TD "Train épicycloïdal"

Corrigé

Par la relation de Willis

1.1 Satellite : Roue dentée 3

Porte satellite : Pièce 2 (Sortie)

Planétaires : Roue dentée 1 (Entrée)

: Couronne 4 (fixe / au bâti 0)

1.2 Raison du train :

$$\lambda = \frac{\omega_{1/2}}{\omega_{4/2}} = (-1)^1 \frac{Z_4 Z_3}{Z_3 Z_1} = -\frac{Z_4}{Z_1}$$

1.3 Relation de Willis :

$$\frac{\omega_{1/0} - \omega_{2/0}}{\omega_{4/0} - \omega_{2/0}} = -\frac{Z_4}{Z_1} \quad \text{Avec :} \quad \begin{cases} \omega_{1/0} = \omega_{Entrée/0} \\ \omega_{4/0} = 0 \\ \omega_{2/0} = \omega_{sortie/0} \end{cases}$$

Donc $$\frac{\omega_{Entrée/0} - \omega_{sortie/0}}{0 - \omega_{sortie/0}} = -\frac{Z_4}{Z_1}$$

Soit $$Z_1\,\omega_{Entrée/0} - Z_1\,\omega_{sortie/0} = Z_4\,\omega_{sortie/0}$$

D'où le rapport de transmission du train

$$\boxed{K = \frac{\omega_{sortie/0}}{\omega_{Entrée/0}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_4}}$$

Par la cinématique :

(2.1) Attention les points A et C sont des points geometriques : $A \notin 1$ $A \notin 3$ $B \notin 3$ $B \notin 4$

Donc $\vec{V}_{A\in 1/0} \neq \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0}$ $\vec{V}_{A\in 3/0} \neq \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0}$ et $V_{C\in 3/0} \neq \left(\frac{d\vec{OC}}{dt}\right)_{R_0}$

$$\vec{V}_{A\in 1/0} = \vec{V}_{O\in 1/0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

avec $\vec{V}_{O\in 1/0} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de la pivot 1/0

Donc $\vec{V}_{A\in 1/0} = -R_1 \vec{y_2} \wedge \omega_{1/0} \vec{x_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{V}_{A\in 1/0} = R_1 \omega_{1/0} \vec{z_2}}$

$$\vec{V}_{A\in 3/0} = \vec{V}_{B\in 3/0} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$$

avec $\vec{V}_{B\in 3/2} = \vec{0}$ car B est sur l'axe de la pivot 3/2

donc $\vec{V}_{B\in 3/0} = \vec{V}_{B\in 3/2} + \vec{V}_{B\in 2/0} = \vec{V}_{B\in 2/0}$

or $\vec{V}_{B\in 2/0} = \vec{V}_{O\in 2/0} + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

avec $V_{O\in 2/0} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de la pivot 2/0

Donc $\vec{V}_{A\in 3/0} = \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$

avec $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = (\omega_{3/2} + \omega_{2/0}) \vec{x_2}$

$\Rightarrow \vec{V}_{A\in 3/0} = -(R_1+R_3)\vec{y_2} \wedge \omega_{2/0} \vec{x_2} + R_3 \vec{y_2} \wedge (\omega_{3/2} + \omega_{2/0}) \vec{x_2}$

$= \left[(R_1+R_3)\omega_{2/0} - R_3 \omega_{3/2} - R_3 \omega_{2/0}\right] \vec{z_2}$

$$\boxed{\vec{V}_{A\in 3/0} = \left[R_1 \omega_{2/0} - R_3 \omega_{3/2}\right] \vec{z_2}}$$

$$\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/0}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$

or on a vu que $\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Donc $\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

$$\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = -(R_1+R_3)\,\vec{y}_2 \wedge \omega_{2/0}\vec{x}_2 - R_3\,\vec{y}_2 \wedge (\omega_{3/2}+\omega_{2/0})\vec{x}_2$$

$$\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \left[(R_1+R_3)\,\omega_{2/0} + R_3\,\omega_{3/2} + R_3\,\omega_{2/0}\right]\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \left[(R_1+2R_3)\,\omega_{2/0} + R_3\,\omega_{3/2}\right]\vec{z}_2$$

D'autre part on a $R_1 + 2R_3 = R_4$

Donc $\boxed{\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \left[R_4\,\omega_{2/0} + R_3\,\omega_{3/2}\right]\vec{z}_2}$

2.2 Roulement sans glissement en A $\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 3/1}} = \vec{0}$

or $\overrightarrow{V_{A\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 3/0}} + \overrightarrow{V_{A\in 0/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 3/0}} - \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$

soit $\overrightarrow{V_{A\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \Rightarrow R_1\,\omega_{1/0}\,\vec{z}_2 = \left[R_1\,\omega_{2/0} - R_3\,\omega_{3/2}\right]\vec{z}_2$

Donc $R_3\,\omega_{3/2} = R_1\,\omega_{2/0} - R_1\,\omega_{1/0}$ (a)

Roulement sans glissement en C $\Rightarrow \overrightarrow{V_{C\in 3/4}} = \vec{0}$

or $\overrightarrow{V_{C\in 3/4}} = \overrightarrow{V_{C\in 3/0}} + \overrightarrow{V_{C\in 0/4}}$ avec $\overrightarrow{V_{C\in 0/4}} = \vec{0}$ car la couronne 4 est fixe par rapport au bâti 0

Donc $\overrightarrow{V_{C\in 3/0}} = \vec{0} \Rightarrow R_4\,\omega_{2/0} + R_3\,\omega_{3/2} = 0$ (b)

Des equation (a) et (b) $\Rightarrow R_4\,\omega_{2/0} + R_1\,\omega_{2/0} - R_1\,\omega_{1/0} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\omega_{sortie/0}}{\omega_{Entrée/0}} = K = \frac{R_1}{R_1+R_4} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_4}}$$

car $\forall i$ $R_i = \frac{m Z_i}{2}$