_r.p).\Omega_r(p) = -C_r(p) + \beta.\dfrac{1}{p}.\left(\dfrac{\Omega_m(p)}{N} - \Omega_r(p)\right)$

D'autre l'équation du moteur donne : (a) $\Rightarrow$ $(R_e + L.p).I(p) = U_a(p) - K_{em}.\Omega_m(p)$

On obtient donc par identification : $\mathbf{H_1(p) = \dfrac{1}{R_e + L.p}}$ $\mathbf{H_2(p) = \dfrac{1}{\alpha + J_m.p}}$

$\mathbf{H_3(p) = \dfrac{1}{p}}$ $\mathbf{H_4(p) = \dfrac{1}{\gamma + J_r.p}}$

Question 23

La figure 9 nous montre une réponse de la vitesse de la roue $\omega_r(t)$ à un échelon de couple $c_m(t)$ de 4 N.m. Cette réponse à une pente à l'origine non nulle et n'a pas de dépassement de la valeur finale. Donc la fonction de transfert de la partie mécanique est un premier ordre de la forme : $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1 + T_m.p}$

La valeur finale étant de 2,9 rad.s^{-1} le gain K_m est : $\mathbf{K_m = \dfrac{2,9}{4} = 0,73\ rad.s^{-1}.N^{-1}.m^{-1}}$

Les 95 % de la valeur finale : $0,95 \times 2,9 = 2,76$ rad.s^{-1} sont atteints à la date $t_{5\%} = 1,8$ s.

Sachant que : $t_{5\%} = 3.T_m$ la constante de temps est de : $\mathbf{T_m = \dfrac{1,8}{3} = 0,6\ s}$

2.C- Choix d'un régulateur pour répondre au cahier des charges

Question 25

$$\frac{K_e}{1 + T_e.p} = \frac{1}{R_e + L.p} = \frac{1/R_e}{1 + L/R_e.p} \qquad \text{Donc :} \quad \mathbf{K_e = \frac{1}{R_e}} \qquad \text{et :} \quad \mathbf{T_e = \frac{L}{R_e}}$$

Question 26

Du schémas bloc de la figure 11 on a en appliquant la formule de Black avec $K_S = K_e.K_{em}^2.K_m$:

D'une part : $$W_{Ua}(p) = \frac{\dfrac{K_e}{1+T_e.p}.K_{em}.\dfrac{K_m}{1+T_m.p}}{1 + \dfrac{K_e}{1+T_e.p}.K_{em}.\dfrac{K_m}{1+T_m.p}.K_{em}} = \frac{K_S/K_{em}}{1 + K_S + (T_e + T_m).p + T_e.T_m.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $$\mathbf{W_{Ua}(p) = \frac{\dfrac{K_S}{K_{em}.(1 + K_S)}}{1 + \dfrac{T_e + T_m}{1 + K_S}.p + \dfrac{T_e.T_m}{1 + K_S}.p^2}}$$

D'autre part : $$W_{Cp}(p) = \frac{\dfrac{K_m}{1+T_m.p}}{1 + \dfrac{K_e}{1+T_e.p}.K_{em}.\dfrac{K_m}{1+T_m.p}.K_{em}} = \frac{K_m.(1 + T_e.p)}{1 + K_S + (T_e + T_m).p + T_e.T_m.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $$\mathbf{W_{Cp}(p) = \frac{\dfrac{K_m.(1 + T_e.p)}{1 + K_S}}{1 + \dfrac{T_e + T_m}{1 + K_S}.p + \dfrac{T_e.T_m}{1 + K_S}.p^2}}$$

Question 27

Sachant que $W_R(p) = K_P$ on a pour la FTBO : $H_{BO}(p) = \dfrac{0,51.K_P}{1 + 0,6.p + 0,0026.p^2}$

D'où la FTBF : $$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\dfrac{0,51.K_P}{1 + 0,6.p + 0,0026.p^2}}{1 + \dfrac{0,51.K_P}{1 + 0,6.p + 0,0026.p^2}} = \frac{0,51.K_P}{1 + 0,51.K_p + 0,6.p + 0,0026.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $$\mathbf{H_{BF}(p) = \frac{\dfrac{0,51.K_P}{1 + 0,51.K_P}}{1 + \dfrac{0,6}{1 + 0,51.K_P}.p + \dfrac{0,0026}{1 + 0,51.K_P}.p^2}}$$

Fonction de transfert du second ordre simple avec :

☞ Un gain statique : $\mathbf{K_{BF} = \dfrac{0,51.K_P}{1 + 0,51.K_P}}$ ☞ Un facteur d'amortissement : $\xi_{BF} = \dfrac{\omega_0}{2}.\dfrac{0,6}{1 + 0,51.K_P}$

☞ Une pulsation propre : $\mathbf{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1 + 0,51.K_P}{0,0026}}}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\xi_{BF} = \dfrac{0,3}{\sqrt{0,0026.(1 + 0,51.K_P)}}}$

Question 28

Pour respecter le premier critère de stabilité du cahier des charges (Dépassement relatif inférieur ou égal à 5% : $D_{\%} \leq 5\%$), il faut un facteur d'amortissement ξ_{BF} tel que : $\xi_{BF} \geq 0{,}69$.

Soit : $\dfrac{0{,}3}{\sqrt{0{,}0026.(1 + 0{,}51.K_P)}} \geq 0{,}69 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K_P \leq 141\ V.s.rad^{-1}}$

Question 29

Pour $K_P = 141$ V.s.rad^{-1} on a : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}51\times 141}{0{,}0026}} = 167$ rad.s^{-1} et : $\xi_{BF} = 0{,}69$

L'abaque nous donne alors : $t_{5\%}.\omega_0 \approx 3$ Soit : $\mathbf{t_{5\%} = \dfrac{3}{\omega_0} = \dfrac{3}{167} = 0{,}018\ s \leq 0{,}2\ s}$

On peut donc respecter les 1ier critère de stabilité : $D_{\%} \leq 5$ % et de rapidité : $t_{5\%} \leq 0{,}2$ s.

Question 30

Avec un régulateur proportionnel K_P La FTBF est un second ordre simple de gain K_{BF}. Donc l'erreur statique en réponse à un échelon de consigne Ω_{C0} est : $\varepsilon_S = \Omega_{C0}.(1 - K_{BF})$

Or : $K_{BF} = \dfrac{0{,}51.K_P}{1 + 0{,}51.K_P}$. Donc $\forall\ K_P \geq 0$ on a : $K_{BF} \leq 1$. Donc on ne peut pas avoir $\varepsilon_S = 0$.

Donc le régulateur proportionnel ne permet pas de respecter le 1ier critère de précision : $\varepsilon_S = 0$.

Question 31

$W_R(p) = K_P + \dfrac{K_I}{p} = \dfrac{K_P.p + K_I}{p}$ Soit sous sa forme canonique : $W_R(p) = \dfrac{K_I . \left(1 + \dfrac{K_P}{K_I}.p\right)}{p}$

On a donc un correcteur PI : $\mathbf{\dfrac{K_R(1 + T_R.p)}{p}}$ de gain : $\mathbf{K_R = K_I}$ et de constante de temps : $\mathbf{T_R = \dfrac{K_P}{K_I}}$

Question 32

La FTBO non corrigée s'écrit : $H_{BONC}(p) = \dfrac{0{,}51}{1 + 0{,}6.p + 0{,}0026.p^2}$ C'est donc un second ordre de pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}0026}} = 19{,}6$ rad.s^{-1} et de facteur d'amortissement $\xi = \dfrac{19{,}6}{2}.0{,}6 = 5{,}88$.

Cette fonction de transfert ayant un facteur d'amortissement $\xi > 1$ cette FTBO non corrigée a 2 constantes de temps : T_1 et T_2. Elle peut donc s'écrire : $H_{BONC}(p) = \dfrac{0{,}51}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$

Ces constantes de temps T_1 et T_2 sont donc telles que : $T_1 + T_2 = 0{,}6$ et $T_1.T_2 = 0{,}0026$.

En résolvant ces deux équations on obtient : $\mathbf{T_1 = 0{,}6\ s}$ et $\mathbf{T_2 = 0{,}0044\ s}$

Question 33

La FTBO corrigée s'écrit : $H_{BO}(p) = W_R(p).H_{BONC}(p) = \dfrac{K_R(1 + T_R.p)}{p} . \dfrac{0{,}51}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$

En choisissant $T_R = T_1$ cette FTBO corrigé s'écrit : $\mathbf{H_{BO}(p) = \dfrac{0{,}51.K_R}{p.(1 + 0{,}0044.p)}}$

D'où le gain dynamique en décibel de cette FTBO corrigée :

$$\mathbf{G_{dBBO}(\omega) = 20.\log(0{,}51.K_R) - 20.\log \omega - 10.\log(1 + (0{,}0044.\omega)^2)}$$

Question 34

Pour obtenir une pulsation de coupure à 0 dB de $\omega_{0dB} = 15$ rad.s^{-1} il faut donc que :

$$20.\log(0{,}51.K_R) - 20.\log \omega - 10.\log(1 + (0{,}0044.\omega)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{K_R = \dfrac{15.\sqrt{1 + (0{,}0044\times 15)^2}}{0{,}51} = 29{,}5\ V.rad^{-1}}$$

On en déduit les gains du correcteur PI correspondant :

Gain intégral : $\mathbf{K_I = K_R = 29{,}5\ V.rad^{-1}}$

Gain proportionnel : $\mathbf{K_P = K_I.T_R = 29{,}5 \times 0{,}6 = 17{,}7\ V.s.rad^{-1}}$

Question 34

Avec ce régulateur PI la FTBO s'écrit : $H_{BO}(p) = \dfrac{15}{p.(1 + 0{,}0044.p)}$

D'où la phase de la FTBO : $\boldsymbol{\varphi_{BO}(\omega) = -90 - \arctan(0{,}0044.\omega)}$

Question 35

Avec ce régulateur PI on a :

☞ Une FTBF : $H_{BF}(p) = \dfrac{\dfrac{15}{p.(1 + 0{,}0044.p)}}{1 + \dfrac{15}{p.(1 + 0{,}0044.p)}} = \dfrac{1}{1 + 0{,}067.p + 2{,}9.10^{-4}.p^2}$. Soit une fonction de transfert avec un gain unitaire. Donc le premier critère de précision est respecté.

☞ Le correcteur ajoute un intégrateur en amont de la perturbation. Donc le deuxième critère de précision est respecté. (Justification que seuls les 5/2 peuvent avancer)

☞ La simulation montre un temps de réponse d'environ $t_{5\%} = 0{,}19\ s \leq 0{,}2\ s$. Donc le premier critère de rapidité est respecté.

☞ Par dimensionnement du régulateur PI on a : $\omega_{odB} \geq 15\ rad.s^{-1}$. Donc le deuxième critère de rapidité est respecté.

☞ La simulation montre qu'il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. Donc le premier critère de stabilité est respecté.

☞ Par dimensionnement du régulateur PI on a : $\omega_{odB} = 15\ rad.s^{-1}$, soit une marge de phase de : $M_\varphi = 180° + \varphi_{BO}(15) = 180° - 90 - \arctan(0{,}0044 \times 15) = 86\ ° \geq 70°$. Donc le deuxième critère de stabilité est respecté.