Réponses Fréquentielles des SLCI : Démonstrations

1- Principes du tracé des diagrammes de Bode

1.1- Calcul du gain dynamique et du déphase d'une FT

On a : $e(t) = E_0.\sin(\omega.t)$ et : $s(t) = S_0.\sin(\omega.t + \varphi)$

On en déduit dans le domaine de Laplace : $E(p) = E_0 \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ et : $S(p) = S_0 \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} . e^{\frac{\varphi}{\omega}.p}$

On en déduit donc la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{S_0}{E_0} e^{\frac{\varphi}{\omega}.p}$

En remplaçant la variable de Laplace par le complexe j.ω on obtient : $H(j.\omega) = \dfrac{S_0}{E_0} e^{j.\varphi}$

La valeur complexe de la fonction H pour p = j.ω est le complexe : $H(j.\omega) = \dfrac{S_0}{E_0} (\cos\varphi + j.\sin\varphi)$

Cette valeur permet donc de déterminer à partir de la fonction de transfert le gain et le déphasage induits par le système en fonction de ω la pulsation de l'entrée :

Gain dynamique en dB : $G_{dB}(\omega) = 20.\log|H(j.\omega)|$ Déphasage : $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\,(H(j.\omega))$

1.2- Produit de deux fonctions de transfert

Soit la fonction de transfert H(p) définie par le produit : **$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$** On a alors :

☞ $G_{dBH}(\omega) = 20.\log\left|H(j.\omega)\right| = 20 . \log\left|H_1(j.\omega)\times H_2(j.\omega)\right| = 20 . \log\left(\left|H_1(j.\omega)\right|\times\left|H_2(j.\omega)\right|\right)$

$G_{dBH}(\omega) = 20 . \log\left|H_1(j.\omega)\right| + 20 . \log\left|H_2(j.\omega)\right| = G_{dBH1}(\omega) + G_{dBH2}(\omega)$

☞ $\varphi_H(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H(j.\omega)\right) = \mathrm{Arg}\left(H_1(j.\omega) \times H_2(j.\omega)\right)$

$\varphi_H(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H_1(j.\omega)\right) + \mathrm{Arg}\left(H_2(j.\omega)\right) = \varphi_{H1}(\omega) + \varphi_{H2}(\omega)$

2- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert du premier ordre

Expression du gain dynamique

☞ On sait que : $G(\omega) = \left|H(j.\omega)\right| = \left|K . \dfrac{1}{1 + j.\tau.\omega}\right| = \dfrac{K}{\left|1 + j.\tau.\omega\right|} = \dfrac{K}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}}$

D'où le gain en décibels : **$G_{dB}(\omega) = 20 . \log K - 10 . \log(1 + \tau^2.\omega^2)$**

Expression du déphasage

☞ On sait que : $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H(j.\omega)\right) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{K}{1 + j.\tau.\omega}\right) = \mathrm{Arg}(K) - \mathrm{Arg}\left(1 + j.\tau.\omega\right)$

D'où le déphasage : **$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\tau.\omega\right)$**

Asymptotes du diagramme de gain

☞ Pour $\omega \to 0$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K - 10.\log 1 = 20.\log K$

Au voisinage de 0 on a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 20.log K**

☞ Pour $\omega \to \infty$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K - 10.\log \tau^2.\omega^2 = 20.\log K - 20.\log \tau. - 20.\log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : **Une asymptote**

☞ De pente : – 20dB par décade

☞ Passant au point $\left(\dfrac{1}{\tau}, 20.\log K\right)$

Asymptotes du diagramme de phase

☞ Pour $\omega \to 0$, $\tau.\omega \to 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau.\omega) \to 0°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

☞ Pour $\omega \to \infty$, $\tau.\omega \to \infty$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau.\omega) \to -90°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée – 90°**

Valeurs particulières en 1/τ

Pour $\omega = \dfrac{1}{\tau}$ on a : $G_{dB}\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log 2$ Soit : $\mathbf{G_{dB}\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = 20.\log K - 3\ dB}$

Et : $\mathbf{\varphi\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = -\arctan(1) = -45°}$

3- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert de rang 1

Une fonction de transfert de rang un est de la forme : $\mathbf{H(p) = K.(1 + \tau.p)}$

Expression du gain dynamique

☞ On sait que : $G(\omega) = \left| H(j.\omega) \right| = \left| K \,.\, (1 + j.\tau.\omega) \right| = K \,.\, \left| 1 + j.\tau.\omega \right| = K\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}$

D'où le gain en décibels : $\mathbf{G_{dB}(\omega) = 20 \,.\, \log K + 10 \,.\, \log(1 + \tau^2.\omega^2)}$

Expression du déphasage

☞ On sait que : $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H(j.\omega) \right) = \mathrm{Arg}\left(K \,.\, (1 + j.\tau.\omega) \right) = \mathrm{Arg}\left(1 + j.\tau.\omega \right)$

On a donc : $\tan\varphi(\omega) = \tau.\omega$ D'où le déphasage : $\mathbf{\varphi(\omega) = +\arctan\left(\tau.\omega\right)}$

Asymptotes du diagramme de gain

☞ Pour $\omega \to 0$ $G_{dB}(\omega) \to 20 \,.\, \log K + 10 \,.\, \log 1 = 20 \,.\, \log K$

Au voisinage de 0 on a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 20 . log K**

☞ Pour $\omega \to \infty$ $G_{dB}(\omega) \to 20 \,.\, \log K + 10 \,.\, \log \tau^2.\omega^2 = 20 \,.\, \log K + 20 \,.\, \log \tau + 20.\log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : **Une asymptote**
- ☞ **De pente : + 20dB par décade**
- ☞ **Passant au point $\left(1/\tau\, ,\, 20.\log K\right)$**

Asymptotes du diagramme de phase

☞ Pour $\omega \to 0$, $\tau.\omega \to 0$ Soit : $\varphi(\omega) = +\arctan(\tau.\omega) \to 0°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

☞ Pour $\omega \to \infty$, $\tau.\omega \to \infty$ Soit : $\varphi(\omega) = +\arctan(\tau.\omega) \to +90°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée + 90°**

Valeurs particulières en 1/τ

Pour $\omega = \dfrac{1}{\tau}$ on a : $G_{dB}\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = 20 \,.\, \log K + 10 \,.\, \log 2$ Soit : $\mathbf{G_{dB}\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = 20.\log K + 3\ dB}$

Et : $\mathbf{\varphi\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = +\arctan(1) = +45°}$

4- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert du second ordre

Expression du gain dynamique

☞ On sait que : $G(\omega) = \left| H(j.\omega) \right| = \left| \dfrac{K}{1 + 2.\xi.\dfrac{\omega}{\omega_0}.j - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}} \right| = \dfrac{K}{\left| 1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + 2.\xi.\dfrac{\omega}{\omega_0}.j \right|}$

Soit en posant : $\mathbf{u = \frac{\omega}{\omega_0}}$ On a : $G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2}}$

D'où le gain en décibels : $\mathbf{G_{dB}(\omega) = 20 . \log K - 10 . \log\left((1-u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2\right)}$

<u>Expression du déphasage</u>

☞ On sait que : $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(H(j.\omega)\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{K}{1 + 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.j - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.j}\right)$

Soit en posant : $\mathbf{u = \omega/\omega_0}$ $\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(K) - \mathrm{Arg}\left((1-u^2) + 2.\xi.u.j\right)$

Soit : $\mathbf{\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2.\xi.u}{1-u^2}\right)}$ **pour u < 1** ou : $\mathbf{\varphi(\omega) = -180 - \arctan\left(\frac{2.\xi.u}{1-u^2}\right)}$ **pour u > 1**

<u>Asymptotes du diagramme de gain</u>

☞ Pour $\omega \to 0$ $u \to 0$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K - 10.\log 1 = 20.\log K$

Au voisinage de 0 on a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 20 . log K**

☞ Pour $\omega \to \infty$ $u \to \infty$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K - 10.\log u^4 = 20.\log K + 40.\log \omega_0 - 40.\log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : **Une asymptote ☞ De pente : – 40dB par décade**

☞ Passant au point $(\omega_0 , 20.\log K)$

<u>Asymptotes du diagramme de phase</u>

☞ Pour $\omega \to 0$, $u \to 0$ $\frac{2.\xi.u}{1-u^2} \to 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\mathbf{\frac{2.\xi.u}{1-u^2}}\right) \to 0°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

☞ Pour $\omega \to \infty$, $u \to \infty$ $\frac{2.\xi.u}{1-u^2} = \frac{2.\xi}{1/u - u} \to 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -180° - \arctan\left(\mathbf{\frac{2.\xi.u}{1-u^2}}\right) \to -180°$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée – 180°**

<u>Valeurs particulières en ω_0</u>

Pour $\omega = \omega_0$ on a u = 1 $G_{dB}(\omega_0) = 20 . \log K - 10 . \log 4.\xi^2$

Soit : $\mathbf{G_{dB}(\omega_0) = 20.\log K - 20.\log (2.\xi)}$ Remarque : pour $\xi = 0,5$ on a $G_{dB}(\omega_0) = 20.\log K$

Pour : $\mathbf{\omega \to \omega_0^-}$ on a $u \to 1^-$ $\frac{2.\xi.u}{1-u^2} \to +\infty$ Soit : $\mathbf{\varphi(\omega_0) \to -\arctan(+\infty) = -90°^+}$

Pour : $\mathbf{\omega \to \omega_0^+}$ on a $u \to 1^+$ $\frac{2.\xi.u}{1-u^2} \to -\infty$ Soit : $\mathbf{\varphi(\omega_0) \to -180° - \arctan(-\infty) = -90°^-}$

<u>Position du gain par rapport aux asymptotes</u>

On a : $\mathbf{A(u) = (1-u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2 = 1 + (4.\xi^2 - 2).u^2 + u^4}$

Si ξ > 0,707 alors : $(4.\xi^2 - 2) > 0$ $\Rightarrow$ $A(u) > 1$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) < 20.\log K$

Et : $\Rightarrow$ $A(u) > u^4$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) < 20.\log K - 40.\log u$

Donc pour ξ > 0,707 la courbe du gain est <u>en dessous</u> des asymptotes

Si ξ < 0,5 alors : $(4.\xi^2 - 2) < -1$ pour $\omega < \omega_0$: u<1 $\Rightarrow$ $A(u) < 1$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) > 20.\log K$

Et pour $\omega > \omega_0$: u>1 $\Rightarrow$ $A(u) < u^4$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) > 20.\log K - 40.\log u$

Donc pour ξ < 0,5 la courbe du gain est <u>au dessus</u> des asymptotes

Si 0,5 < ξ < 0,707 alors : $4.\xi^2 - 2 < 0$ Donc :

Pour $\omega \to 0$: $u \to 0$ on a : $A(u) < 1$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) > 20.\log K$

Pour $\omega \to \infty$: $u \to \infty$ on a : $A(u) < u^4$ $\Rightarrow$ $G_{dB}(\omega) > 20.\log K - 40.\log u$

Donc pour 0,5 < ξ < 0,707 la courbe du gain est <u>au dessus</u> des asymptotes <u>sauf au voisinage de ω_0.</u>

Résonnance pour $\xi < 0,707$

On a : $G_{dB}(u) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log\left((1-u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2 \right)$

Donc : $\dfrac{d\,G_{dB}(u)}{du} = -\dfrac{10}{\ln 10} \,.\, \dfrac{2.(1-u^2).(-2.u) + 8.\xi^2.u}{(1-u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2} = \dfrac{10}{\ln 10}.4.u.\dfrac{1-u^2-2.\xi^2}{1+(4.\xi^2-2).u^2+u^4}$

Par conséquent : $\dfrac{d\,G_{dB}(u)}{du} = 0 \quad \Leftrightarrow 1-u^2-2.\xi^2 = 0 \quad\quad \Leftrightarrow u = \sqrt{1-2.\xi^2}$

La courbe de gain présente donc un maximum à la pulsation : $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0 \,.\, \sqrt{1-2.\xi^2}}$

Ce maximum est de : $G_{dB}(\omega_0) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log\left((1-1+2.\xi^2)^2 + 4.\xi^2.(1-2.\xi^2) \right)$

$G_{dB}(\omega_0) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log(4.\xi^4 + 4.\xi^2 - 8.\xi^4)$

$G_{dB}(\omega_0) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log\left(4.\xi^2 - 4.\xi^4\right) = 20 \,.\, \log K - 10 \,.\, \log\left(4.\xi^2.(1-\xi^2)\right)$

Donc pour $\xi < 0,707$ il y a une fréquence de résonance : $\boldsymbol{\omega_r = \omega_0 \,.\, \sqrt{1-2.\xi^2}}$

Avec un facteur de résonnance de : $\boldsymbol{Q_{rdB} = G_{db}(\omega_r) - G_{dB}(0) = -20 \,.\, \log\left(2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}\right)}$

5- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert du second ordre

Un premier ordre généralisé H(p) peut s'écrire comme le produit de deux fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$ où $H_1(p)$ est un premier ordre simple de gain K et $H_2(p)$ est une fonction de rang 1 et de gain 1 : $\boldsymbol{H_1(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}}$ **et** $\boldsymbol{H_2(p) = 1 + c.\tau.p}$ D'où les expressions du gain dynamique et de la phase :

$\boldsymbol{G_{db}(\omega) = 20.\log K - 10.\log(1+\tau^2.\omega^2) + 10.\log(1+c^2.\tau^2.\omega^2)}$ et : $\boldsymbol{\varphi(\omega) = \arctan(c.\tau.\omega) - \arctan(\tau.\omega)}$

Valeurs caractéristiques du diagramme de phase

On a : $\dfrac{d\,\varphi(\omega)}{d\omega} = \dfrac{c.\tau}{1+c^2.\tau^2.\omega^2} - \dfrac{\tau}{1+\tau^2.\omega^2} = \dfrac{\tau.(c + c.\tau^2.\omega^2 - 1 - c^2.\tau^2.\omega^2)}{(1+c^2.\tau^2.\omega^2).(1+\tau^2.\omega^2)}$

Donc : $\dfrac{d\,\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow c + c.\tau^2.\omega^2 - 1 - c^2.\tau^2.\omega^2 = 0 \Leftrightarrow (c.\tau^2.\omega^2 - 1).(1-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c.\tau^2.\omega^2 = 1$

Le maximum du déphasage est donc obtenu pour une pulsation : $\boldsymbol{\omega_M = \dfrac{1}{\tau.\sqrt{c}}}$

Ce maximum est donc de : $\varphi(\omega_M) = \arctan\left(c.\tau.\dfrac{1}{\tau.\sqrt{c}}\right) - \arctan\left(\tau.\dfrac{1}{\tau.\sqrt{c}}\right) = \arctan\sqrt{c} - \arctan\dfrac{1}{\sqrt{c}}$

On a donc : $\tan\varphi(\omega_M) = \tan\left(\arctan\sqrt{c} - \arctan\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right) = \dfrac{\sqrt{c} - 1/\sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}\,.\,1/\sqrt{c}} = \boldsymbol{\dfrac{c-1}{2.\sqrt{c}} = \tan\varphi(\omega_M)}$

Soit : $\dfrac{\sin^2\varphi_M}{1-\sin^2\varphi_M} = \dfrac{(c-1)^2}{4.c} \quad \Leftrightarrow \quad 4.c.\sin^2\varphi(\omega_M) = (c-1)^2 - (c^2 - 2.c + 1).\sin^2\varphi(\omega_M)$

$\Leftrightarrow \quad (c^2 + 2.c + 1).\sin^2\varphi(\omega_M) = (c-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad (c+1)^2.\sin^2\varphi(\omega_M) = (c-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sin\varphi(\omega_M) = \dfrac{c-1}{c+1}}$

Valeurs caractéristiques du diagramme de gain

On sait que : $G_{db}(\omega) = 20.\log K - 10.\log(1+\tau^2.\omega^2) + 10.\log(1+c^2.\tau^2.\omega^2)$ Donc :

Pour : $\omega \to \infty$ $\quad G_{db}(\omega) \to 20.\log K - 10.\log(\tau^2.\omega^2) + 10.\log(c^2.\tau^2.\omega^2) = 20.\log K + 10.\log c^2$

Soit : $\boldsymbol{G_{db}(\omega) \to 20.\log K + 20.\log c}$

A la pulsation : $\boldsymbol{\omega_M = \dfrac{1}{\tau.\sqrt{c}}}$ on a : $G_{db}(\omega) = 20.\log K - 10.\log(1+1/c) + 10.\log(1+c)$

$G_{db}(\omega) = 20.\log K + 10.\log\dfrac{1+c}{1+1/c}$ $\quad \boldsymbol{G_{db}(\omega_M) = 20.\log K + 10.\log c}$