Systèmes équivalents

1- Définition et intérêt du système équivalent

1.1- Définition

Un système équivalent doit remplir deux conditions quelque soit les vitesses des systèmes:

☞ **Avoir la même énergie cinétique que le système étudié**

☞ **Avoir les mêmes puissances que le système étudié**

1.2- Exemple

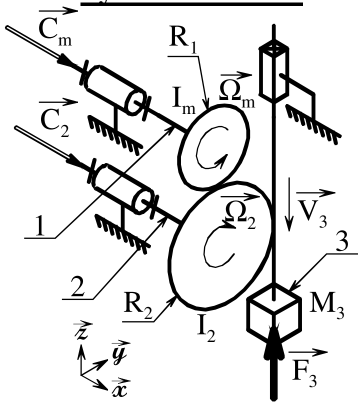
Soit un système S constitué de deux arbres 1 (arbre moteur) et 2 liés au bâti 0 par deux liaisons pivot. Et une crémaillère liée au bâti par une liaison glissière. Les arbres 1 et 2 ont respectivement I_m et I_2 pour moment d'inertie par rapport aux axes, et la crémaillère 3 à une masse M_3.

L'arbre 1 porte une roue dentée de rayon R_1 engrenant avec la roue dentée portée par l'arbre 2 et de rayon R_2. Enfin la crémaillère 3 est entrainée en translation par la roue dentée de l'arbre 2.

Ce système est soumis à trois actions extérieures : Deux couples de vecteurs $\overrightarrow{C_m}$ et $\overrightarrow{C_2}$ appliqués respectivement sur 1 et 2 et une force $\overrightarrow{F_3}$.

On note $\overrightarrow{\Omega_m}$ et $\overrightarrow{\Omega_2}$ les taux de rotation des arbres 1 et 2 et $\overrightarrow{V_3}$ le vecteur vitesse de la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti.

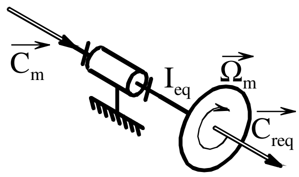
Système étudié :



Le système équivalent se résume à un arbre E lié au bâti par une liaison pivot identique à celle entre le bâti et l'arbre 1. Cet arbre a le même taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_m}$ par rapport au bâti que l'arbre 1 du système étudié.

Cet arbre équivalent a un moment d'inertie I_{eq} par rapport à son axe de rotation. Et s'applique sur cet arbre un couple résistant équivalent C_{req}.

Système équivalent :



☞ Les deux systèmes ayant la même énergie cinétique, on a :

$$\frac{1}{2} \cdot I_{eq} \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2 = \frac{1}{2} \cdot I_m \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \overrightarrow{\Omega_2}^2 + \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot \overrightarrow{V_3}^2$$

☞ Les deux systèmes ayant les mêmes puissances, on a :

$$\overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} + \overrightarrow{C_{req}} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} = \Sigma\, P(Ext\rightarrow S,R_g) + \Sigma\, P(Int\rightarrow S,R_g)$$

$$\overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} + \overrightarrow{C_{req}} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} = \overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} + \overrightarrow{C_2} \cdot \overrightarrow{\Omega_2} + \overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{V_3}$$

On a alors une écriture simplifiée du PFD : $C_m + C_{req} = I_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$

Ou du TEC : $C_m.\omega_m + C_{req}.\omega_m = \dfrac{d\,(1/2.I_{eq}.\omega_m^2)}{dt}$

☞ **L'inertie équivalente se calcule à partir des différentes inerties et des rapports de transmission.**

☞ **Le couple résistant équivalent se calcule à partir des différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures et des rapports de transmission.**

☞ **En général on a un couple résistant équivalent négatif.**

2- Calcul des inerties et moments équivalents

2.1- Moment d'inertie équivalent

Posons : ☞ $\mathbf{k = \frac{\omega_2}{\omega_m} = -\frac{R_1}{R_2}}$ le rapport de transmission de l'arbre 1 à l'arbre 2

☞ $\mathbf{\lambda = \frac{V_3}{\omega_2} = R_2}$ le rapport de transmission de l'arbre 2 à la crémaillère 3

L'équation (a) devient : $\frac{1}{2} . I_{eq} . \overrightarrow{\Omega_m}^2 = \frac{1}{2} . I_m . \overrightarrow{\Omega_m}^2 + \frac{1}{2} . I_2 . k^2 . \overrightarrow{\Omega_m}^2 + \frac{1}{2} . M_3 . \lambda^2 . k^2 . \overrightarrow{\Omega_m}^2$

D'où le moment d'inertie équivalent sur l'arbre 1 : $\mathbf{I_{eq} = I_m + I_2 . k^2 + M_3 . \lambda^2 . k^2}$

2.2- Inertie équivalente ramenée sur un arbre

On définit : ☞ l'inertie équivalente de l'arbre 2 ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{I_2 . k^2}$

☞ l'inertie équivalente du solide 3 ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{M_3 . \lambda^2 . k^2}$

2.3- Couple équivalent

L'équation (b) devient : $\overrightarrow{C_{req}} . \overrightarrow{\Omega_m} = \overrightarrow{C_2} . k . \overrightarrow{\Omega_m} + \overrightarrow{F_3} . \lambda . k . \overrightarrow{\Omega_m}$

D'où le couple équivalent sur l'arbre 1 : $\mathbf{C_{req} = C_2 . k + F_3 . \lambda . k}$

2.4- Couple équivalent ramené sur un arbre

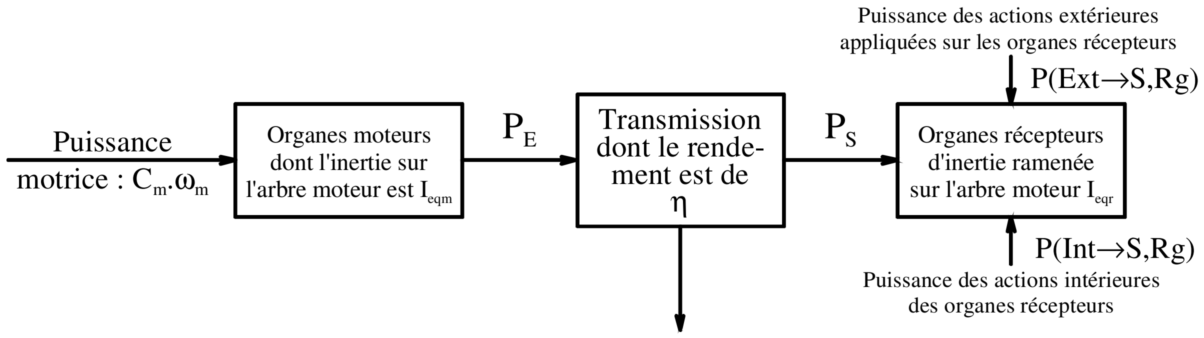
On définit : ☞ le couple équivalent au couple C_2 ramené sur l'arbre 1 : $\mathbf{C_2 . k}$

☞ le couple équivalent à la force F_3 ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{F_3 . \lambda . k}$

3- Transmission avec un rendement η

3.1- Systèmes étudié et équivalent

Soit la chaîne de transmission de puissance suivante :



Puissance dissipée (quantité positive) = $P_E - P_S = (1 - \eta) . P_E$

La transmission a un rendement η. Par définition ce rendement est le rapport entre les puissances à l'entrée de la transmission et celle à la sortie de la transmission.

Le rendement s'écrit donc : $\mathbf{\eta = \frac{P_S}{P_E}}$

3.2- Application du TEC

☞ Sur le système constitué des organes moteur :

$$C_m.\omega_m. - P_E = I_{eqm}.\omega_m.\dot{\omega}_m$$

On en déduit : $$P_E = C_m.\omega_m. - I_{eqm}.\omega_m.\dot{\omega}_m$$

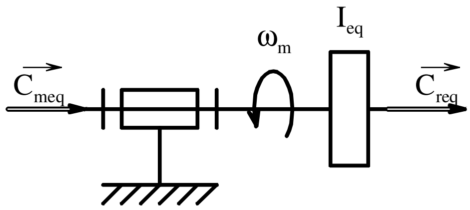
☞ Sur le système constitué des organes récepteurs :

$$\Sigma\, P(Ext \rightarrow S,R_g) + \Sigma\, P(Int \rightarrow S,R_g) + \eta.P_E = I_{eqr}.\omega_m.\dot{\omega}_m$$

On en déduit :

$$\mathbf{\Sigma\, P(Ext \rightarrow S,R_g) + \Sigma\, P(Int \rightarrow S,R_g) + \eta.C_m.\omega_m. = (\eta.I_{eqm}. + I_{eqr}).\omega_m.\dot{\omega}_m}$$

3.3- Modèle équivalent



Le modèle équivalent est un arbre dont la vitesse de rotation est celle du moteur : ω_m.

L'inertie I_{eq} de cet arbre est égale à la somme des inerties des organes en mouvement ramenées sur l'arbre moteur.

Cet arbre est soumis à deux couples :

☞ Un couple moteur équivalent au couple moteur du modèle étudié

☞ Un couple résistant équivalent aux différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures appliquées sur le système étudié

L'application du TEC à ce système donne : $\mathbf{C_{meq} \,.\, \omega_m + C_{req} \,.\, \omega_m = I_{eq}.\omega_m.\dot{\omega}_m}$

On a alors une écriture simplifiée du PFD : $$\mathbf{C_{meq} + C_{req} = I_{eq} \,.\, \dot{\omega}_m}$$

Ou du TEC : $$\mathbf{C_{meq}.\omega_m + C_{req}.\omega_m = \frac{d\,(1/2.I_{eq}.\omega_m^2)}{dt}}$$

Les différents paramètres du système équivalent se calculent alors de la manière suivante :

☞ **Couple moteur équivalent :** $\mathbf{C_{meq} = \eta.C_m}$

☞ **Moment d'inertie équivalent :** $\mathbf{I_{eq} = \eta.I_{eqm} + I_{eqr}}$

avec I_{eqm} et I_{eqr} les inerties équivalentes des organes moteur et récepteur ramenées sur l'arbre moteur.

☞ **Couple résistant équivalent calculé à partir des actions extérieures et intérieures et des rapports de transmission.**

Remarques :

☞ En général la puissance du couple résistant équivalent est négative.

☞ Si on a des puissances d'actions extérieures ou intérieures appliquées sur les organes moteur (autre que le couple moteur) celles-ci sont multipliées par le rendement η :

$$C_{req} = \eta.C_{reqm} + C_{reqr}$$

où : C_{reqm} est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes moteur

et : C_{reqr} est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes récepteur