

**PSI 23-24 - DS N°2 Automate d'exploration de l'hémostase Corrigé**

**2- Analyse de l'exigence "Positionner une seringue au-dessus d'un flacon**

**Question 1**

La distance parcourue lors du déplacement correspond à l'aire sous la courbe de vitesse en fonction du temps. Cette courbe étant un trapèze, on a donc :

$$\alpha_M^{\max} = V_M^{\max} \cdot \frac{T + (T - 2 \cdot T_a)}{2}$$

Soit :  $\alpha_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$  Ou encore :  $V_M^x = \frac{\alpha_M^{\max}}{(T - T_a)}$

**Question 2**

a- Sachant que :  $C_m = \frac{J_e}{\lambda} \cdot \frac{d v^x(t)}{dt}$ , on obtient :

☞ Sur la première phase :  $\frac{d v^x(t)}{dt} = \frac{V_M^x}{T_a}$  Donc :  $C_m = \frac{J_e \cdot V_M^x}{\lambda \cdot T_a}$

☞ Sur la deuxième phase :  $\frac{d v^x(t)}{dt} = 0$  Donc :  $C_m = 0$

☞ Sur la troisième phase :  $\frac{d v^x(t)}{dt} = -\frac{V_M^{\max}}{T_a}$  Donc :  $C_m = -\frac{J_e \cdot V_M^{\max}}{\lambda \cdot T_a}$

b- La puissance sera maximale pour un couple maximal et une vitesse maximale.

**Donc la puissance sera maximale à la fin de la première phase**

c- La puissance fournie par le moteur est de :  $P = C_m \cdot \omega_M^x$  Sachant que :  $\lambda = \frac{v^x}{\omega_M^x}$

La puissance maximale fournie par le moteur est de :  $P_{\max} = \frac{J_e \cdot V_M^{x 2}}{\lambda^2 \cdot T_a}$

d - D'autre par :  $\alpha_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$  Donc :  $P_{\max} = \frac{J_e \cdot \alpha_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$

**Question 3**

Posons  $f(T_a) = T_a \cdot (T - T_a)^2$  on a :  $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = (T - T_a)^2 - 2 \cdot T_a \cdot (T - T_a) = (T - T_a) \cdot (T - 3 \cdot T_a)$

Donc :  $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = 0 \Leftrightarrow T_a = \frac{T}{3}$  car :  $T_a \in \left[ 0, \frac{T}{2} \right]$

D'autre part : pour  $T_a \in \left[ 0, \frac{T}{3} \right]$  on a :  $\frac{d f(T_a)}{d T_a} > 0$  et pour :  $T_a \in \left[ \frac{T}{3}, \frac{T}{2} \right]$  on a :  $\frac{d f(T_a)}{d T_a} < 0$

Donc :  $T_a \cdot (T - T_a)^2$  est maximal pour  $T_a = \frac{T}{3}$  Sachant que :  $P_{\max} = \frac{J_e \cdot \alpha_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$

**On en déduit que la puissance est minimale pour  $T_a = \frac{T}{3}$**

**Question 4**

On sait que :  $\alpha_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$  Donc pour  $T_a = \frac{T}{3}$   $\alpha_M^{\max} = V_M^x \cdot \left( T - \frac{T}{3} \right) = \frac{2 \cdot T}{3} \cdot V_M^x$

On obtient donc :  $V_M^x = \frac{3 \cdot \alpha_M^{\max}}{2 \cdot T}$  Avec :  $V_M^x = R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x$  Soit :  $R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot \alpha_M^{\max}}{2 \cdot T}$

On en déduit la vitesse de rotation maximale que doit atteindre le moteur :

$$\omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot \alpha_M^{\max}}{2 \cdot T \cdot R_p \cdot k} = \frac{3 \times 0,55}{2 \times 1 \times 0,02 \times 0,1} = 412,5 \text{ rad/s}$$

Or la fréquence de rotation maximale que peut atteindre le moteur est de  $N_{\max}^{\text{mot}} = 4\,150 \text{ tr/min}$ . Soit une vitesse de rotation de :  $\omega_{\max}^{\text{mot}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\max}^{\text{mot}}}{60} = 435 \text{ rad/s} > 412,5 \text{ rad/s}$ .

**Le choix du moteur est donc validé.**

### 3- Analyse de l'exigence "Mettre la bille en oscillation"

#### Question 5

a- On a : 
$$\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \left( \frac{d \vec{OG}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1$$

Soit : 
$$\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1 = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 \quad \text{Sachant que : } \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = v \cdot \vec{x}_1$$

On obtient : 
$$v = \dot{\theta} \cdot (R-r)$$

b- D'autre part : 
$$\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} + \vec{\Omega}_{\text{bille}/0} \wedge \vec{GI} = v \cdot \vec{x}_1 + \omega_b \cdot \vec{y}_1 \wedge r \cdot \vec{z}_1 = (v + \omega_b \cdot r) \cdot \vec{x}_1$$

Or la condition de roulement sans glissement impose que : 
$$\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{0} \quad \text{soit : } v = -r \cdot \omega_b$$

c- On en déduit : 
$$\dot{\theta} \cdot (R-r) = -r \cdot \omega_b \quad \text{On obtient donc : } \omega_b = \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r}$$

#### Question 6

Ces équations sont obtenues en appliquant un théorème de la résultante dynamique à la bille projeté sur les axes  $\vec{z}_1$  pour l'équation (1) et un théorème du moment dynamique en G projeté sur l'axe  $\vec{y}_1$  pour l'équation (2).

#### Question 7

D'après le théorème de Huygens :  $J_I = J_G + m \cdot r^2 = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 \quad \text{Donc : } J_I = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2$

#### Question 8

Faisons un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur la bille :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur  $m \cdot g \cdot \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur  $-f_v \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}$
- ☞ Action de la cuvette sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur  $T_1 \cdot \vec{x}_1 + N_1 \cdot \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur  $f(t) \cdot \vec{x}_0$

On en déduit la somme des puissances des actions extérieures appliquée à la bille :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \text{bille}/0) = m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} - f_v \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} + (T_1 \cdot \vec{x}_1 + N_1 \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{V}_{I \in \text{bille}/0} + f(t) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}$$

Sachant que :  $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$  et  $\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{0}$  (car roulement sans glissement en I)

On a : 
$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \text{bille}/0) = -m \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 - f_v \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (R-r)^2 + 0 + f(t) \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1$$

Soit : 
$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \text{bille}/0) = -m \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \sin \theta - f_v \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (R-r)^2 + f(t) \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \cos \theta$$

La bille étant un solide indéformable : 
$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \text{bille}/0) = 0$$

Le mouvement de la bille étant assimilable à une rotation d'axe (I,  $\vec{y}_0$ ). L'énergie cinétique de cette

bille s'écrit : 
$$E_C(\text{bille}/0) = \frac{1}{2} \cdot J_I \cdot \omega_b^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left( \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r} \right)^2 \Rightarrow E_C(\text{bille}/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot m \cdot (r-R)^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

L'application du TEC à la bille : 
$$\frac{d E_C(\text{bille}/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \text{bille}/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow \text{bille}/0)$$

Donne donc : 
$$\frac{7 \cdot m \cdot (R-r)^2}{5} \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} = m \cdot g \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \sin \theta - f_v \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (R-r)^2 + f(t) \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \cos \theta$$

Soit : 
$$\frac{7.m.(R-r)}{5}.\ddot{\theta} + f_v.\dot{\theta}.(R-r) + m.g.\sin \theta = f(t).\cos \theta$$

Ou : 
$$A.\ddot{\theta}(t) + B.\dot{\theta}(t) + C.\sin \theta(t) = f(t).\cos \theta(t)$$
 Avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{7.m.(R-r)}{5} \\ B &= f_v.(R-r) \\ C &= m.g \end{aligned}$$

**Question 9**

La linéarisation de l'équation (3) pour un angle  $\theta$  petit donne :

$$F(t) = \frac{7}{5}.m.(R-r).\ddot{\theta} + f_v.(R-r).\dot{\theta} + m.g.\theta$$

En passant cette équation dans le domaine de Laplace on obtient :

$$F(p) = \frac{7}{5}.m.(R-r).p^2.\Theta(p) + f_v.(R-r).p.\Theta(p) + m.g.\Theta(p)$$

D'où la fonction de transfert : 
$$H(p) = \frac{1}{m.g + f_v.(R-r).p + \frac{7}{5}.m.(R-r).p^2} = \frac{1}{C + B.p + A.p^2}$$

**Question 10**

Soit sous une forme canonique :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{m.g}}{1 + \frac{f_v.(R-r)}{m.g}.p + \frac{7.(R-r)}{5.g}.p^2}$$

Par identification on en déduit qu'il s'agit d'une fonction de transfert du second ordre dont :

☞ Le gain statique est :

$$K_S = \frac{1}{m.g}$$

☞ La pulsation propre non amortie est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5.g}{7.(R-r)}}$$

☞ Le facteur d'amortissement est :

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{f_v.(R-r)}{m.g} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5.g}{7.(R-r)}} \cdot \frac{f_v.(R-r)}{m.g}$$

Soit :

$$\xi = \frac{f_v}{2.m} \cdot \sqrt{\frac{5.(R-r)}{7.g}}$$

**Question 11**

$\omega_0 = 21,82 \text{ rad.s}^{-1}$

$K_S = 25 .N^{-1}$   $20.\log K_S = 28 \text{ dB}$

Pour  $f_v = 0,2$  :  $\xi = 0,8$

$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$  Pas de résonance

Pour  $f_v = 0,05$  :  $\xi = 0,2$

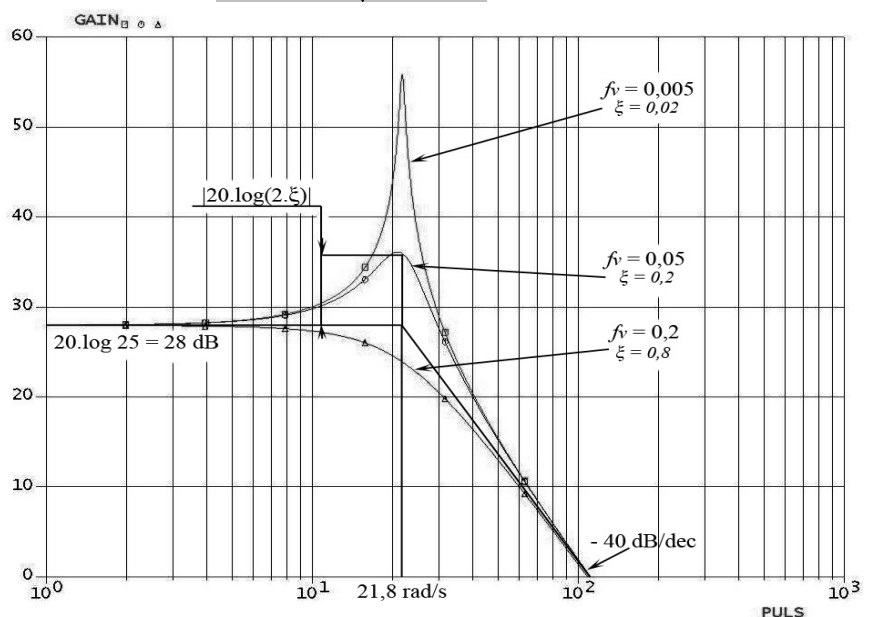
$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  Résonance

$Q_{RdB} = 8,1 \text{ dB}$

Pour  $f_v = 0,005$  :  $\xi = 0,02$

$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  Résonance

$Q_{RdB} = 28,0 \text{ dB}$



**Question 12**

Pour des pulsations faibles ( $\omega_{bob} \rightarrow 0$ ) ou importantes ( $\omega_{bob} \rightarrow \infty$ ) le gain dynamique est indépendant du facteur d'amortissement  $\xi$  (ou très peu) et donc du coefficient de frottement  $f_v$ .

En revanche pour une pulsation égale à la pulsation propre ( $\omega_{bob} = \omega_0$ ) le gain dynamique dépend du facteur d'amortissement  $\xi$  et donc du coefficient de frottement  $f_v$ . Il est de :  $20.\log K_S - 20.\log(2.\xi)$ .

Pour une autre pulsation proche de  $\omega_0$  ( $\omega_{bob} \neq \omega_0$ ) l'expression du gain dynamique est moins simple.

**Pour observer au mieux l'évolution du coefficient de frottement il faut donc une pulsation égale à la pulsation propre du système non amorti :  $\omega_{bob} = \omega_0$ .**

**Question 13**

a- Pour  $\omega_{bob} \rightarrow 0$  le gain dynamique en dB est de :  $20.\log\left(\frac{A_0}{F_0}\right) = 20 \log K_S$

Pour  $\omega_{bob} = \omega_0$  le gain dynamique en dB est de :  $20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{F_0}\right) = 20 \log K_S - 20.\log(2.\xi)$

On a donc :  $20.\log\left(\frac{A_0}{F_0}\right) - 20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{F_0}\right) = 20.\log\left(\frac{A_0}{A_{\omega_0}}\right) = 20.\log(2.\xi) = 20.\log(8.f_v)$

On obtient donc le rapport des amplitudes :  $\frac{A_0}{A_{\omega_0}} = 8.f_v$

b- Sur la figure 13-a on mesure une amplitude pour  $\omega_{bob} = 1$  rad/s une amplitude  $A_0 = 0,055^\circ$

Sur la figure 13-c on mesure une amplitude pour  $\omega_{bob} = 21,8$  rad/s une amplitude  $A_{\omega_0} = 6,5^\circ$

On en déduit une coefficient de frottement de :  $f_v = \frac{1}{8} \cdot \frac{A_0}{A_{\omega_0}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{0,055}{6,5} = 1,06.10^{-3}$

c- On a :  $f_v = 6.\pi.r.\eta$  On en déduit la viscosité :  $\eta = \frac{f_v}{6.\pi.r} = \frac{1,06.10^{-3}}{6.\pi.5.10^{-3}} = 0,011 \text{ Pl} = 11 \text{ cPl}$

d- Au fur et à mesure de la coagulation du sang le coefficient de frottement  $f_v$  augmente.

**Donc le rapport  $\frac{A_0}{A_{\omega_0}}$  augmentant l'amplitude  $A_{\omega_0}$  de l'angle  $\theta$  va diminuer.**

**Question 14**

Les relations de récurrence de l'approximation d'Euler sont :

$\theta_{i+1} = \theta_i + h.\dot{\theta}_i$  et :  $\dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + h.\ddot{\theta}_i$  Or :  $Y_i = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix}$  et :  $F(t_i, Y_i) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix}$

Donc la relation de récurrence liant  $Y_{i+1}$  à  $Y_i$  est :  $Y_{i+1} = Y_i + h.F(t_i, Y_i)$

**Question 15**

def fi(ti, Yi):

theta, thetap = Yi[0], Yi[1]

thetapp = 5\*(F0\*sin(wbob\*ti)\*cos(theta) - fv\*(R-r)\*thetap - m\*g\*sin(theta))/(7\*m\*(R-r))

return [thetap, thetapp]

**Question 16**

def Euler(Yini, h, Tmaxi, F):

n = int(Tmaxi/h)

RY = [[0, Yini[0], Yini[1]]]

for i in range(0, n):

ti, thetai, thetapi = RY[i][0], RY[i][1], RY[i][2]

var = F(ti, [thetapi, thetapi])

RY.append([ti+h, thetai+h\*var[0], thetapi+h\*var[1]])

return RY

**Question 17**

Si on note  $n$  la partie entière de  $T_{maxi}/h$ , la complexité de la fonction Euler est en  $O(n)$ , correspondant aux  $n$  itérations de la boucle for (la complexité de la fonction  $F(fi)$  est en  $O(1)$ ).

**Question 18**

```
def VerifRSG(SY,f):
    for i in SY:
        ti,theta,thetap=i[0],i[1],i[2]
        thetapp=fi(ti,[theta,thetap])[1]
        coef=abs((2*m*(r-R)*thetapp)/(5*(F0*sin(wbob*ti)*sin(theta)+m*g*cos(theta)+
            m*(R-r)*thetap**2)))
        if coef>f:
            return False
    return True
```

**Question 19**

La figure 18-b montre une amplitude qui reste inférieure à  $10^\circ = 0,17$  rad (angle  $\theta$  faible). **L'hypothèse de linéarisation est donc vérifiée.**

La figure 19 montre un rapport  $T_1/N_1$  inférieur au coefficient de frottement de 0,1 entre la bille et le rail. **L'hypothèse du roulement sans glissement est donc vérifiée.**

#### 4- Analyse de l'exigence 3.4 "Mesurer l'amplitude des oscillations"

**Question 20**

```
def Valeur_efficace(T,a,b):
    S=0
    for i in range(b):
        S+=T[a+i]**2
    return sqrt(S/b)
```

**Question 21**

La fonction « Temps\_coagulation » intègre une boucle effectuée  $(N_{maxi} - N)$  fois. Et à l'intérieur de cette boucle on appelle 1 fois la fonction « Valeur\_efficace(M,i,N) » dont la complexité est en  $O(N)$ . **Donc la complexité de la fonction « Temps\_coagulation » est en  $O((N_{maxi} - N) \times N)$  soit  $O(N_{maxi} \times N)$ .**

Avec cette autre manière de faire, la boucle ne fait plus appel  $(N_{maxi} - N)$  fois à la fonction « Valeur\_efficace(M,i,N) ». **Donc la complexité sera plus faible et sera en :  $O(N_{maxi})$ .**

**Question 22**

Il n'est pas judicieux d'utiliser une structure de type pile, car pour déstocker la plus ancienne de mesure (positionnée tout en bas de la pile), il faudra au préalable, dépiler toutes les autres mesures.

**Question 23**

```
def Init_tampon(N,Te):
    T=creer_file()
    for i in range(N):
        enfiler(T,Mesure(Te))
    return(T)
```

**Question 24**

```
defiler(T)
enfiler(T,Mesure(Te))
Xeff=Valeur_efficace(T)
```

### 5- Analyse de l'exigence 2.3 "Prélever les produits par le déplacement suivant $\vec{z}$ de la tête de pipetage"

**Question 25**

L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement est La somme des énergies cinétiques :

$$E_C(S/R_g) = E_C(\text{moteur}/R_g) + E_C(\text{réducteur}/R_g) + E_C(\text{masse}/R_g) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot v^2$$

Où  $v$  est la vitesse de translation de la masse en translation :  $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$

On en déduit :  $E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot (J_m + J_r) \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot k_r^2 \cdot R_p^2 \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot (J_m + J_r + m_p \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \omega_m^2$

D'où l'inertie équivalente des pièces en mouvement :  $J_{eq} = J_m + J_r + m_p \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$

**Question 26**

a- Les actions extérieures appliquées sur l'ensemble des pièces en mouvement sont : Le couple moteur, le poids des pièces en mouvement et l'action de l'opercule sur l'aiguille. On obtient donc pour la somme des puissances de ces actions :  $P_{Ext}(S/R_g) = c_m \cdot \omega_m - F_r(t) \cdot v - m_p \cdot g \cdot v + c_{res} \cdot \omega_m$  avec :  $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$

Soit :  $P_{Ext}(S/R_g) = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m_p \cdot g \cdot k_r \cdot R_p + c_{res}) \cdot \omega_m$

L'ensemble des frottements sont modélisés par un couple résistant  $c_{res}$  ramené sur l'arbre moteur. Donc la somme des puissances des actions intérieures est :  $P_{Int}(S/R_g) = c_{res} \cdot \omega_m$  avec :  $c_{res} < 0$

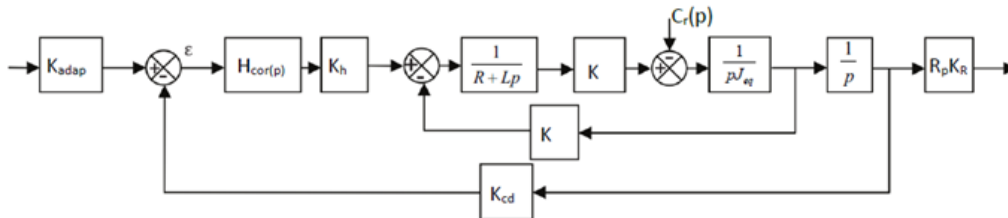
L'application du théorème de l'énergie puissance donne donc :

$$(J_m + J_r + m_p \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m_p \cdot g \cdot k_r \cdot R_p + c_{res}) \cdot \omega_m$$

- b- Soit:  $c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$  avec:  $J_{eq} = J_m + J_r + m_p \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$
- c- et:  $c_r(t) = F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p + m_p \cdot g \cdot k_r \cdot R_p - c_{res}$

**Question 27**

A partir de la transformée de Laplace des différentes équations (4), (5), (6) et (7) de fonctionnement du système et de celles de la transmission :  $\omega_m(t) = \frac{d \theta_m(t)}{dt}$  et:  $z(t) = k_r \cdot R_p \cdot \theta_m(t)$  on obtient :



**Question 28**

Pour avoir un écart  $\epsilon(t)$  proportionnel à l'erreur  $z_c(t) - z(t)$  il faut un gain :  $K_{adap} = \frac{k_{cod}}{R_p \cdot k_r}$

**Question 29**

La réduction de la boucle du moteur du schéma bloc ci-dessus donne :

$$\left( \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{K}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{K^2}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}} \quad \text{soit:} \quad \left( \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p^2}$$

On a :  $\left( \frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \left( \frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} \cdot \left( \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0}$  avec suivant le schéma bloc :  $\left( \frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{J_{eq} \cdot p}{K}$

On en déduit :  $\left( \frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq} \cdot p}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p^2}$

**Question 30**

a- Sur le document réponse, la courbe donnant l'évolution de la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  lorsque le système est soumis à un échelon de tension  $u(t) = u_0$  présente une pente de tangente non nulle à l'origine. On a donc la réponse d'un système du 1er ordre. **On peut donc négliger le terme du second ordre soit l'inductance du moteur devant les autres grandeurs physiques.**

On a alors : 
$$\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$$
 et : 
$$\left(\frac{I(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq} \cdot p}{K^2}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$$

b- A la date  $t=0$  la vitesse de rotation est nulle :  $\omega_m(0) = 0$ . Donc de l'équation (6) on a :  $e(0) = 0$ .

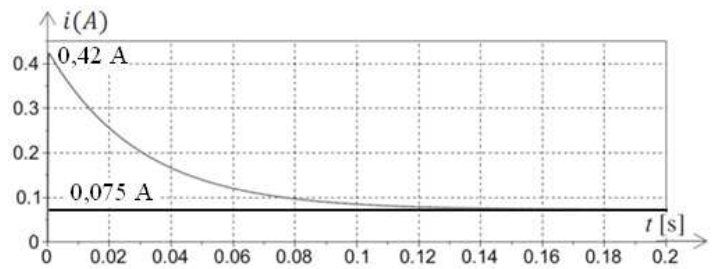
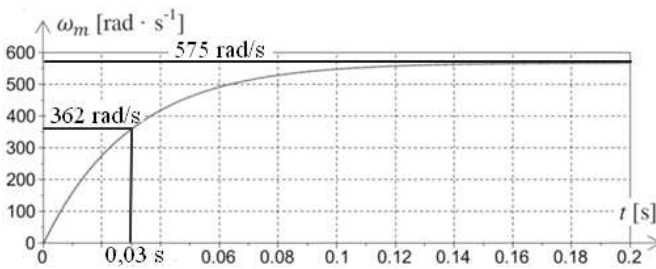
L'inductance  $L$  étant négligée on obtient de l'équation (5) :  $u(0) = R \cdot i(0)$  Soit :  $i_0 = \frac{u_0}{R}$  (a)

Pour  $t \rightarrow \infty$  la vitesse de rotation est constante :  $\dot{\omega}_m(\infty) = 0$ . Donc de l'équation (4) :  $c_r(\infty) = c_m(\infty)$ .

On en déduit de l'équation (7) que :  $c_r(\infty) = K \cdot i(\infty)$  Soit :  $i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$  (b)

L'inductance  $L$  étant négligée on obtient des équations (5) et (6) :  $u(\infty) = R \cdot i(\infty) + K \cdot \omega_m(\infty)$

Sachant que :  $i(\infty) = i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$  et :  $u(\infty) = u_0$  on obtient :  $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot c_{r0}}{K^2}$  (c)



c- Des graphiques du document réponse on a :

$\omega_\infty = 575 \text{ rad/s}$      $i_0 = 0,42 \text{ A}$      $i_\infty = 0,075 \text{ A}$

On obtient donc : ☞ De l'équation (a) :

$R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{24}{0,42} = 57,1 \Omega$

☞ Des équations (b) et (c) :  $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K} = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K}$

Soit :  $K = \frac{u_0 - R \cdot i_\infty}{\omega_\infty} = \frac{24 - 57,1 \times 0,075}{575} = 0,0343 \text{ V.s.rad}^{-1} \text{ ou N.m.A}^{-1}$

d- De l'équation (b) on obtient :

$c_{r0} = K \cdot i_\infty = 0,0343 \times 0,075 = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$

D'autre part la réponse en vitesse étant celle d'un premier ordre on a à la date  $\tau$  (où  $\tau$  est la constante de temps du premier ordre) 63% de la valeur finale. Soit  $\omega(\tau) = 575 \times 0,63 = 362 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le graphique du document réponse nous donne alors :  $\tau = 0,03 \text{ s}$ .

Sachant que :  $\tau = \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2}$

On obtient :

$J_{eq} = \frac{\tau \cdot K^2}{R} = \frac{0,03 \times 0,043^2}{57,1} = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

**Question 31**

Du schéma bloc à retour unitaire de la figure 16 de l'énoncé on obtient :

$$H_{bo}(p) = \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}$$

**Question 32**

Etant donné le schéma bloc de la figure 16 on a :  $H_1(p) = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)} = \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2}{1 + \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}$

$H_1(p) = \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2 + p + T_m \cdot p^2}$  Soit sous forme canonique :  $H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p^2}$

Etant donné le schéma bloc de la figure 16 on a :  $H_2(p) = \frac{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}{1 + H_{bo}(p)} = \frac{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}{1 + \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}$

$H_2(p) = \frac{-K_2}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2 + p + T_m \cdot p^2}$  Soit sous forme canonique :  $H_2(p) = \frac{-\frac{1}{K_p \cdot K_1}}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p^2}$

**Question 33**

Pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}=0$ ) :

$Z(p) = Z_C(p) \cdot H_1(p) = \frac{Z_{c0}}{p} \cdot H_1(p)$  Soit :  $p \cdot Z(p) = Z_{c0} \cdot H_1(p)$

Donc par le théorème de la valeur finale :  $z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Z(p) = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{c0} \cdot H_1(p) = Z_{c0}$

Donc pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}=0$ ) : l'erreur statique est de :  $\epsilon_S = Z_{c0} - z(\infty) = Z_{c0} - Z_{c0}$ . Soit une erreur nulle :  $(\epsilon_S)_{c_{r0}=0} = 0$

Pour une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $z(t) = 0$ ) :

$Z(p) = C_r(p) \cdot H_2(p) = \frac{C_{r0}}{p} \cdot H_2(p)$  Soit :  $p \cdot Z(p) = C_{r0} \cdot H_2(p)$

Donc par le théorème de la valeur finale :  $z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Z(p) = \lim_{p \rightarrow 0} C_{r0} \cdot H_2(p) = \frac{-C_{r0}}{K_p \cdot K_1}$

Donc une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $z(t) = 0$ ) : l'erreur statique est de :  $\epsilon_S = 0 - z(\infty) = 0 - \frac{-C_{r0}}{K_p \cdot K_1}$ . Soit une erreur :  $(\epsilon_S)_{z_c=0} = \frac{C_{r0}}{K_p \cdot K_1}$

**Question 34**

L'erreur statique totale est donc de :  $\epsilon_S = \frac{C_{r0}}{K_p \cdot K_1}$ . Le cahier des charges imposant une erreur statique maximale  $\epsilon_{Smax}$  inférieure à 1 mm, pour vérifier le cahier des charges il faut un gain du correcteur  $K_p$  :

$K_p > \frac{C_{r0}}{K_1 \cdot \epsilon_{Smax}} = \frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{34,5 \times 1 \cdot 10^{-3}}$  Soit :  $K_p > 0,078$

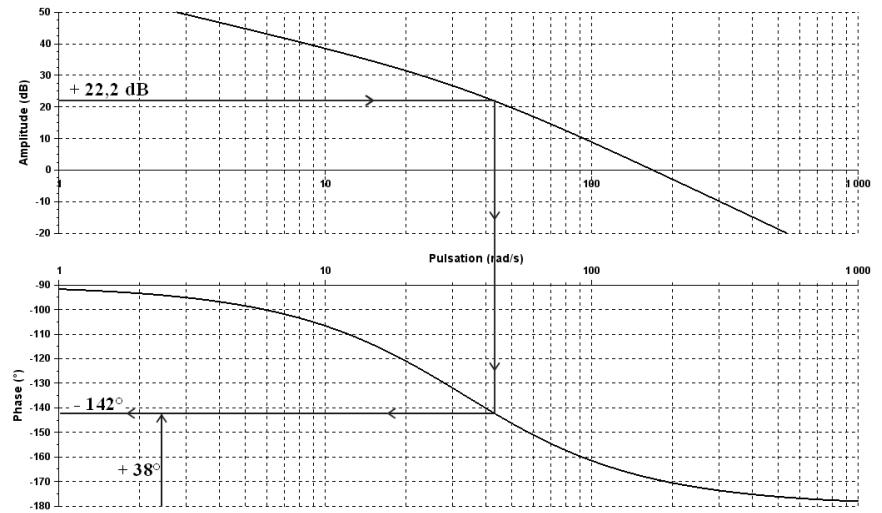


**Question 35**

Avec  $K_p = 0,078$ , la courbe de gain sera translaté de :  $20 \cdot \log 0,078 = -22,2 \text{ dB}$ . Quant à la courbe de phase elle n'est pas modifiée.

On obtient donc la marge de phase pour  $K_p = 0,078$  en lisant la phase pour un gain de 22,2 dB sur le diagramme de Bode tracé avec  $K_p = 1$ .

Avec  $K_p = 0,078$ , la marge de phase est donc de  $38^\circ$  inférieure aux  $60^\circ$  imposés par le cahier des charges. Donc le critère de stabilité n'est pas satisfait.



**Question 36**

Ce correcteur permet, par son intégrateur, placé en amont de la perturbation, d'annuler l'erreur due à la perturbation. En conservant sa stabilité grâce au rang 1 (terme en  $1 + T_i \cdot p$ ).

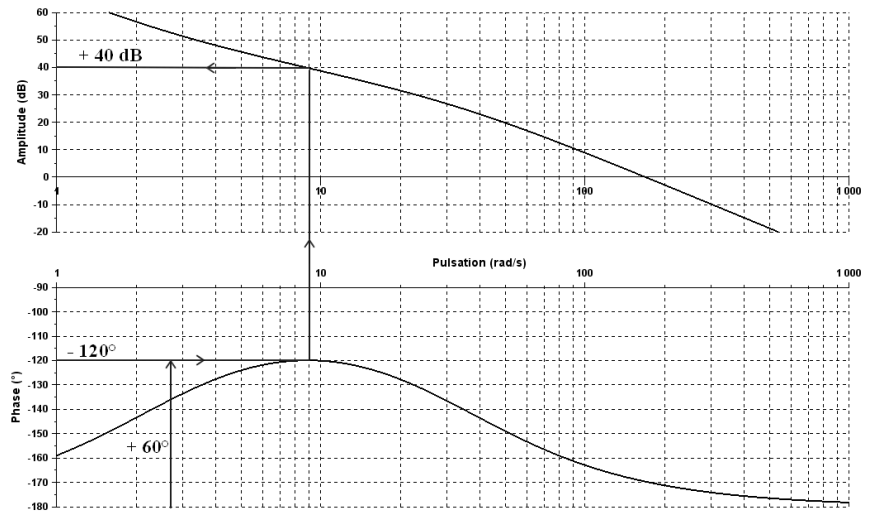
Pour satisfaire au cahier des charges, il faut une marge de phase de  $60^\circ$ .

La courbe de phase montre qu'elle sera obtenue à la pulsation de 9 rad/s.

La courbe de gain montre qu'à cette pulsation le gain est de +40 dB.

Il faut donc translater la courbe de gain de -40 dB.

Pour cela on choisira donc un gain :  $K_p = 10^{(-40/20)} = 0,01$

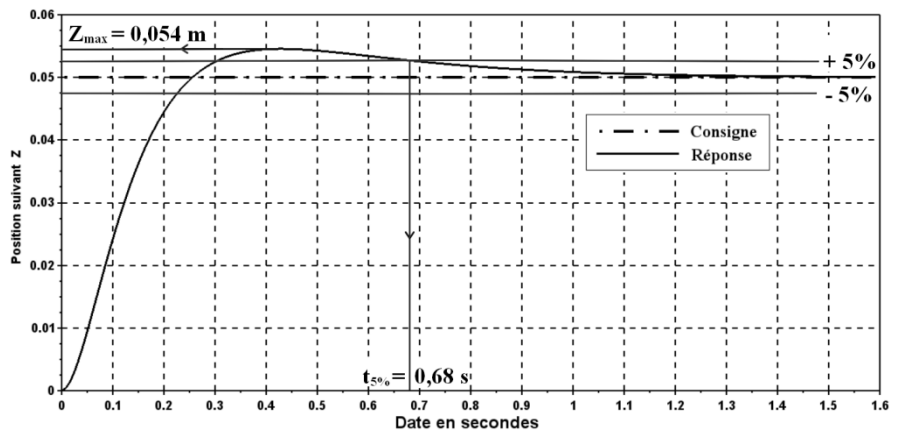


**Question 37**

☞ La valeur finale pour un échelon de consigne de 50 mm vaut 50 mm, l'erreur statique est nulle le critère 2.3.1 de précision est respecté.

☞ Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,18 s inférieur à 0,2 s le critère 2.3.3 de rapidité est respecté.

☞ Le premier dépassement est d'environ  $0,054 - 0,05 = 0,004 \text{ m}$  soit en pourcentage  $\frac{0,004}{0,05} = 8 \%$  inférieur à 10%. Le critère 2.3.4 d'amortissement est donc vérifié.



☞ Le correcteur a été choisi de manière à ce que la marge de phase soit de  $60^\circ$ . le critère 2.3.2 de stabilité est respecté.

**Question 38**

L'erreur due à la période d'échantillonnage correspond à la distance parcourue par l'aiguille durant cette durée  $T_e = 10$  ms. En supposant que le moteur tourne à la vitesse de  $N_{\text{maxi}} = 4\,150$  tr/min, cette distance parcourue par l'aiguille est de :

$$\Delta Z_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{maxi}}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = \frac{2 \cdot \pi \times 4\,150}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 2,26 \text{ mm}$$

L'erreur due à la conversion analogique numérique correspond à la distance parcourue par l'aiguille pour une impulsion du codeur incrémental. Cette distance parcourue par l'aiguille est :

$$\Delta Z_{\text{AN}} = \frac{2 \cdot \pi}{2\,000} \cdot k_r \cdot R_p = \frac{2 \cdot \pi \times 10}{2\,000 \times 19,2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

On en déduit l'erreur maximale de position :  $\Delta Z_{\text{mes}} = \Delta Z_e + \Delta Z_{\text{AN}} = 2,26 \text{ mm}$

Remarque : l'erreur est principalement due à la période d'échantillonnage. L'erreur due à la conversion analogique numérique est négligeable.

**Cette erreur de 2,26 mm n'est pas compatible avec l'exigence Id.2.3.1 du cahier des charges qui impose une précision de positionnement de l'aiguille inférieure à 1 mm**

**Question 39**

La nouvelle procédure permet (après une première entrée de l'aiguille dans le liquide puis une sortie) une nouvelle entrée dans le liquide mais à une vitesse plus faible. Car la vitesse du moteur à la deuxième entrée dans le liquide est plus lente :  $N_{\text{lent}} < N_{\text{max}}$ . Donc l'erreur due à la conversion analogique n'est pas modifiée mais celle due à la période d'échantillonnage est diminuée.

On en déduit de la même manière la nouvelle erreur maximale de position :

$$\Delta Z'_{\text{mes}} = \Delta Z'_e + \Delta Z_{\text{AN}} = \Delta Z_{\text{AN}} + \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{lent}}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = 1,6 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot \pi \times 1\,500}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 0,803 \text{ mm}$$

Le flacon dans lequel est prélevé le liquide étant un cylindre de diamètre  $D_f = 15$  mm, on en déduit l'erreur de volume correspondant :

$$\Delta V = \Delta Z'_{\text{mes}} \cdot \frac{\pi \cdot D_f^2}{4} = 0,803 \cdot \frac{\pi \times 15^2}{4} = 142 \text{ mm}^3 = 0,142 \text{ ml}$$

**Question 40**

Dans un premier temps on choisit un correcteur PI pour obtenir une précision de positionnement de l'aiguille sans erreur statique.

Dans un second temps, on utilise un moteur permettant d'avoir une vitesse d'approche rapide puis une vitesse de descente lente. Cela permet de déterminer plus précisément la position d'entrée de l'aiguille dans le liquide et donc de déterminer plus précisément la position de consigne de l'aiguille pour avoir un dosage en liquide précis.