

**PSI 2023–2024**  
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Devoir surveillé N°2  
Le 13 Novembre 2023 - Durée 4h

**Automate d'exploration de l'hémostase**

Sujet de concours CCP MP 2015 (légèrement modifié)

**Composition du sujet**

|  |                            |
|--|----------------------------|
| <u>Présentation du système : Mise en situation – fonctionnement – cahier des charges</u> | <u>Pages 1/19 à 4/19</u>   |
| <u>Énoncé des questions , hypothèses et données complémentaires :</u>                    | <u>Pages 4/19 à 17/19</u>  |
| <u>Documents réponses :</u>  | <u>Pages 18/19 à 19/19</u> |

**Consignes pour la réalisation du devoir surveillé**

**Il ne vous est pas demandé de traiter toutes les questions.**

**Vous ne répondrez qu'aux questions 1 à 13 puis 25 à 37**

**Vous ne traiterez pas les questions 14 à 24 et 38 à 40 qui sont grisées**

**Répondre sur copie en y joignant uniquement les deux pages  
du document réponse. Feuille que vous dégrafferez**

# Automate d'exploration de l'hémostase

## 1 Présentation du système

### 1.1 Le support

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose.

L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie.

L'objet de cette étude, le STA Compact (figure 1), est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.



Figure 1 : STA compact

Les figures 2 et 3 situent le STA Compact dans son environnement et précisent ses fonctions.

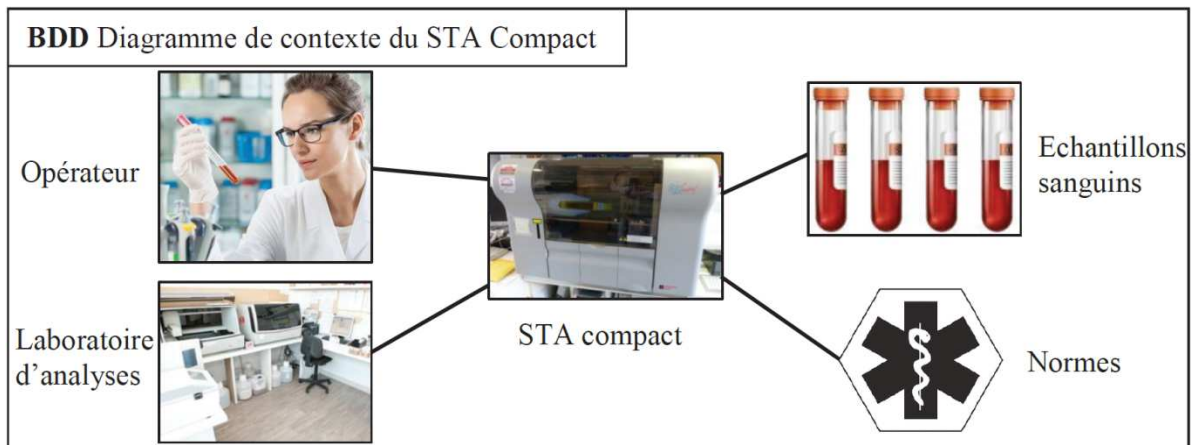


Figure 2 : Diagramme de contexte du STA Compact

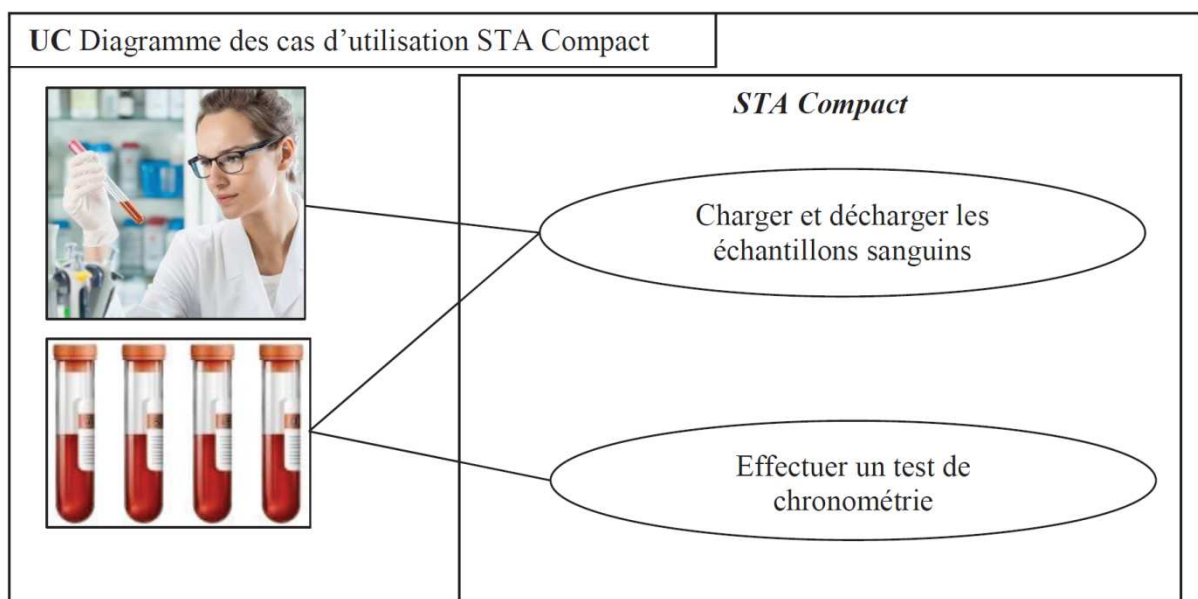


Figure 3 : Diagramme des cas d'utilisation du STA Compact

## 1.2 La chronométrie

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

### 1.2.1 Principe

Le principe du test de chronométrie est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille ;
- l'ensemble est chauffé alors que la bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique ;
- on mesure l'amplitude de l'oscillation qui diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif ;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

### 1.2.2 Déroulement d'un test de chronométrie (voir dessin figure 4 et les diagrammes des exigences figures 5 et 6)

#### Etape 1 : préparation

Les flacons de plasma sanguin à analyser sont placés dans un tiroir, de même que les flacons de réactifs. Afin de garantir la stérilité, les flacons sont fermés par un opercule qui sera percé par l'aiguille de prélèvement.

Des cuvettes, contenant une bille, sont au préalable clipsées sur une bande, elle-même enroulée sur une bobine de stockage.

Pour chaque test, une cuvette (et sa bille) est déclipée et placée dans la zone d'étuvage à l'aide d'un vérin (non étudié ici).

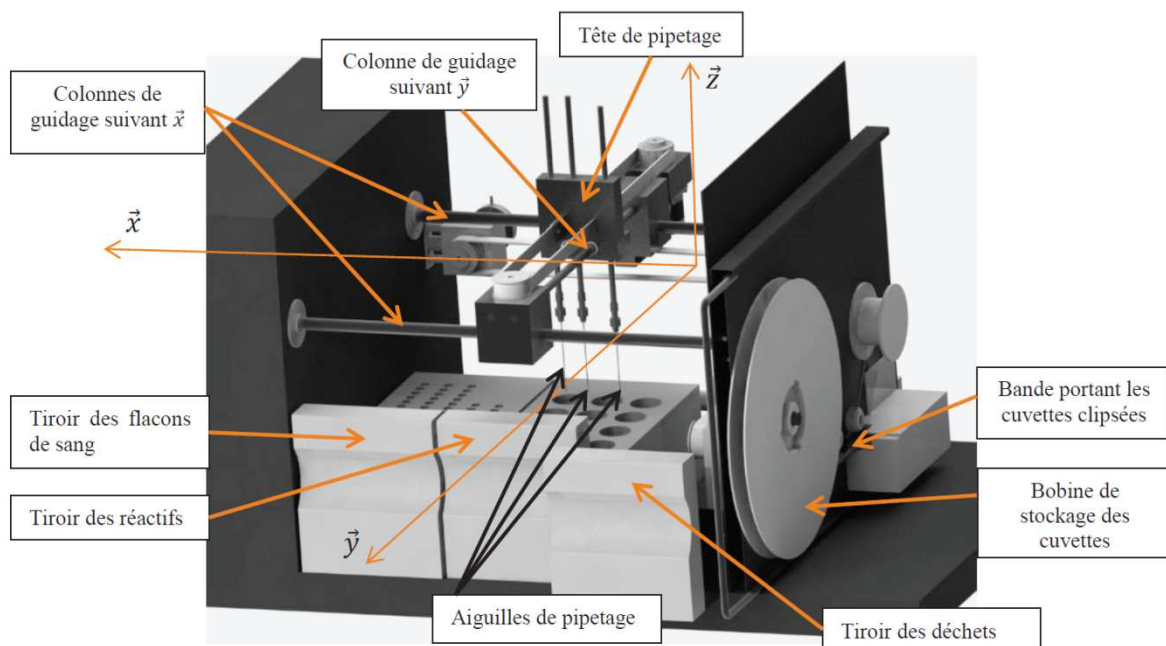


Figure 4 : Structure interne du STA Compact

#### Etape 2 : prélèvement des produits

Les aiguilles de prélèvement des doses de plasma et de réactifs sont reliées à la tête de pipetage. Elles peuvent avoir un mouvement de translation verticale (selon la direction  $\vec{z}$ ) par rapport à cette tête. Deux types de réactifs sont utilisés. La tête de pipetage possède donc trois aiguilles : une pour le sang et une par type de réactif.

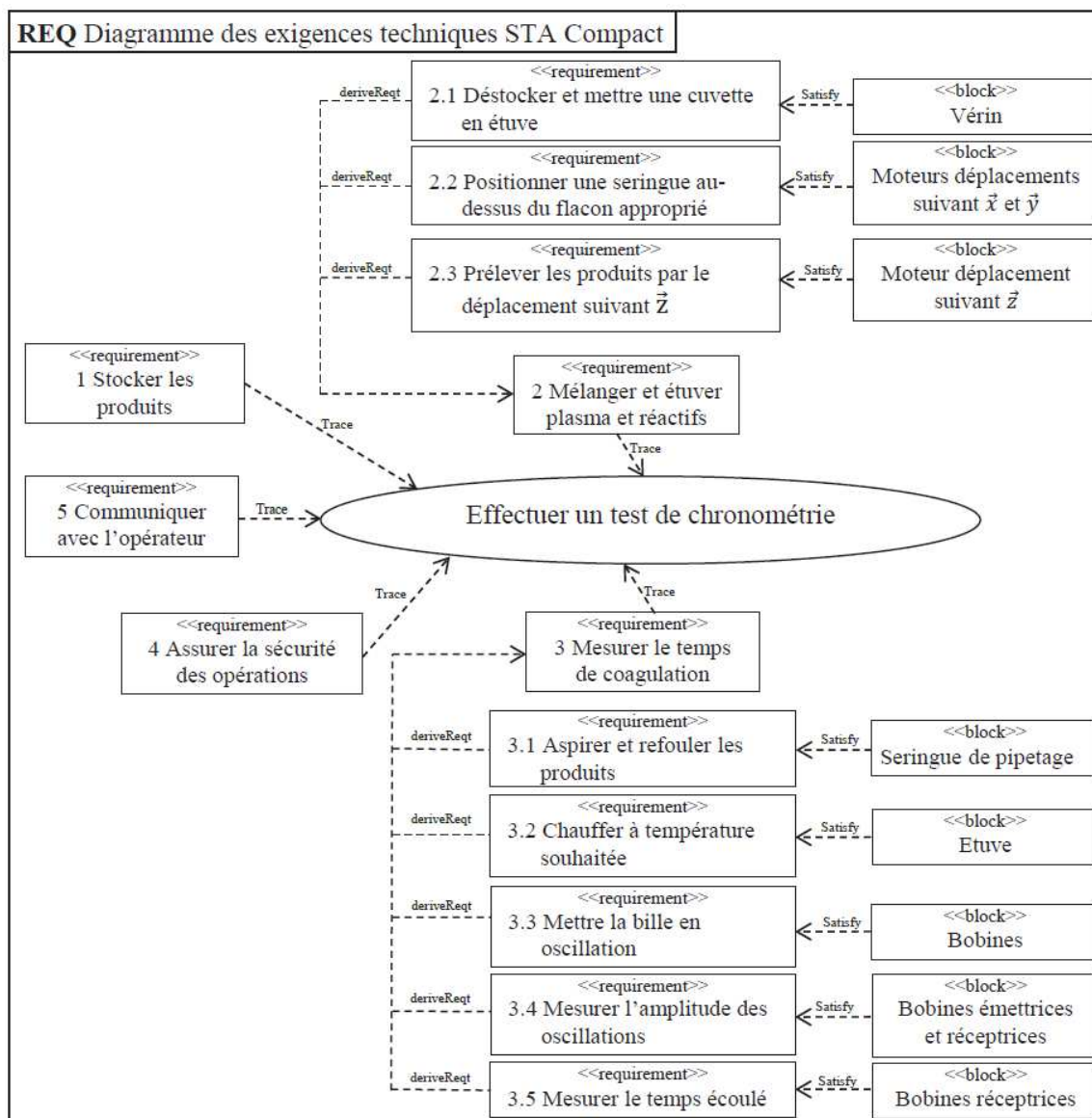


Figure 5 : Diagramme des exigences techniques avec les solutions technologiques

Successivement, pour chaque produit (plasma puis réactifs), la tête de pipetage est positionnée au-dessus du flacon approprié, l'aiguille correspondante prélève la quantité nécessaire, puis l'ensemble tête de pipetage/aiguilles vient déposer le produit dans la cuvette d'analyse. Les aiguilles sont ensuite plongées dans un flacon de nettoyage. L'aspiration et le refoulement des liquides (plasma et réactifs) se font à l'aide d'une même seringue de pipetage motorisée (non représentée).

### Etape 3 : mesure

Lorsque le mélange est réalisé dans la cuvette, celle-ci est placée dans la zone de mesure. Deux bobines motrices provoquent l'oscillation de la bille. Deux autres bobines, l'une émettrice et l'autre réceptrice, effectuent la mesure des amplitudes d'oscillation.

Le test terminé, la cuvette est placée dans un tiroir à déchets.

Le système est connecté à un poste informatique permettant les échanges d'ordres et de comptes-rendus avec le manipulateur.

Le diagramme de la figure 5 présente un extrait du diagramme des exigences techniques assorti des éléments qui permettent de satisfaire ces exigences.

La figure 6 présente un extrait du diagramme des exigences, se limitant à celles pour lesquelles nous allons étudier certains critères.

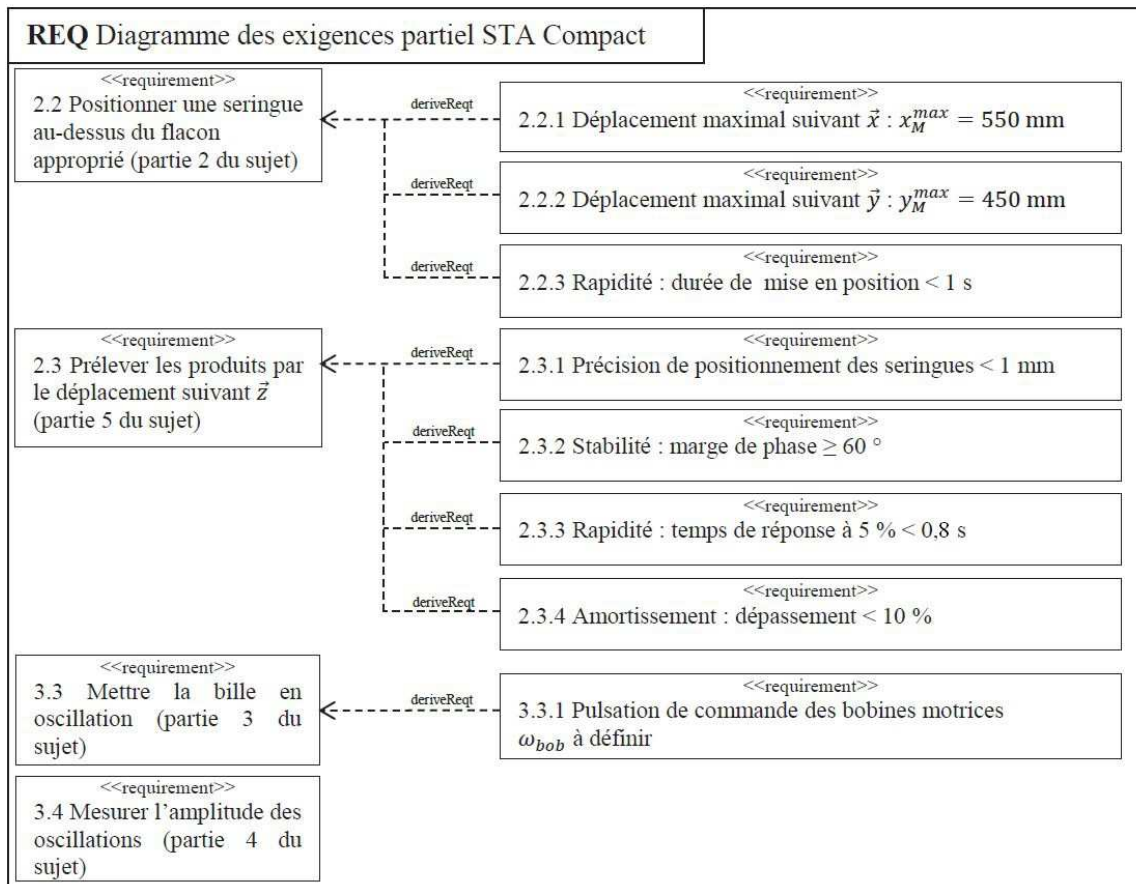


Figure 6 : Diagramme partiel des exigences

L'étude comporte 4 parties :

- la partie 2 analyse les solutions techniques mises en place pour satisfaire à l'exigence 2.2 « Positionner une seringue au-dessus du flacon approprié » et plus particulièrement à la loi de commande des moteurs ;
- les parties 3 et 4 analysent les solutions techniques et informatiques pour satisfaire à l'exigence 3 « Mesurer le temps de coagulation » ;
- la partie 5 analyse la capacité du système à satisfaire à l'exigence 2.3 « Prélever les produits » et plus particulièrement l'exigence relative à la précision du volume prélevé.

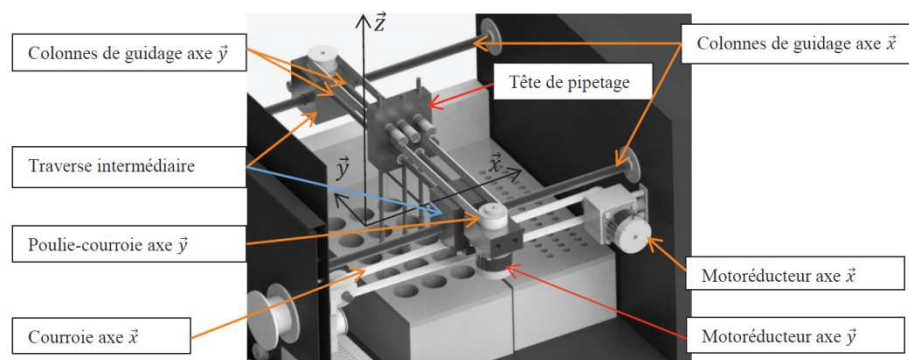
## 2 Analyse de l'exigence 2.2 « Positionner une seringue au-dessus d'un flacon »

Objectif : déterminer la loi de commande en vitesse optimale des axes de translation  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

### 2.1 Mise en situation

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 8, est guidée en translation suivant  $\vec{y}$  par rapport à une traverse intermédiaire.

Cette traverse étant elle-même guidée en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti (figure 7).

Figure 7 : Système de guidage suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$



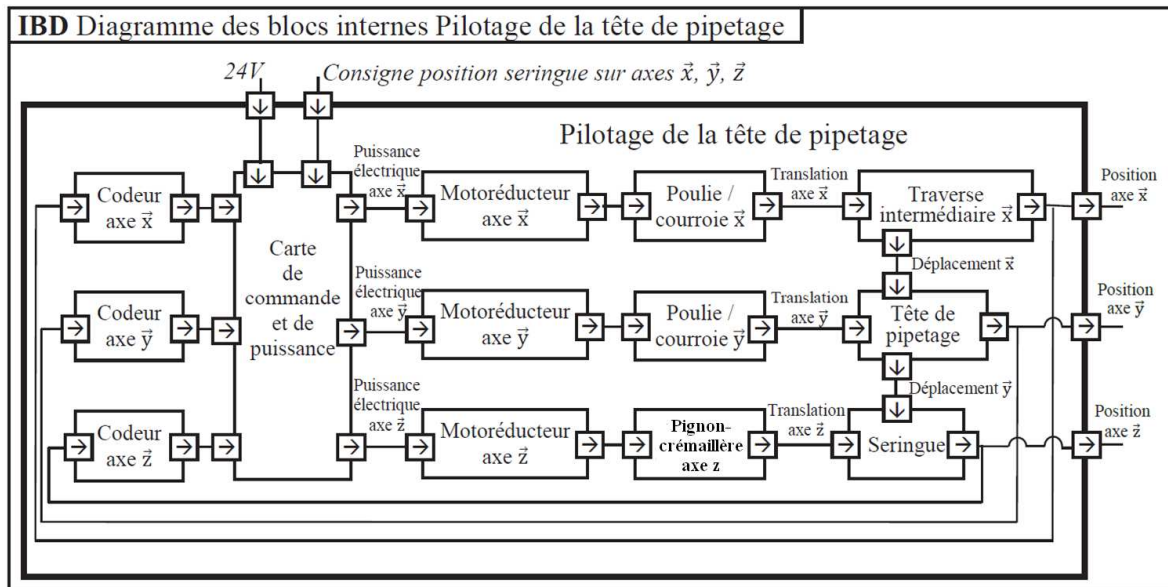


Figure 8 : Diagramme de bloc interne de la tête de pipetage

A la mise en service de l'appareil, la tête de pipetage est placée à une position de référence.

Après chaque déplacement, la tête revient à cette position de référence qui permet le nettoyage des aiguilles.

On se propose d'étudier le protocole de déplacement de cette tête pour atteindre une position définie par un point M de coordonnées  $(x_M, y_M, 0)$  par rapport à la position de référence.

Chaque axe est mis en mouvement par un motoréducteur et un système poulie-courroie.

Les vitesses de translation maximum sur chaque axe ( $V_{max}^x$  et  $V_{max}^y$ ) sont obtenues pour les vitesses de rotation maximum des moteurs. Les chaînes cinématiques sont identiques : nous avons donc  $V_{max}^x = V_{max}^y = V_{max}$

Soient  $V_M^x$  et  $V_M^y$  ( $V_M^x$  et  $V_M^y \leq V_{max}$ ) les vitesses maximum suivant chaque axe lors du déplacement pour atteindre le point M de coordonnées  $(x_M, y_M, 0)$ .

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe  $\vec{x}$  qui est le plus grand. On note  $V^x$  la vitesse de la tête de pipetage selon cet axe.

On rappelle que la distance maximum à parcourir est  $x_M^{max} = 550 \text{ mm}$  en 1 seconde.

La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (figure 9) avec les temps d'accélération et de décélération ( $T_a$ ) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps. T est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

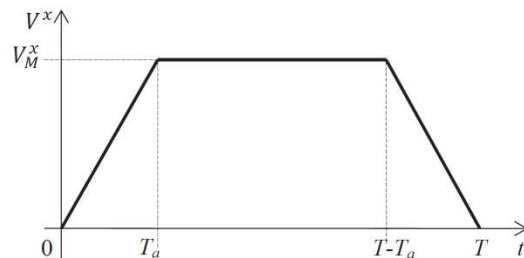


Figure 9 : Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse  $\omega_M^x$ ) est transformé en mouvement de translation (vitesse  $V^x$ ) ;
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est  $\lambda = \frac{V^x}{\omega_M^x}$  ;
- la distance à parcourir est  $x_M^{max}$  ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est  $J_e$  ;
- pour cette question, frottements et pesanteur sont négligés : il n'y a pas de couple résistant.

**Question 1 :** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{max}$ ,  $T$  et  $T_a$ .

**Question 2 :**

- Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, on montre que :  $C_m = \frac{J_e}{\lambda} \frac{d v^x(t)}{dt}$ . Exprimer, pour chacune des trois phases du mouvement, le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$ .
- Préciser à quel(s) instant(s) la puissance fournie par le moteur est maximale :  $P_{max}$ .
- Exprimer cette puissance  $P_{max}$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$ .
- Donner alors l'expression de  $P_{max}$  en fonction de  $x_M^{max}$ ,  $T$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$ .

**Question 3 :** A partir de cette expression, montrer que  $P_{max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération  $T_a$  tel que :  $T_a = T/3$ .

Pour cette nouvelle commande avec  $T_a = T/3$ , on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant  $\vec{x}$ .

Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

- vitesse maximale du moteur :  $N_{max}^{mot} = 4150 \text{ tr. min}^{-1}$ ;
- rapport de réduction du réducteur  $k = 1/10$ ;
- rayon de la poulie du système poulie courroie de l'axe  $x$  :  $R_p = 20 \text{ mm}$ .

**Question 4 :** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

### 3 Analyse de l'exigence 3.3 « Mettre la bille en oscillation »

Objectif : déterminer la pulsation optimale des bobines motrices.

#### 3.1 Mise en situation

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (figures 10 et 11).

La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice.

Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

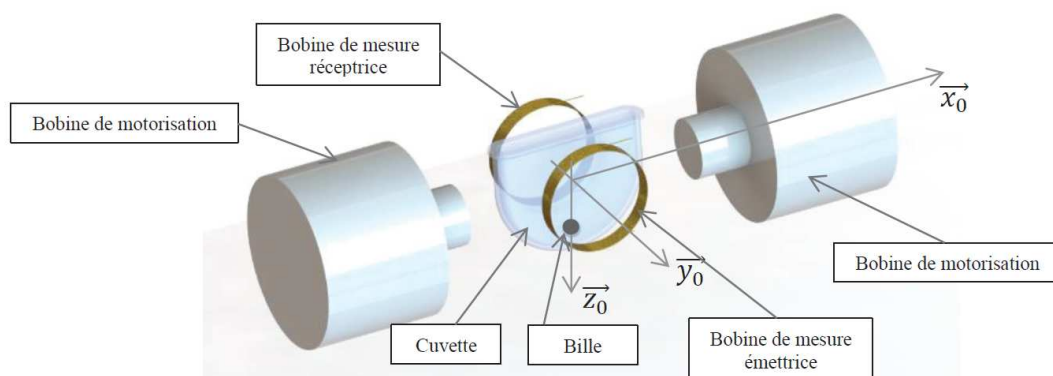


Figure 10 : Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

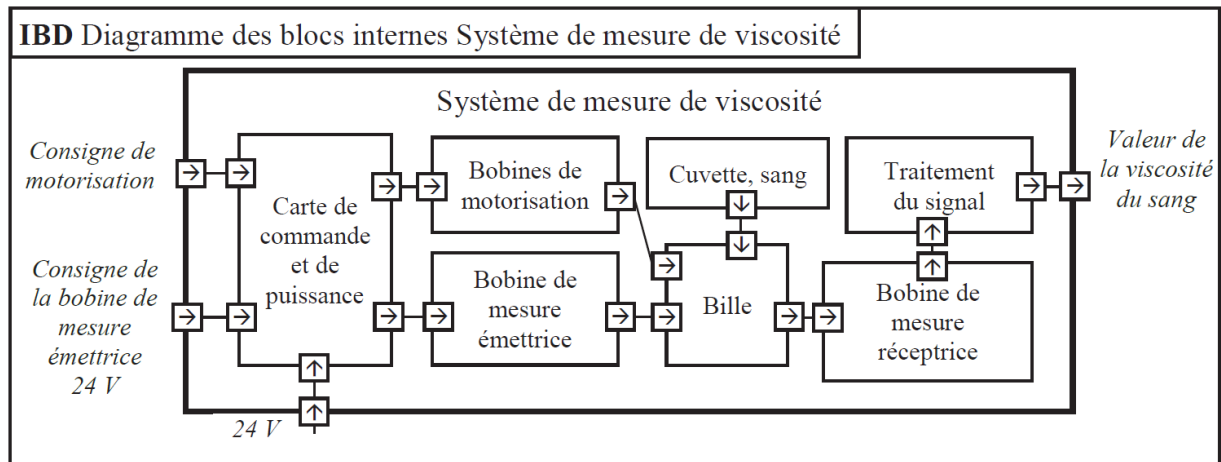


Figure 11 : Diagramme de bloc interne du système de mesure

Dans un premier temps, on se propose de modéliser le comportement de la bille pour en déduire le réglage de la commande des bobines motrices (partie 3.3).

Dans un second temps, un algorithme détermine le temps de coagulation à partir de l'amplitude des oscillations. Celui-ci sera défini paragraphe 4.1 (partie informatique).

### 3.2 Hypothèses de calculs

Le schéma de calcul est donné figure 16.

Hypothèses :

- la bille de masse :  $m = 4,08 \text{ g}$ , de centre de masse  $G$ , de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon  $R$  dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ . Cette hypothèse de roulement sans glissement sera vérifiée paragraphe 3.4 (partie informatique) ;
- $I$  est le point de contact entre la bille et le rail circulaire ;
- la position de la bille sur le rail est repérée par :  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

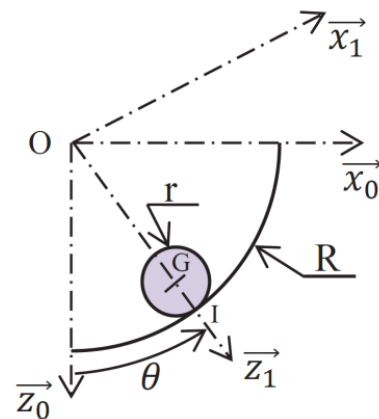


Figure 12 : Bille en contact avec le rail de la cuvette

On note :

- $\{T(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} -N_I \cdot \vec{z}_1 + T_I \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$ , le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille ;
- $f$  le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette :  $f = 0,1$
- $\{T(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec :  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{\text{bob}} t)$  ;
- $\{T(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_v(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -F_v \cdot \vec{V}(G \in \text{bille}/O) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors  $f_v = 6\pi \cdot r \cdot \eta$  où  $\eta$  est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation ;
- $\{T(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{matrix} m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille ;



- $\{V(bille/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(bille/0) = \omega_b \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{V}(G \in bille/0) = v \cdot \vec{x}_1 \end{array} \right\}_G$ , le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0 ;
- $J_G = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ , le moment d'inertie de la bille autour de l'axe  $(G, \vec{y}_0)$  ;
- $R = \|\vec{OI}\|$ , le rayon du rail :  $R = 19,7$  mm,  $r = \|\vec{GI}\|$ , le rayon de la bille :  $r = 5$  mm

On notera  $F(p)$  la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  où  $p$  représente la variable de Laplace.

### 3.3 Analyse

**Question 5 :** Déterminer l'expression de la composante «  $v$  » du vecteur vitesse du centre de gravité de la bille ( $\vec{V}(G \in bille/0) = v \cdot \vec{x}_1$ ) en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $\omega_b$  et/ou  $\dot{\theta}$ , de deux manières différentes pour en déduire la vitesse de rotation de la bille  $\omega_b$  en fonction de  $\dot{\theta}$ .

- Par dérivation vectorielle du vecteur position de  $G$ . ( $v$  en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $r$  et  $R$ )
- En exprimant la condition de roulement sans glissement en  $I$ . ( $v$  en fonction de  $\omega_b$  et  $r$ )
- En déduire l'expression de la vitesse de rotation de la bille  $\omega_b$  en fonction de  $\dot{\theta}$ .

**Question 6 :** Les deux équations différentielles (1) et (2) ci-dessous donnent les relations entre les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille et l'angle  $\theta(t)$ . Comment ont-elles été obtenues. Citer, sans développer les calculs, le(s) théorème(s) et projections utilisés.

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R - r)\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$T_I = \frac{2}{5} m(r - R)\ddot{\theta} \quad (2)$$

**Question 7 :** Déterminer l'expression, en fonction de  $m$  et  $r$ , de  $J_I$  le moment d'inertie de la bille autour de l'axe  $(I, \vec{y}_0)$

**Question 8 :** Etant donné le roulement sans glissement de la bille au point  $I$ , le mouvement de la bille par rapport au rail 0 est une rotation d'axe  $(I, \vec{y}_0)$ . En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à cette bille, montrer qu'on a l'équation (3) de mouvement de la bille. Donner les expressions de  $A$ ,  $B$  et  $C$  en fonction de  $f_v$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $m$  et  $g$ .

$$A \cdot \ddot{\theta}(t) + B \cdot \dot{\theta}(t) + C \cdot \sin \theta(t) = F(t) \cos \theta(t) \quad (3)$$

**Question 9 :**  $\theta$  étant petit, linéariser cette équation, la passer dans le domaine de Laplace (Les conditions initiales étant nulles) puis en déduire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)}$ .

**Question 10 :** Mettre  $H(p)$  sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique  $K_S$ , de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\xi$  en fonction de  $f_v$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $m$  et  $g$ .

Pour la question suivante, on prendra les valeurs numériques suivantes :

$$\omega_0 = 21,82 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad K_S = 25 \text{ N}^{-1}; \quad \xi = 4 \cdot f_v$$

On précise que pour une fonction du second ordre, le gain dynamique en fonction de la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$G_{db}(\omega) = 20 \cdot \log K_S - 10 \cdot \log((1 - u^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot u^2) \text{ avec : } u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

**Question 11 :** Tracer, sur le document réponse (Question 11), le diagramme asymptotique de Bode en gain, ainsi que l'allure du diagramme réel pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux :  $f_v = 0,005$ ;  $f_v = 0,05$ ;  $f_v = 0,2$

**Question 12 :** La sollicitation des bobines est sinusoïdale :  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{bob} t)$ . Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation  $\omega_{bob}$  pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement  $f_v$ . Cette pulsation est constante pendant toute la mesure quelque soit la valeur du coefficient de frottement  $f_v$ , qui lui varie.

**Question 13 :**

- a. Exprimer, pour un système du second ordre, en fonction de  $\xi$ , le rapport des amplitudes de sortie à  $\omega \rightarrow 0$  (Noté  $A_0$ ) et  $\omega = \omega_0$  (Noté  $A_{\omega_0}$ ) pour une même amplitude du signal d'entrée. C'est-à-dire le rapport :  $\frac{A_0}{A_{\omega_0}}$  Où la sortie du système du second ordre est une sinusoïde d'expression  $s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  pour une entrée sinusoïdale :  $e(t) = E \cdot \sin(\omega t)$
- b. Les figures 13 a, et 13 b représentent, avec  $f_v$  constant, l'évolution de la position de la bille  $\theta$  [degré] en fonction du temps  $t$  [s] pour trois valeurs de pulsation  $\omega_{bob}$ . De ces courbes et des résultats précédents, en déduire la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ .
- c. En déduire la valeur numérique du coefficient de viscosité  $\eta$  du sang correspondant.
- d. A partir de ces analyses, en justifiant votre réponse, donner la variation de l'amplitude de  $\theta$  en fonction de  $t$ , obtenue à la pulsation  $\omega_0$  lorsque la viscosité du sang varie au fur et à mesure de la coagulation (si l'on suppose que  $f_v$  augmente avec la coagulation).

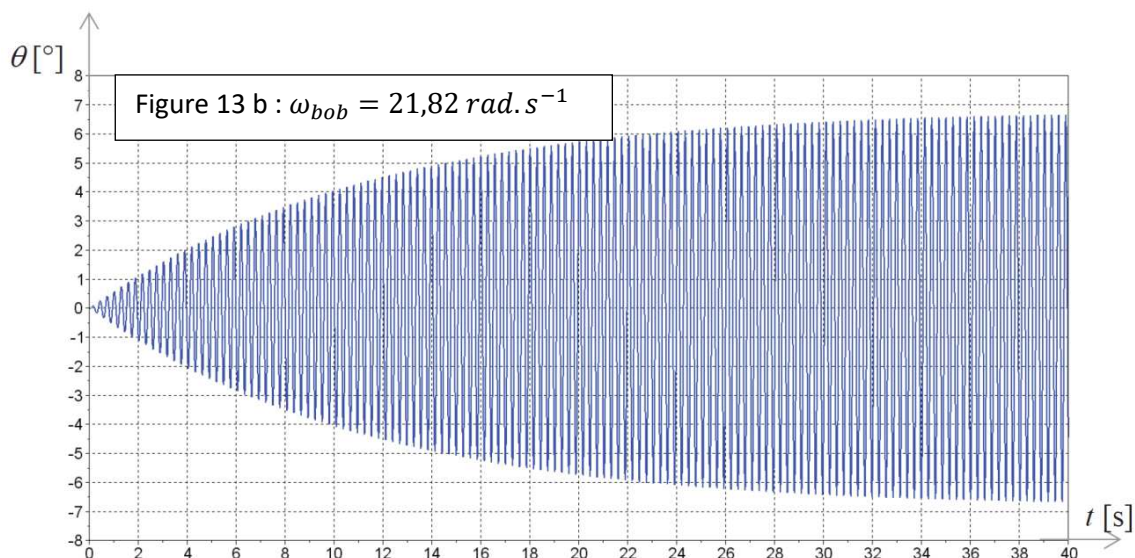
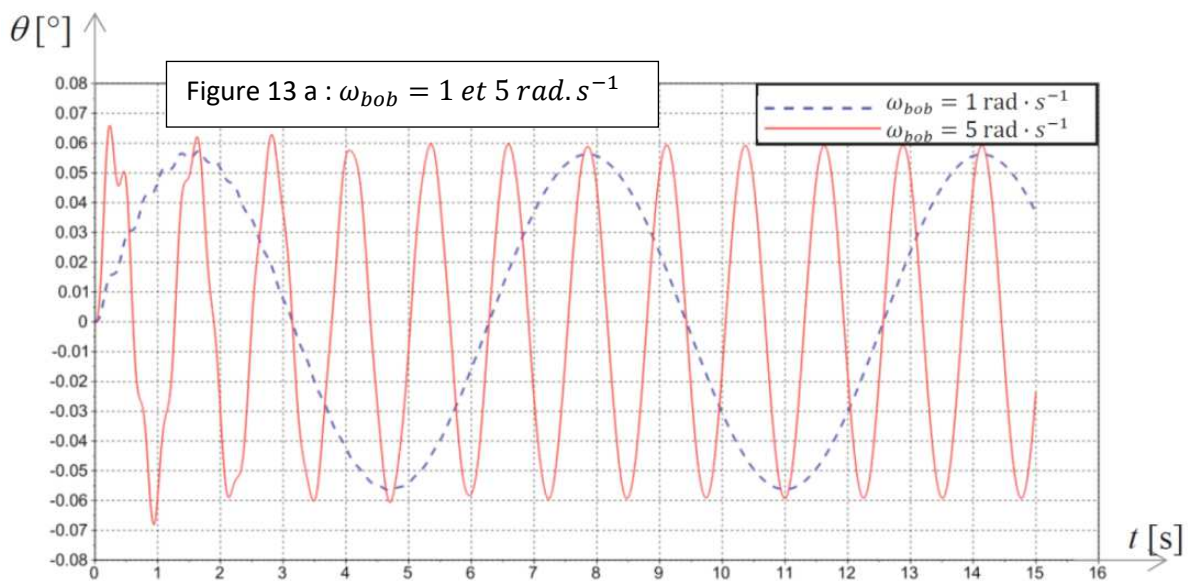


Figure 13 :  $\theta$  [°] en fonction de  $t$  [s] pour 3 valeurs de  $\omega_{bob}$

### 3.4 Validation des hypothèses (partie informatique)

Objectif : on se propose de vérifier la validation de l'hypothèse de linéarisation faite Question 22, ainsi que l'hypothèse de roulement sans glissement faite Question 5.

Ce paragraphe fait plus spécifiquement appel aux compétences acquises dans le cadre du programme d'informatique. Le candidat est libre de choisir entre les langages Python et Scilab pour l'écriture des fonctions demandées.

On désigne par tableaux les éléments qui pourraient être de type list ou ndarray sous Python ou matrice sous Scilab.

Cette étude se fera en 3 temps :

- résolution de l'équation différentielle non linéaire ;
- validation de la linéarisation ;
- validation de l'hypothèse de roulement sans glissement.

En posant  $Y$  tel que  $Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ , équation différentielle (3) peut se mettre sous la forme du problème de Cauchy :  $\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$  avec

$$F(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \frac{5}{7m(R-r)} (F_0 \cdot \sin(\omega_{bob} t) \cdot \cos \theta(t) - f_v(R-r)\dot{\theta}(t) - mg \cos \theta(t)) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{pmatrix}$$

La réponse  $\theta(t)$  recherchée sur l'intervalle  $[0, T_{maxi}]$  sera obtenue par la méthode d'Euler explicite.

On a les conditions initiales :  $\dot{\theta}(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$

Le pas de calcul, noté  $h$ , sera choisi constant.

L'intervalle de temps discrétisé est représenté par le tableau :  $T = [t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1} = T_{maxi}]$

Pour chaque instant  $t_i$ , une valeur approchée  $Y_i$  de la solution  $Y(t_i)$  de l'équation différentielle est recherchée. L'ensemble des  $Y_i$  et des temps  $t_i$  représente  $N$  vecteurs de dimensions 3, qui seront stockés en mémoire sous la forme :

- soit d'un tableau :  $SY = \begin{bmatrix} 0 & \theta(0) & \dot{\theta}(0) \\ t_1 & \theta(t_1) & \dot{\theta}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{maxi} & \theta(T_{maxi}) & \dot{\theta}(T_{maxi}) \end{bmatrix}$  ;
- soit d'une liste de listes :

$$SY = \left[ [0, \theta(0), \dot{\theta}(0)], [t_1, \theta(t_1), \dot{\theta}(t_1)], [T_{maxi}, \theta(T_{maxi}), \dot{\theta}(T_{maxi})] \right]$$

Les grandeurs physiques  $m, R, r, f_v, g, F_0$  et  $\omega_{bob}$  sont appelées  $m, R, r, f_v, g, F_0, \omega_{bob}$  et ont été initialisées en début de programme.

**Question 14 :** Donner la relation de récurrence qui lie  $Y_{i+1}$  à  $Y_i, F(t_i, Y_i)$  et le pas de calcul  $h$ .

**Question 15 :** Écrire une fonction  $fi(t_i, Y_i)$ , qui prend pour arguments  $t_i$  la valeur du temps discrétisé et  $Y_i$  la valeur du vecteur  $Y$  au temps discrétisé  $t_i$  et qui retourne la valeur de  $F(t_i, Y(t_i))$ .

**Question 16 :** Écrire une fonction **Euler**( $Y_{ini}, h, T_{maxi}, F$ ) qui prend en paramètres  $Y_{ini}$  un tableau à 2 dimensions (ou une liste de listes) contenant la condition initiale  $Y_0$ ,  $h$  le pas de calcul,  $T_{maxi}$  le temps final de calcul et  $F$  la fonction du problème de Cauchy. Cette fonction renverra le tableau  $SY$ . L'appel à cette fonction dans le programme se fera par la commande  $SY = \mathbf{Euler}(Y_0, h, T_{maxi}, fi)$ .

**Question 17 :** Donner la complexité de la fonction **Euler** pour  $T_{maxi}$  fixée. En déduire comment évolue le temps de calcul quand le pas  $h$  est divisé par 10.

Afin de vérifier l'hypothèse du roulement sans glissement de la bille sur le rail, on doit vérifier qu'en chaque instant  $t_i$  on a  $\left| \frac{T_l}{N_l} \right| \leq f$  ( $f = 0,1$  coefficient d'adhérence de la bille sur le rail).

**Question 18 :** Écrire une fonction **VerifRSG**( $SY, f$ ) qui prend pour argument le tableau  $SY$  et  $f$  (coefficient d'adhérence de la bille sur le rail) et qui renvoie **True** si le critère d'adhérence est vérifié (c'est-à-dire si  $\left| \frac{T_l}{N_l} \right| \leq f \forall t_i$ ), **False** sinon.

Les figures 14 ,a, b, c et 15 ci-dessous sont issues de la résolution numérique.

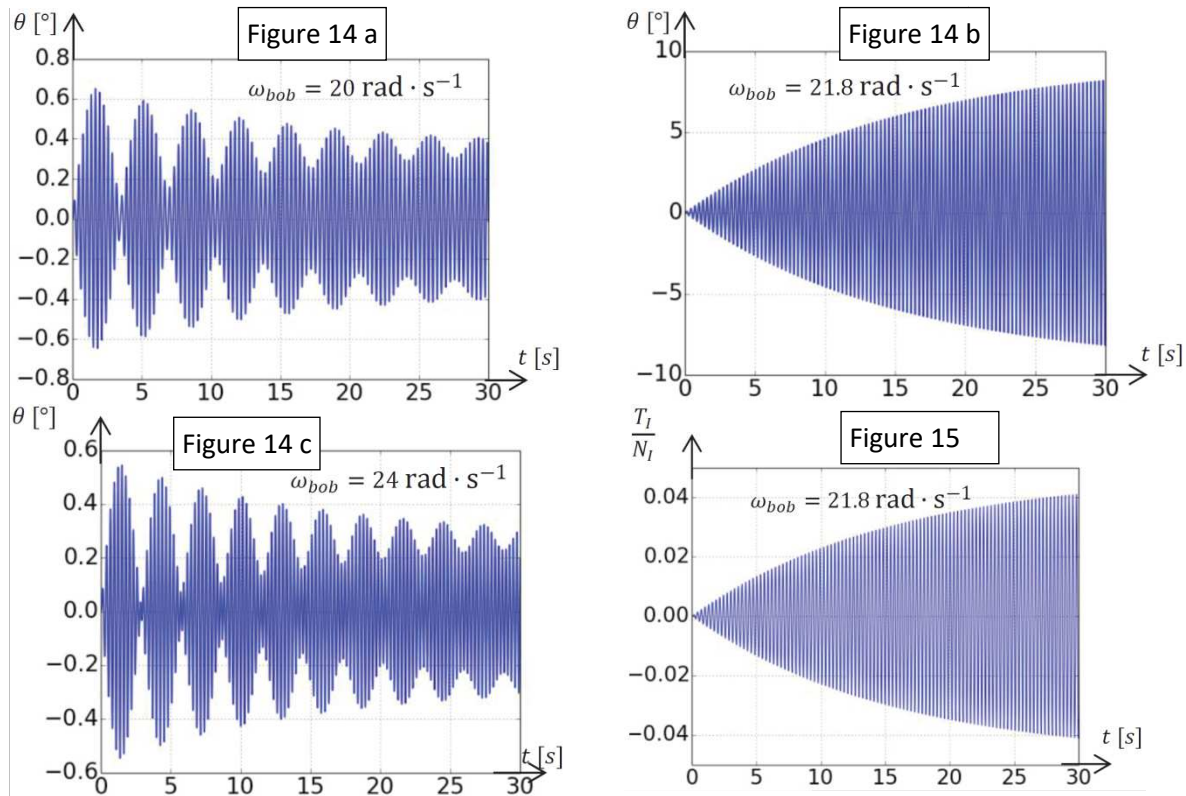


Figure 14 :  $\theta$  [°] en fonction de  $t$  [s] pour différentes valeurs de  $\omega_{bob}$

Figure 15 :  $T_l/N_l$  en fonction de  $t$  [s]

**Question 19 :** À partir de ces résultats, conclure quant aux hypothèses précédentes (validation de la linéarisation, hypothèse de roulement sans glissement).

#### 4 Analyse de l'exigence 3.4 « Mesurer l'amplitude des oscillations » (partie informatique)

**Objectif :** écrire un algorithme permettant de mesurer le temps de coagulation à partir des mesures réalisées par les deux bobines émettrice et réceptrice.

Cette partie fait plus spécifiquement appel aux compétences acquises dans le cadre du programme d'informatique. Le candidat est libre de choisir entre les langages Python et Scilab pour l'écriture des fonctions demandées.

Dans la suite, on désigne par tableaux les éléments qui pourront être définis de type list ou ndarray sous Python ou matrice sous Scilab (au choix du candidat).

L'étude se fait en deux temps :

- calcul du temps de coagulation à partir des valeurs stockées dans un tableau de mesures ;
- étude de la gestion du tableau de mesures.

#### 4.1 Calcul du temps de coagulation

Afin de mesurer le temps de coagulation, les signaux issus des bobines sont amplifiés, filtrés, échantillonnés puis stockés dans un tableau nommé  $M$ . La période d'échantillonnage est notée  $T_e$ .

On considèrera que la mesure s'effectue sur une durée fixe : la taille de  $M$  est fixe et égale à  $N_{maxi}$ .

Le temps de coagulation se détermine à partir de la valeur efficace du signal sur une durée donnée.

La **valeur efficace** (appelée aussi RootMean Square, ou moyenne quadratique) est définie par :

$X_{eff}(i) = \left(\frac{1}{N}\right) \sqrt{\sum_{k=i}^{N-1+i} x_k^2}$  où  $\{x_k\}$  sont les valeurs des  $N$  mesures successives considérées. Elle est donc l'image de l'amplitude des oscillations à l'instant considéré.

**Question 20 :** Écrire la fonction **Valeur\_efficace**( $T, a, b$ ), qui prend pour argument un tableau  $T$ , les entiers  $a$  et  $b$  et renvoie la valeur efficace des  $b$  éléments consécutifs du tableau à partir de l'indice  $a$ . On supposera pour cette question que  $a$  et  $b$  sont tels qu'il n'y a pas de débordement d'indice possible. Donner la complexité de la fonction **Valeur\_efficace**.

Dans la suite, on supposera  $N \ll N_{maxi}$ .

Le **temps de coagulation** est défini comme le temps au bout duquel la valeur efficace des signaux atteint 70 % de la valeur efficace initiale.

Si cette valeur n'est pas atteinte sur la totalité du tableau  $M$ , on considèrera que la mesure a échoué.

L'algorithme de calcul est le suivant :

**Données :**  $M, T_e, N$  : le tableau de mesures, la période d'échantillonnage (en millisecondes), le nombre de mesures à considérer.

**Résultat :**  $T_c$  le temps de coagulation (en secondes).

```

1  Temps_coagulation(M, T_e, N)
2      N_maxi ← taille(M)
3      X_eff_0 ← Valeur_efficace(M, 0, N)
4      i ← 0
5      X_eff ← X_eff_0
6      Tant que X_eff > 0,7 · X_eff_0 et que i < N_maxi - N faire
7          X_eff ← Valeur_efficace(M, i, N)
8          i ← i + 1
9      Fin Tant que
10     Si i = N_maxi - N
11         Retourner « la mesure à échoué »
12     Sinon
13         T_c ← i · T_e / 1000
14     Retourner T_c

```

**Question 21 :**

a. Quelle est la complexité de la fonction **Temps\_coagulation**( $M, T_e, N$ ) ?

b. On propose de modifier la ligne 7 de la façon suivante :

7'  $X_{eff} \leftarrow \sqrt{X_{eff} \cdot X_{eff} + M[i + N] \cdot M[i + N] - M[i] \cdot M[i]}$

Comparer les deux solutions en terme de temps d'exécution. Justifier.



## 4.2 Gestion du tableau de mesures

Afin d'optimiser la durée de l'analyse, le calcul de la valeur efficace des oscillations s'effectue en temps réel.

On admet l'existence d'une fonction **Mesure**, de paramètre  $T_e$  (période d'échantillonnage), qui fait l'acquisition d'une valeur issue des bobines après amplification et filtrage. Celle-ci renvoie la valeur de la mesure au prochain instant  $k \times T_e$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Il n'est pas demandé d'écrire cette fonction et elle pourra être directement appelée par la commande **Mesure**( $T_e$ ). On peut considérer que la durée du calcul du temps de coagulation est négligeable devant  $T_e$ .

Les mesures sont stockées dans une zone mémoire appelée tampon, de la façon suivante :

- les  $N$  premières mesures sont mémorisées dans le tampon ;
- à partir de la  $(N + 1)^{i\text{ème}}$  mesure, chaque nouvelle mesure est stockée en mémoire, alors que la plus ancienne est déstockée.

**Question 22 :** Pourquoi ne peut-on pas utiliser de structure de type pile pour gérer le tampon ?

On utilise une structure de type file pour gérer le tampon. Les fonctions relatives aux files sont voisines des fonctions relatives aux piles. Un tableau présentant ces deux structures est donné ci-dessous.

| Piles   | Files   |
|---|---|
| creer_pile() : renvoie une pile vide                                  | creer_file() : renvoie une file vide                                  |
| empiler( $p, a$ ) : ajoute un élément $a$ en tête de la pile $p$      | enfiler( $f, a$ ) : ajoute un élément $a$ en queue de la file $f$     |
| depiler( $p$ ) : renvoie et supprime l'élément en tête de la pile $p$ | defiler( $f$ ) : renvoie et supprime l'élément en tête de la file $f$ |

Toutes ces opérations s'effectuent en temps constant.

**Question 23 :** Écrire, en n'utilisant que la fonction **Mesure**( $T_e$ ) et les fonctions spécifiques aux files, la fonction **Init\_tampon**( $N, T_e$ ) qui crée une file d'attente  $T$ , réalise  $N$  mesures successives à la période  $T_e$  et stocke celles-ci dans  $T$ . Elle renvoie  $T$ .

L'algorithme de détermination du temps de coagulation est modifié de la façon suivante :

**Données :**  $M, T_e, N_{maxi}$  : le tableau de mesures, la période d'échantillonnage (en millisecondes), le nombre maximal de mesures réalisées.

**Résultat :**  $T_c$  le temps de coagulation (en secondes).

```

1  Temps_coagulation( $M, T_e, N_{maxi}$ )
2       $T \leftarrow \text{Init\_tampon}(N, T_e)$ 
3       $X_{eff_0} \leftarrow \text{Valeur\_efficace}(T)$ 
4       $i \leftarrow 0$ 
5       $X_{eff} \leftarrow X_{eff_0}$ 
6      Tant que  $X_{eff} > 0,7 \cdot X_{eff_0}$  et que  $i < N_{maxi} - N$  faire
7          --- à compléter ---
11          $i \leftarrow i + 1$ 
12     Fin Tant que
13     Si  $i = N_{maxi} - N$ 
14         Retourner « la mesure à échoué »
15     Sinon
16          $T_c \leftarrow i \cdot T_e / 1000$ 
17     Retourner  $T_c$ 

```

**Question 24 :** En n'utilisant que la fonction **Mesure**( $T_e$ ) et les fonctions spécifiques aux files, compléter, sur votre copie, les lignes 7 et suivantes de l'algorithme de mesure modifié.

## 5 Analyse de l'exigence 2.3 « Prélever les produits par le déplacement suivant $\vec{z}$ de la tête de pipetage »

Objectif : régler la commande du moteur afin de respecter le cahier des charges.

### 5.1 Modélisation de la motorisation

Les déplacements verticaux des aiguilles de la tête de pipetage (axe  $\vec{z}$ ) sont assurés par un ensemble motoréducteur à courant continu et système pignon-crémaillère.

On note :

- $\theta_m(t)$  et  $\omega_m(t)$  l'angle et la vitesse angulaire du moteur ;
- $\omega_r(t)$  la vitesse angulaire en sortie de réducteur ;
- $k_r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{19,2}$  le rapport de réduction du réducteur ;
- $c_m(t)$  le couple moteur ;
- $J_m$  le moment d'inertie du moteur par rapport à son axe de rotation et  $J_r$  le moment d'inertie du réducteur ramenée à l'arbre moteur ;
- $m_p = 0,2 \text{ kg}$  la masse en translation ;
- $F_r(t) = 1 \text{ N}$  l'effort de l'opercule sur l'aiguille ;
- $c_{res}$  le couple résistant ramené à l'arbre moteur modélisant l'ensemble des frottements, y compris les frottements internes au réducteur ( $c_{res} \leq 0$ ) ;
- $R_p = 10 \text{ mm}$  le rayon du pignon du système pignon crémaillère ;
- $\omega_{mn} = 4150 \text{ tr. min}^{-1}$  la vitesse de rotation nominale du moteur ;
- $c_{mn} = 5.10^{-3} \text{ N.m}$  le couple moteur nominal ;
- $E_c(S/R_g)$  l'énergie cinétique de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_g$ .

**Question 25 :** Déterminer l'expression de l'inertie équivalente  $J_{eq}$ , ramenée à l'arbre moteur, de l'ensemble S des pièces en mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$ . Cette inertie équivalente est définie par :  $E_c(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_m^2$

Dorénavant on se place dans la situation la plus défavorable, à savoir le sens de la remontée de l'aiguille. La pesanteur est prise en compte.

**Question 26 :**

- a. À partir d'un théorème de l'énergie-puissance, écrire l'équation du mouvement liant  $c_m(t)$  et les autres efforts extérieurs.
- b. Mettre celle-ci sous la forme :  $c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$ . (4)
- c. Donner l'expression de  $c_r(t)$  en fonction de :  $c_{res}$ ,  $F_r(t)$ ,  $m_p$ ,  $g$ ,  $R_p$  et  $k_r$ .

La tête de pipetage est asservie en position. Le schéma-bloc de cet asservissement est ébauché sur le document réponse (Question 27). Un codeur mesure l'angle de rotation moteur et un hacheur module la tension aux bornes du moteur.

On note :

- $u(t)$  la tension aux bornes du moteur,  $i(t)$  l'intensité,  $e(t)$  la force électromotrice ;
- $R$  la résistance de l'induit,  $L$  son inductance,  $K$  la constante de force électromotrice ;
- $K_{cod} = 2000 \text{ points/tr}$  le gain du codeur tel que  $m_\theta(t) = K_{cod} \cdot \theta_m(t)$  ;
- $K_{adap}$  le gain permettant d'adapter la consigne  $z_c(t)$  à l'image de la position  $m_\theta(t)$  ;
- $H_{cor}(p)$  la fonction de transfert du correcteur ;
- $K_h = 0,094 \text{ V} \cdot \text{point}^{-1}$  le gain du hacheur.

Les équations du moteur à courant continu sont les suivantes :

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (5)$$

$$e(t) = K \cdot \omega_m(t) \quad (6)$$

$$c_m(t) = K \cdot i(t) \quad (7)$$

**Question 27 :** En tenant compte des notations précédentes, compléter sous forme littérale, sur le document réponse (question 27), le schéma-bloc de l'asservissement en position.

**Question 28 :** Déterminer l'expression de  $K_{adap}$  pour que l'écart calculé  $\varepsilon(t)$  soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne :  $z_c(t) = z(t)$

On note :

- $i_0$  l'intensité initiale ;
- $i_\infty$  et  $\omega_\infty$  l'intensité et la vitesse du moteur en régime permanent ;
- $c_{r0}$  le couple résistant  $c_r(t)$  supposé constant.

**Question 29 :** Déterminer les expressions de  $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}(t)=0}$  et de  $\left(\frac{I(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}(t)=0}$ . Mettre celles-ci sous forme canonique.

Afin de déterminer les caractéristiques du moteur, on applique à celui-ci un échelon de tension  $u_0(t)$  d'amplitude 24 V. On mesure la vitesse  $\omega_m(t)$  et l'intensité  $i(t)$ . Les résultats obtenus sont donnés sur les figures du document réponse. (Question 30).

**Question 30 :** Pour cette question, vous justifierez vos résultats à l'aide des tracés nécessaires sur le document réponse (question 30).

- a. À partir de ces courbes et des résultats de la question 26, indiquer si l'hypothèse d'une inductance négligeable est pertinente. Justifier la réponse.
- b. Dans cette hypothèse d'une inductance négligeable et à partir des équations (4), (5), (6) et (7), déterminer les expressions de  $i_0$ ,  $i_\infty$  et  $\omega_\infty$  en fonction de  $u_0$ ,  $c_{r0}$ ,  $R$  et  $K$ .
- c. Déduire de cette étude les valeurs numériques de  $K$  et  $R$ .
- d. Déterminer la valeur numérique du couple résistant ramené à l'arbre moteur  $c_{r0}$  et de l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur  $J_{eq}$ .

## 5.2 Réglage de l'asservissement

Les résultats précédents permettent de modéliser l'asservissement de position par la figure 16 :

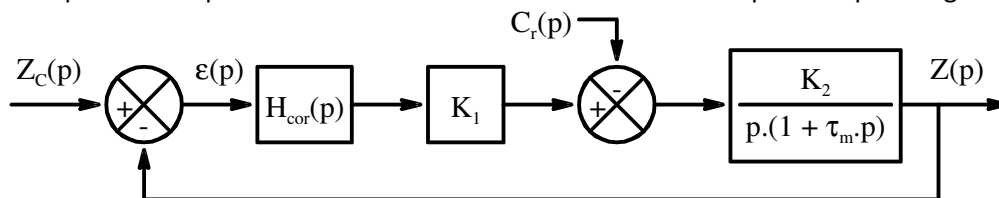


Figure 16 : Schéma bloc de l'asservissement en position

Avec :  $K_1 = 34,5 N$        $K_2 = 25,3 N^{-1} \cdot s^{-1}$ ,       $T_m = 3 \cdot 10^{-2} s$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut :  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} N \cdot m$ .

On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Le diagramme des exigences de cet asservissement est donné figure 6.

**Question 31 :** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte pour un correcteur proportionnel      Soit :  $H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)}$

**Question 32 :** Déterminer les expressions (sous forme canonique) des fonctions de transfert en boucle fermée  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  pour un correcteur proportionnel  $H_{cor}(p) = K_p$  :

$$H_1(p) = \frac{Z(p)}{Z_C(p)} \text{ pour } C_r(p) = 0 \quad \text{et :} \quad H_2(p) = \frac{Z(p)}{C_r(p)} \quad \text{pour } Z_C(p) = 0$$

**Question 33 :** Par le théorème de la valeur finale, déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0} = 0$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $z_c = 0$ ).

**Question 34 :** En déduire la valeur de  $K_p$  permettant de satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Question 35 :** Les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  sont donnés sur le document réponse pour  $K_p = 1$ . Pour la valeur de  $K_p$  déterminée précédemment, indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre réponse notamment par un tracé sur le document réponse (Question 35)

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 0,42$  s. Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur sont donnés sur le document réponse.

**Question 36 :** Justifier le choix de ce correcteur. Déterminer le coefficient  $K_p$  pour satisfaire au critère de stabilité du cahier des charges. Justifier vos calculs par des tracés sur le document réponse. (Question 36)

**Question 37 :** On donne sur le document réponse (question 37) la réponse à un échelon de position de 50 mm avec le correcteur précédemment réglé. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère et en laissant votre tracé sur le document réponse.

### 5.3 Précision du volume prélevé

Lorsque la tête de pipetage a atteint la position souhaitée, définie par les coordonnées  $X_M$  et  $Y_M$ , l'aiguille de la seringue est plongée dans le liquide à prélever. La hauteur immergée de l'aiguille,  $Z_v$ , définit la quantité de produit qui sera aspirée (figure 17).

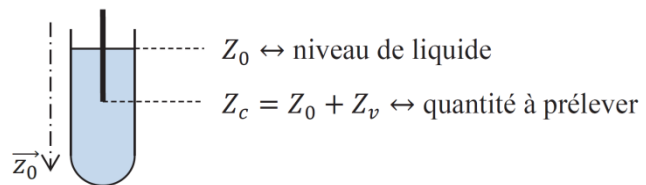


Figure 17 : Flacon et seringue

Chaque flacon n'étant pas rempli de la même façon, le niveau n'est donc pas connu précisément.

Un capteur capacitif détecte au fur et à mesure de la descente de l'aiguille la présence de liquide. Il délivre une information binaire (notée Niv). Lorsque l'aiguille est en contact avec le liquide, le capteur change d'état et inversement.

Un codeur incrémental, donnant 2 000 impulsions par tour de l'axe moteur, indique la position de l'aiguille par la variable  $Z_{cap}$  (position mesurée en mm).

La période d'échantillonnage de cette information est  $T_e = 10$  ms.

Le moteur est mis en marche dès qu'une valeur est affectée à la consigne de position  $Z_c$ ; l'ordre de mise en marche est noté  $V_d$ .

En début de descente, le niveau est inconnu, la consigne de position initiale  $Z_m$  est imposée :  $Z_c = Z_m$ . La seringue descend ( $V_d$  est assigné à 1).

Au passage du niveau détecté par le capteur inductif, correspondant au contact de l'aiguille avec le liquide, la position  $Z_0$ , donnée par le codeur incrémental, est mémorisée.

La consigne de position est alors modifiée à une valeur  $Z_c = Z_0 + Z_v$ .

L'aspiration débute lorsque la consigne est atteinte et s'arrête quand le détecteur de niveau ne perçoit plus de liquide en contact avec la seringue.

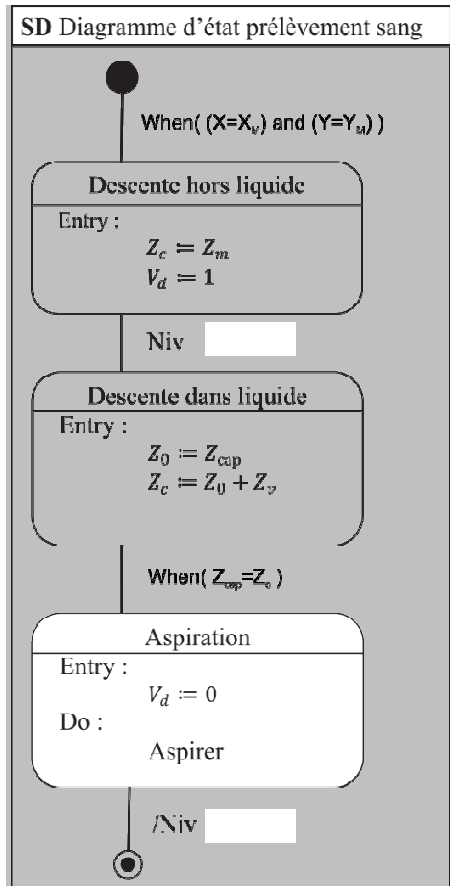


Figure 18 : Diagramme d'état

Le cycle de cette opération est décrit par le diagramme d'état figure 18.

On rappelle les données suivantes :

- la vitesse maximale de rotation du moteur supposée égale à la vitesse nominale est :  $N_{maxi} = 4150 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  ;
- le rapport de réduction du réducteur est  $k_r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{19,2}$  ou  $\omega_m$  et  $\omega_r$  sont les vitesses en sortie moteur et réducteur ;
- le rayon du pignon (système pignon-crémaillère) est :  $R_p = 10 \text{ mm}$ .

**Question 38 :** Calculer les erreurs de mesure de  $Z_0$  dues à l'échantillonnage d'une part et à la conversion analogique numérique du codeur incrémental d'autre part. En déduire l'erreur maximale de position notée  $\Delta Z_{mes}$ . Cette erreur est-elle compatible avec le cahier des charges ?

Pour pallier ce défaut de mesure, le constructeur met en place une nouvelle procédure explicitée par le diagramme de la figure 19 :

- le moteur peut avoir deux vitesses de rotation qui correspondent à une vitesse lente de la tête de pipetage ( $-V_l$  en montée,  $+V_l$  en descente) et une vitesse rapide ( $-V_r$  en montée,  $+V_r$  en descente) ; ces valeurs seront affectées à la variable  $V$  ;
- la consigne initiale de position  $Z_c = Z_m$  reste inchangée ;
- lors de la détection de niveau, la position correspondante  $Z_0$  est détectée et mémorisée, puis la tête remonte. La consigne est réglée à  $Z_c = Z_0 - \Delta Z_{mes}$  ;
- lorsque le niveau est de nouveau détecté, l'aiguille s'arrête et le système mémorise la nouvelle position  $Z_0$  donnée par le codeur, la consigne de position est alors modifiée à la valeur  $Z_c = Z_0 + Z_v$  où  $Z_v$  est la hauteur définie précédemment correspondant au volume à prélever.

À vitesse lente, la vitesse de rotation du moteur est :  $N_{lente} = 1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ . Le diamètre du flacon est de :  $D_f = 15 \text{ mm}$ .

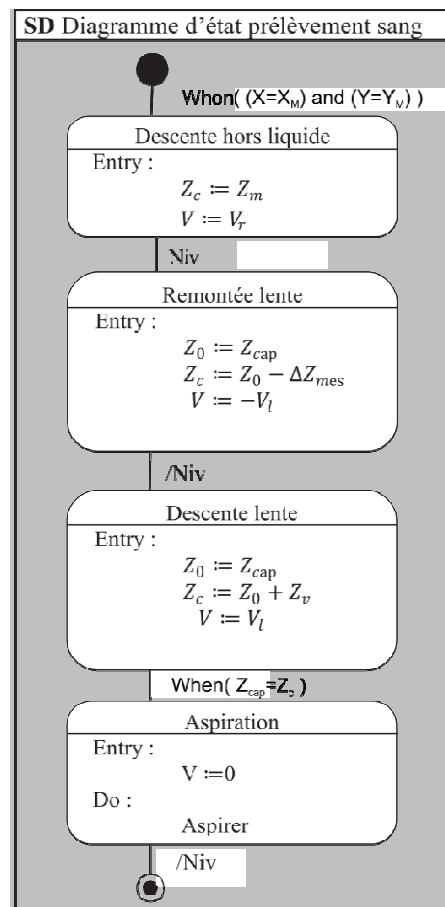


Figure 19 : Diagramme d'état corrigé

**Question 39 :** Calculer la nouvelle erreur maximale de position  $\Delta Z'_{mes}$  avec l'application de cette nouvelle procédure. Donner l'erreur de volume correspondante.

### Synthèse

**Question 40 :** Faire une synthèse des choix qui ont été faits pour satisfaire le critère de précision du volume prélevé.

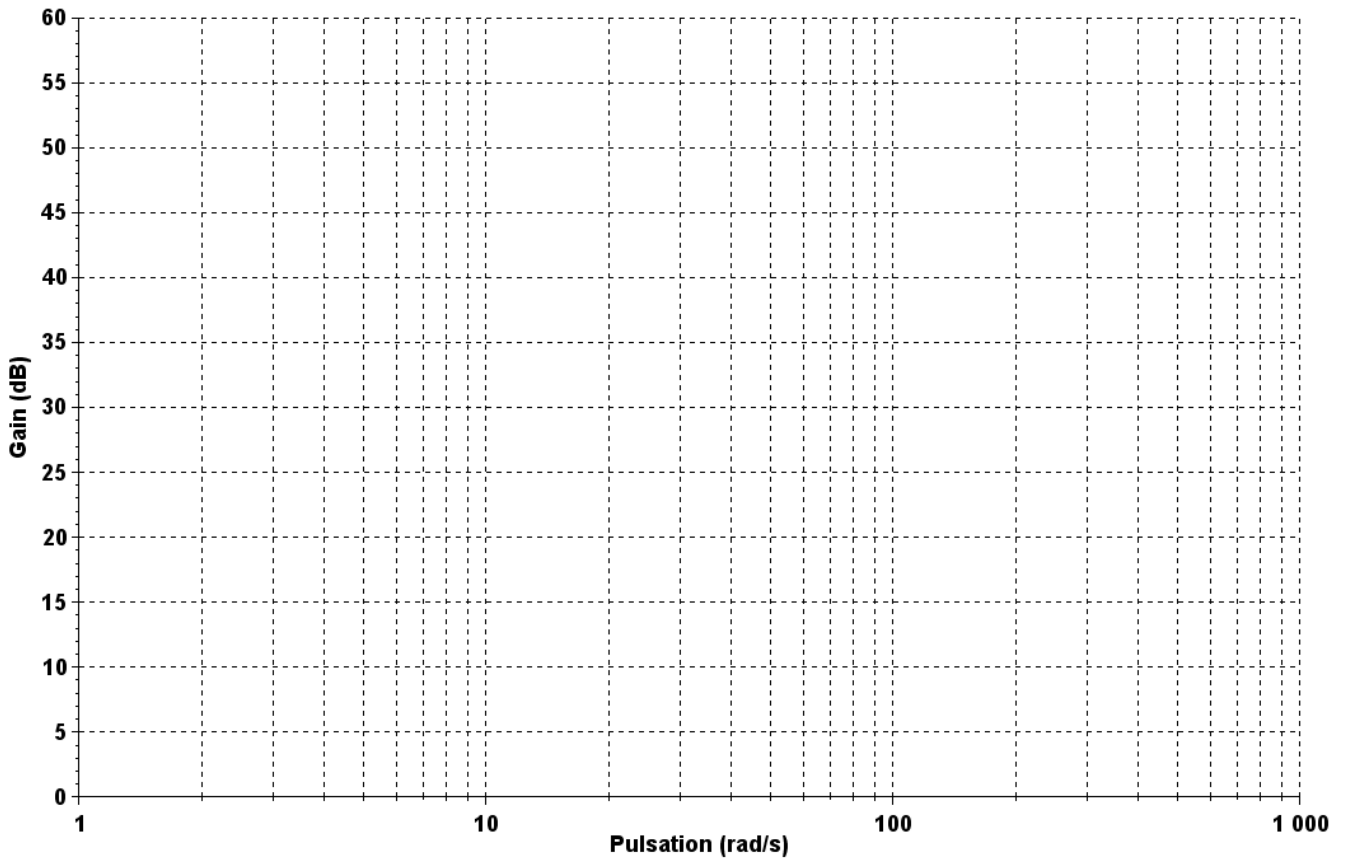
Fin de l'énoncé



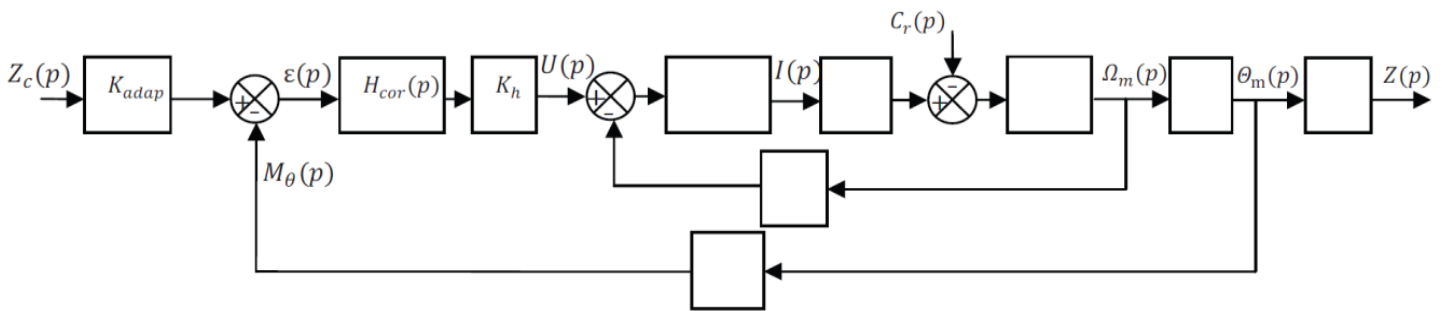
# Document réponse

Nom  
Prénom

**Question 11 :** Diagramme de Bode en Gain de  $H(p)$

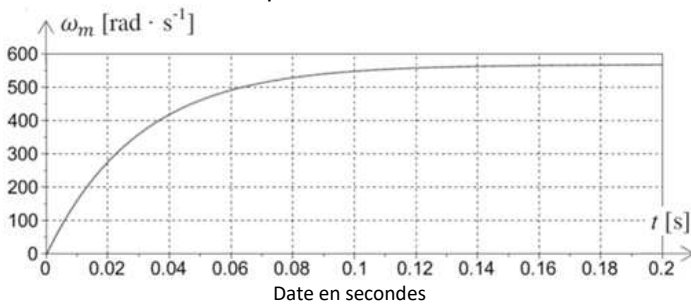


**Question 27 :** Schéma bloc de l'asservissement en position suivant  $\vec{z}$  de la tête de pipetage

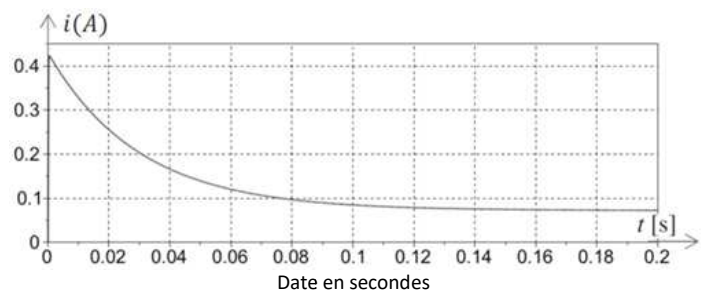


**Question 30 :** Réponse temporelle du système à un échelon de 24 V aux bornes du moteur

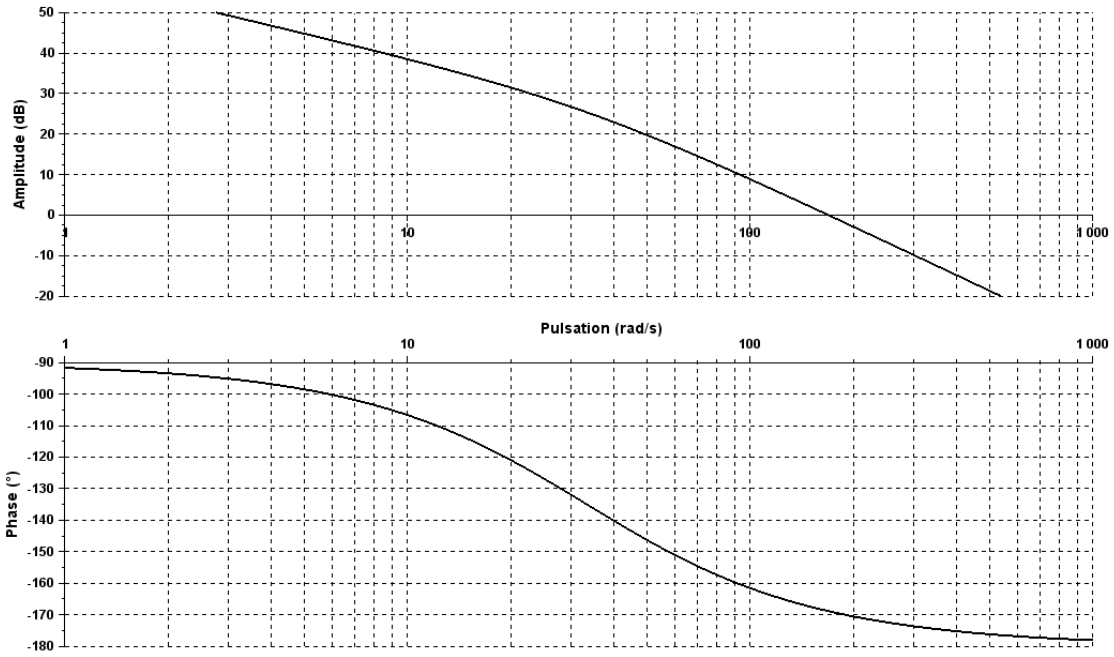
Réponse en vitesse



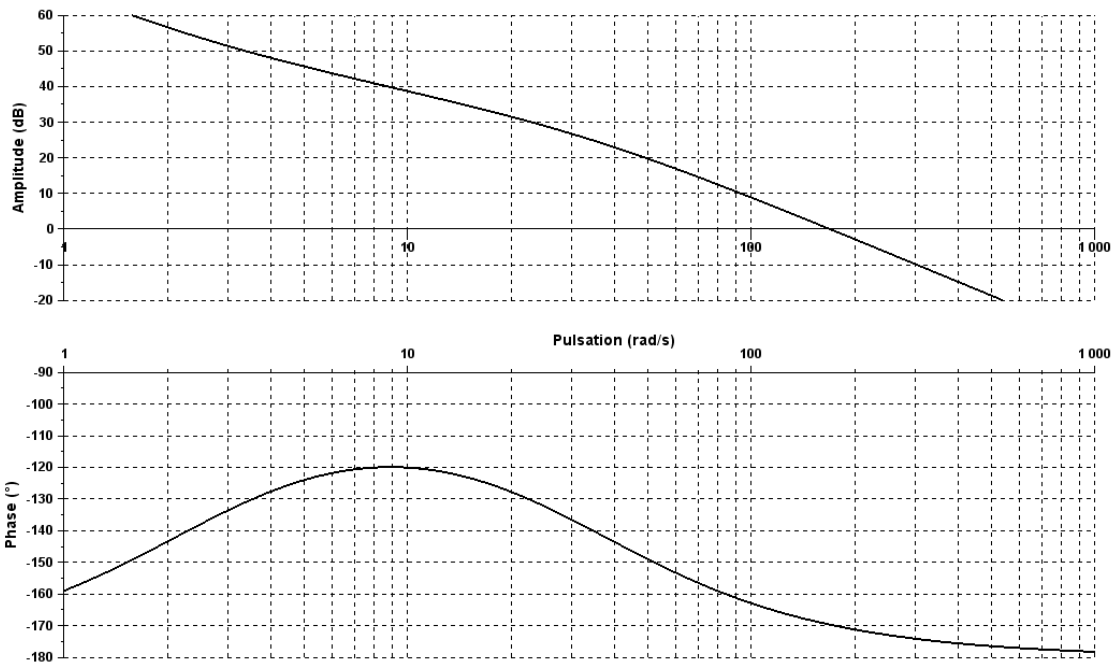
Réponse en intensité



**Question 35 :** Diagramme de Bode de  $H_{bo}(p)$  pour  $H_{cor}(p) = K_p = 1$



**Question 36 :** Diagramme de Bode de  $H_{bo}(p)$  pour  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec :  $K_p = 1$



**Question 37 :** Réponse temporelle du système corrigé

