

PSI 2024-2025 DS N°2 – Sujet A Corrigé
Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée (CCINP – PSI – 2018)

Partie I- Présentation du prototype de canne robotisée étudié

Question 1

Pour un cycle de marche normale, il y a bien une symétrie des appuis sur les jambes droite et gauche. Aussi bien en ce qui concerne la durée et l'intensité des efforts normaux.

Pour un cycle de marche perturbée, l'appui sur la jambe saine (jambe droite) est prolongé d'environ 10% du cycle, ce qui augmente la durée du double appui avant le balancement de la jambe saine.

Cette augmentation du double appui permet une augmentation plus progressive de l'appui sur la jambe immobilisée à 20°. D'autre part la valeur moyenne de l'effort sur la jambe immobilisée est peu réduite mais elle est plus constante : une variation d'environ 0,05 contre 0,4 pour la marche normale.

Question 2

Pour un cycle de marche assistée, l'effort normal sur la jambe immobilisée à 20° est diminué d'environ 0,2 à 0,3. Cela est compensé par l'effort normal sur la canne qui est d'environ 0,2 sur la phase d'appui de la jambe immobilisée à 20°.

On lit sur la figure 7, une valeur maximale de l'effort normal sur la canne de 0,25. Cela est une valeur normalisée. D'où la valeur maximale de l'effort normal sur la canne : **$0,25 \times 9,81 \times 71,4 = 175 \text{ N}$.**

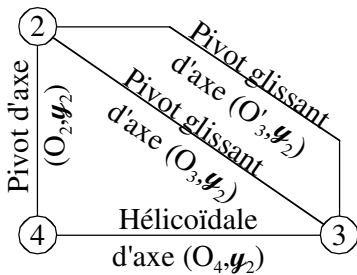
Partie III- Etude de l'architecture du système vis-écrou de l'axe linéaire

Question 3

Les éléments roulants (douille à billes et vis-écrou à billes) permettent de limiter les frottements dans les liaisons, tout en gardant une bonne rigidité dans ces liaisons avec des jeux faibles. Les exigences qui justifient l'utilisation de ces éléments roulants sont donc :

- ☞ Id 8 : « Système réversible »
- ☞ Id 3.1.6.2.1 : « Rigidité élevé, pas de jeu radial et faible résistance au déplacement »
- ☞ Id 4 : « Le système doit limiter son impact environnemental » : Consommation énergétique, bruit.

Question 4



Le modèle retenu dont le graphe de structure est donné ci-contre a :

- ☞ Une seule mobilité : $m = 1$
- ☞ Un nombre cyclomatique : $\gamma = 2$
- ☞ Un nombre d'inconnues cinématiques : $I_C = 1 + 1 + 2 \times 2 = 6$

On en déduit le degré d'hyperstatisme du mécanisme :

$H = 6 \cdot \gamma + m - I_C = 6 \times 2 + 1 - 6$ **$H = 7$**

Question 5

La fermeture cinématique du cycle 2-3-2 donne :

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_3}^y & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{O_3} + \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \omega_{O'_3}^y & V_{O'_3}^y \\ 0 & 2 \cdot a \cdot \omega_{O'_3}^y \end{matrix} \right\}_{O_3} = \{0\}$$

Cela donne donc trois équations triviales (Equations de la résultante sur \vec{x}_2 et \vec{z}_2 et du moment sur \vec{x}_2). Donc pour assurer un guidage entre 3 et 2 dans de bonnes conditions, il faut :

- ☞ **Un bon parallélisme entre les axes (O_3, \vec{x}_2) et (O'_3, \vec{x}_2) sur lesquels glissent les douilles à billes**
- ☞ **Une distance précise entre les axes (O_3, \vec{x}_2) et (O'_3, \vec{x}_2) sur lesquels glissent les douilles à billes**

Question 6

L'avantage d'un tel guidage hyperstatique est de permettre une bonne rigidité pour le guidage de la canne supérieure par rapport à la canne inférieure.

Question 7

Notons $\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\}$ le torseur cinématique de la liaison à ces deux liaisons en parallèle. On a :

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_3}^y & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O'_3}^y & V_{O'_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O'_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O'_3}^y & V_{O'_3}^y \\ 0 & 2.a.\omega_{O'_3}^y \end{Bmatrix}_{O_3}$$

On obtient donc : Par l'équation de la résultante sur \vec{y}_2 : $\omega_{O_3}^y = \omega_{O'_3}^y$

Par l'équation des moments en O_3 sur \vec{y}_2 : $V_{O_3}^y = V_{O'_3}^y$

Par l'équation des moments en O_3 sur \vec{z}_2 : $\omega_{O'_3}^y = 0$

D'où la torseur cinématique de la liaison équivalent :

$$\{\mathcal{V}_{eq}(2/3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_4}$$

La liaison équivalente à ces deux liaison pivot glissant est donc une glissière de direction \vec{y}_2 .

Partie IV- Etude de l'exigence Id 3.1.6 « Commande des axes asservis

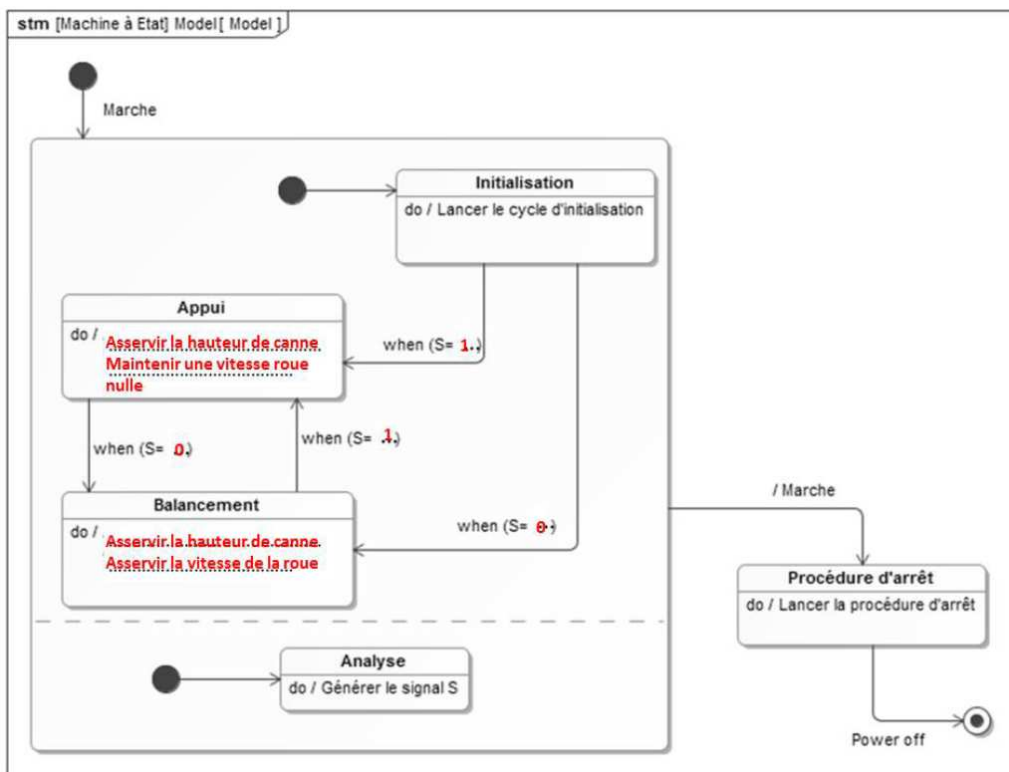
Question 8

On a par la relation de Chasles : $\vec{IH} = \vec{IA} + \vec{AH} \Rightarrow h_0 \cdot \vec{y}_0 + \vec{IH} \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = R \cdot \vec{y}_0 + \ell(t) \cdot \vec{y}_2$

Soit en projection sur \vec{y}_0 : $h_0 = R + \ell(t) \cdot \vec{y}_2 \cdot \vec{y}_0$ or : $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_0 = \cos \theta(t)$

On obtient donc : $h_0 = R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)$ Ou : $\ell(t) = \frac{h_0 - R}{\cos \theta(t)}$

Question 9



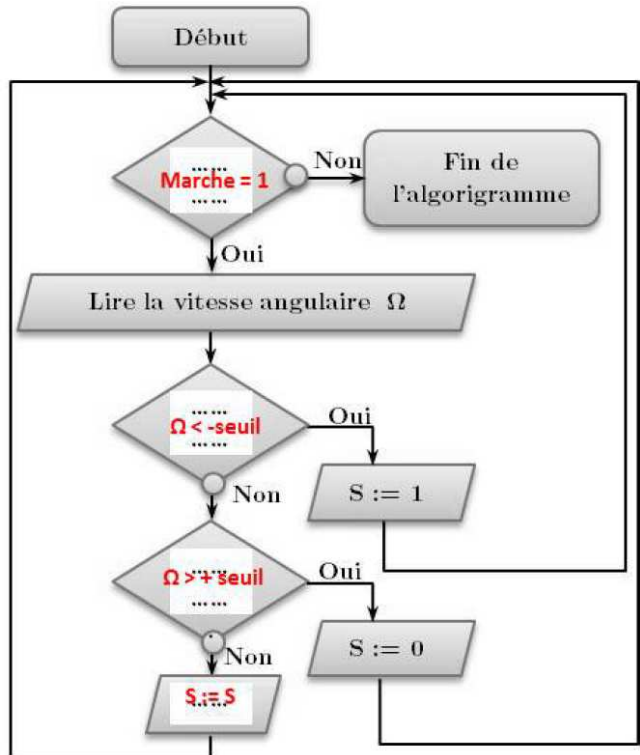
Question 10

La figure 12 montre une valeur absolue maximale pour Ω de : 130 rad.s^{-1} .

D'où le seuil sera tel que :

$$\text{Seuil} = 130 \cdot \frac{1}{100} = 1,3$$

Question 11



Partie IV – Modélisation et analyse de la commande lors de la phase de d'appui

5.1- Elaboration du modèle de connaissance de la partie dynamique de l'axe linéaire

Question 12

L'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement (Rotor + Vis + Canne supérieure) est :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{rotor}} \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{vis}} \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_m^2 \quad \text{avec : } V_m = \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$$

$$\text{Donc : } E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot \left[J_{\text{rotor}} + J_{\text{vis}} + M \cdot \left(\frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \right)^2 \right] \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{eq}} \cdot \omega_m^2$$

$$\text{Avec : } J_{\text{eq}} = J_{\text{rotor}} + J_{\text{vis}} + M \cdot \left(\frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \right)^2 = 21,9 \cdot 10^{-7} + 1,53 \cdot 10^{-6} + 1 \times \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \pi} \right)^2 = 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

Question 13

Les actions extérieures s'appliquant sur S sont :

- ☞ Le couple moteur C_m : $P(\text{moteur} \rightarrow 4/2) = C_m \cdot \omega_m$.
- ☞ L'action du patient : $P(\text{patient} \rightarrow 3/2) = \vec{F}_P \cdot \vec{V}_m \cdot \vec{y}_2 = -F_P \cdot \vec{y}_2 \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m \cdot \vec{y}_2 = -F_P \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$
- ☞ L'action de 2 sur 4 due à la liaison pivot parfaite : $P(2 \rightarrow 4/2) = 0$
- ☞ L'action de 2 sur 3 due à la liaison glissière parfaite : $P(2 \rightarrow 3/2) = 0$

D'où la somme des puissances des actions extérieures : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/2) = C_m \cdot \omega_m - F_P \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$

L'ensemble des effets des frottements visqueux ramené sur l'arbre moteur est un coefficient f.

D'où la somme des puissances des actions intérieures : $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/2) = -f \cdot \omega_m^2$

Question 14

L'application du théorème de l'énergie cinétique : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/2) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/2) = \frac{d E_C(S/2)}{dt}$

Donne : $C_m(t) \cdot \omega_m(t) - F_P(t) \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m(t) - f \cdot (\omega_m(t))^2 = J_{\text{eq}} \cdot \omega_m(t) \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt}$

D'où l'équation différentielle du mouvement : $C_m(t) \cdot - F_P(t) \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} - f \cdot \omega_m(t) = J_{\text{eq}} \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt}$

5.2- Modélisation de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire

Question 15

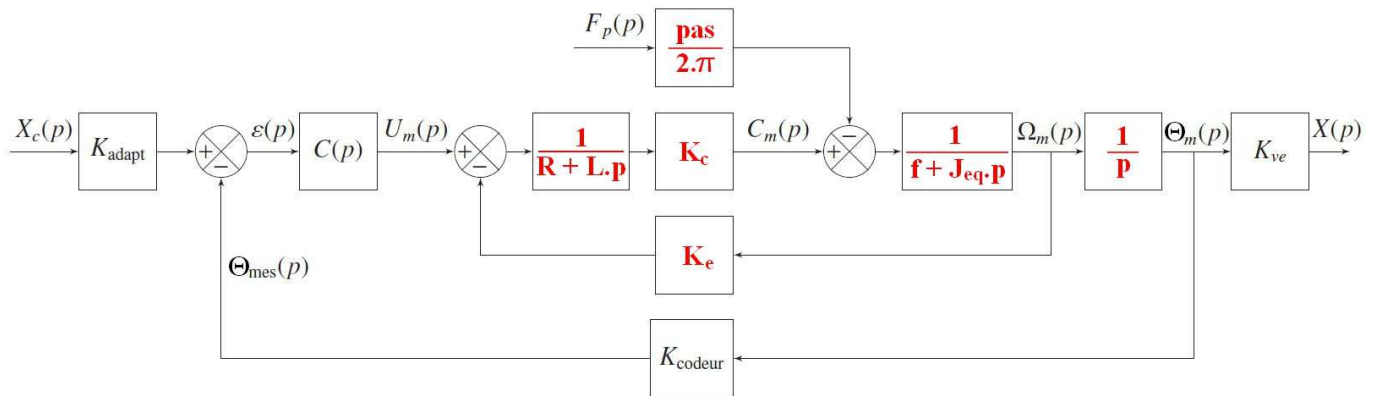
Les conditions initiales étant nulles la transformée de Laplace de cette équation donne :

$C_m(p) \cdot - F_P(p) \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} - f \cdot \Omega_m(p) = J_{\text{eq}} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$ Soit : $\Omega_m(p) = \frac{1}{f + J_{\text{eq}} \cdot p} \cdot \left[C_m(p) \cdot - F_P(p) \cdot \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} \right]$

$U_m(p) = E(p) + R \cdot I_m(p) + L \cdot p \cdot I_m(p)$ Soit : $I_m(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot (U_m(p) - E(p))$

Enfin on a : $C_m(p) = K_c \cdot I_m(p)$ Et : $E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p)$

Ces égalités permettent de compléter le schéma bloc du moteur ci-dessous :



Question 16

A partir des valeurs numériques prise sur le diagramme ibd du document 2 on en déduit :

$K_{ve} = \frac{\text{pas}}{2 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \pi} = 4,77 \cdot 10^{-4} \text{ m.rad}^{-1}$ et : $K_{codeur} = \frac{500}{2 \cdot \pi} = 79,6 \text{ inc.rad}^{-1}$

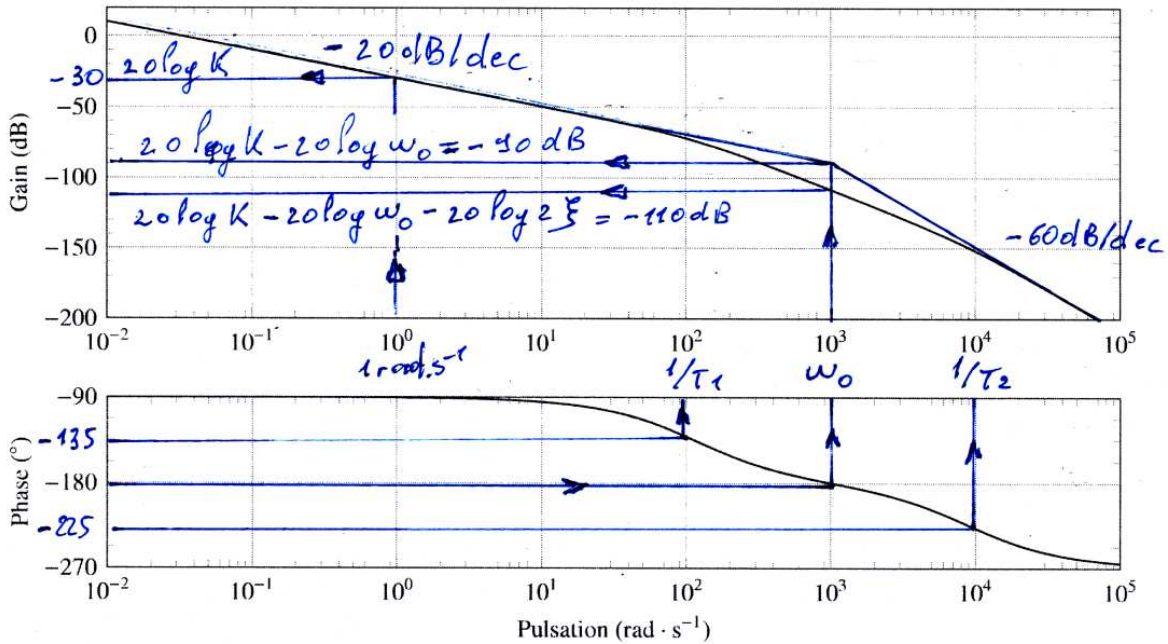
Question 17

Sachant que $\epsilon(p) = 0$ pour $X(p) = X_C(p)$ on en déduit :

$K_{\text{adapt}} = \frac{K_{\text{codeur}}}{K_{ve}} = \frac{500}{3 \cdot 10^{-3}} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ inc.m}^{-1}$

5.3- Modèle comportemental

Question 18



Sur le diagramme de Bode de la FTBO du système non perturbé on voit que :

☞ Pour : $\omega \rightarrow 0$, la phase $\rightarrow -90^\circ$ La pente du gain $\rightarrow -20$ dB/dec

☞ Pour : $\omega \rightarrow +\infty$, la phase $\rightarrow -270^\circ$ La pente du gain $\rightarrow -60$ dB/dec

D'autre part la phase est monotone décroissante donc la FTBO est le produit d'un intégrateur et d'un

second ordre :
$$H_{BO_1}(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On lit sur le diagramme de phase $\varphi = -180^\circ$ à une pulsation de $1\,000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Donc $\omega_0 = 1\,000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

On lit sur la courbe de gain qu'à la pulsation ω_0 le gain de la FTBO est de -110 dB et que l'ordonnée de l'asymptote à la courbe de gain pour $\omega \rightarrow 0$ est de -90 dB . Donc $-110 + 90 = -20 \cdot \log(2 \cdot \xi)$. On en déduit

donc :
$$\xi = \frac{10^{(20/20)}}{2} = 5$$

On lit sur le diagramme de gain qu'à la pulsation $\omega = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ l'ordonnée de l'asymptote à la courbe de gain pour $\omega \rightarrow 0$ est de -30 dB . Donc $K = 10^{(-30/20)} = 0,0316$.

D'où l'expression de la FTBO :
$$H_{BO_1}(p) = \frac{0,0316}{p \cdot \left(1 + \frac{2 \times 5}{10^3} \cdot p + \frac{p^2}{10^6}\right)}$$
 ou :
$$H_{BO_1}(p) = \frac{0,0316}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{100} + \frac{p^2}{10^6}\right)}$$

Etant donné que $\xi > 1$ la FTBO peut s'écrire
$$H_{BO_1}(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

Avec : $T_1 + T_2 = \frac{1}{100}$ et : $T_1 \cdot T_2 = \frac{1}{10^6}$ D'où : $T_2 = 1,01 \cdot 10^{-4} \approx 10^{-4} \text{ s}$ et : $T_1 = 9,90 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-2} \text{ s}$.

D'où l'expression de la FTBO :
$$H_{BO_1}(p) = \frac{0,0316}{p \cdot (1 + 10^{-2} \cdot p) \cdot (1 + 10^{-4} \cdot p)}$$

Autre méthode : Etant donné que $\xi \gg 1$ on peut lire directement T_1 et T_2 sur le diagramme de phase.

On lit sur le diagramme de phase $\varphi = -135^\circ$ à une pulsation de $100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Donc $T_1 = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ s}$

On lit sur le diagramme de phase $\varphi = -225^\circ$ à une pulsation de $10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Donc $T_2 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \text{ s}$

Question 19

A allure rapide la fréquence moyenne est de :

$$f = \frac{113}{60} = 1,88 \text{ Hz}$$

Question 20

A $F_{Max} = 4 \text{ Hz}$, la pulsation est de $\omega = 4 \times 2.\pi = 25 \text{ rad.s}^{-1}$. Cette pulsation est très inférieure à la pulsation $\frac{1}{T_1} = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\frac{1}{T_2} = 10\,000 \text{ rad.s}^{-1}$. Donc pour des fréquences inférieures à F_{Max} la FTBO peut être assimilée à un intégrateur pur : $H_{BO}(p) = \frac{0,0316}{p}$ Soit : $H_{BO}(p) \approx \frac{1}{30.p}$

5.4- Correction proportionnelle

Question 21

La FTBO correspondant au schéma bloc de la figure 16 s'écrit : $H_{BO}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{p}$.

On en déduit la FTBF : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{p}}{1 + \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{p}} = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{p + K_{corr} \cdot K_{BO}}$ Soit : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{corr} \cdot K_{BO}}}$

Donc la FTBF est un premier ordre de : Gain statique unitaire : $K_{BF} = 1$

Constante de temps : $\tau = \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}}$

Avec $K_{corr} = 1$ et $K_{BO} = \frac{1}{30}$, on a : $\tau = 30 \text{ s}$.

L'exigence Id 3.1.6.2 impose une erreur maximale de 5% et un temps de réponse à 5% de 60 ms. Le système ainsi modélisé répond donc au critère de précision (erreur nulle) mais pas au critère de rapidité, car le temps de réponse à 5% est de $t_{5\%} = 3.\tau = 90 \text{ s}$ très supérieur aux 60 ms exigés.

Question 22

Pour répondre au critère de rapidité il faut que : $\frac{3}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leq 0,06$ soit : $K_{corr} \geq \frac{3}{0,06 \cdot K_{BO}}$

Avec $K_{BO} = 1/30$, pour répondre au critère de rapidité il faut donc que : $K_{corr} \geq 1\,500 \text{ V.inc}^{-1}$

Question 23

L'évolution de la réponse temporelle n'est pas cohérente avec le modèle retenu (1^{ier} ordre) car il y a un dépassement de la valeur finale.

Cela est du au fait qu'avec un gain $K_{corr} = 1\,500 \text{ V.inc}^{-1}$ la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est d'environ 20 rad.s^{-1} . Et qu'à cette pulsation le terme $\frac{1}{1 + T_1.p}$ de la FTBO $H_{BO_1}(p)$ n'est plus négligeable. Et donc que la FTBO ne peut plus être considéré comme un intégrateur pur.

Il faut donc modéliser le FTBO avec un second ordre de classe 1 : $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p.(1 + T_1.p)}$

Question 24

Avec cette FTBO on a : $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}$ Soit : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{corr} \cdot K_{BO}} + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p^2}$

Cette FTBF est alors un 2nd ordre : ☞ De gain statique $K_{BF} = 1$

☞ De pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}$

☞ De facteur d'amortissement $\xi = \frac{\omega_0}{2 \cdot K_{corr} \cdot K_{BO}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{corr} \cdot K_{BO} \cdot \tau_{BO}}}$

L'asservissement est donc précis quelque soit la valeur de K_{corr} car le gain statique de $H_{BF}(p)$ est unitaire. En revanche pour vérifier le critère d'amortissement (dépassement inférieur ou égal à 5%) il faut un facteur d'amortissement supérieur à 0,69 : $\xi \geq 0,69 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{corr} \cdot K_{BO} \cdot \tau_{BO}}} \geq 0,69$

On en déduit : $K_{corr} \leq K_{corr}^{Max} = \frac{1}{4 \times 0,69^2 \cdot K_{BO} \cdot \tau_{BO}} = \frac{30}{4 \times 0,69 \times 0,009}$ Soit : $K_{corr}^{Max} = 1\,750 \text{ V.inc}^{-1}$

Question 25

Avec = 1 750 on a $\xi = 0,69$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{1\,750}{30 \times 0,009}} = 80,5 \text{ rad.s}^{-1}$.

D'autre part pour $\xi = 0,69$ le document 6 donne : $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$. Soit : $t_{5\%} = \frac{3}{80,5} = 0,037 \text{ s} = 37 \text{ ms}$

Ce correcteur permet donc de vérifier les exigences de dépassement et de rapidité du cahier des charges.

Question 26

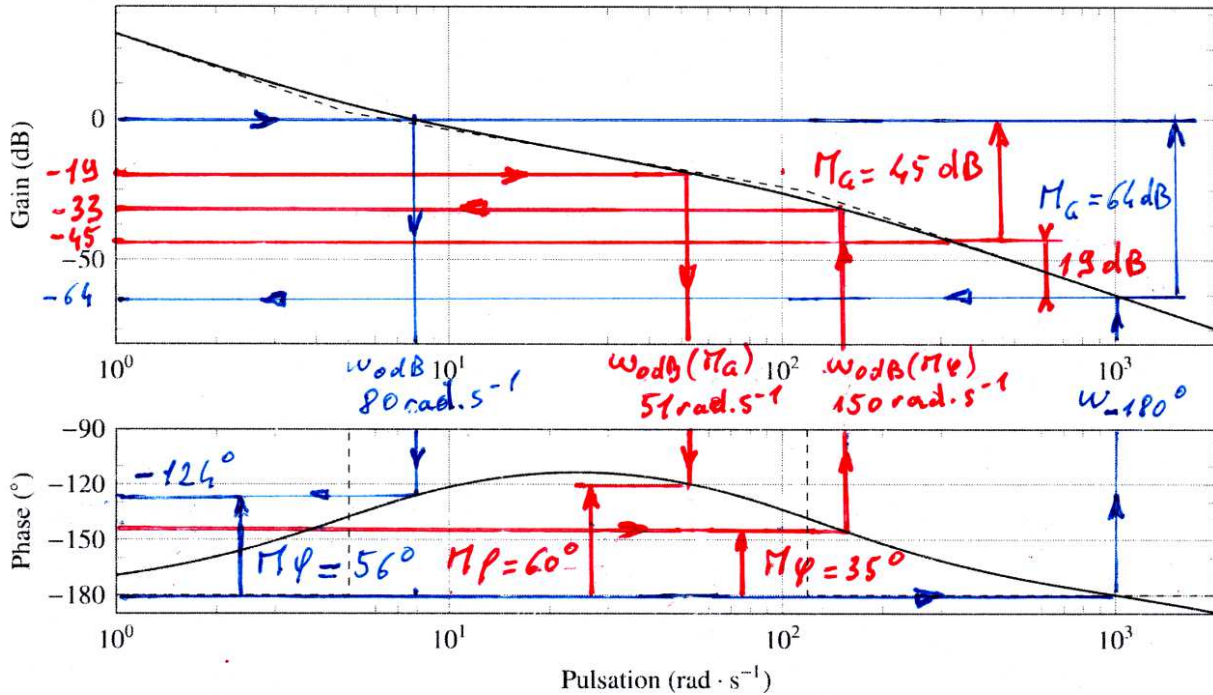
Avec la perturbation, l'asservissement n'est plus précis (car l'intégrateur de la FTBO est placé en aval de la perturbation : voir schéma bloc du document réponse DR3. L'erreur est minimale pour $K_{corr} = K_{corr}^{Max}$.

On lit alors sur la figure 18 une erreur indicielle de : $\epsilon_S = \frac{0,01 - 0,0087}{0,01} = 0,132 = 13,2 \%$

Or d'après le diagramme des exigences (Id Id 3.1.6.2) on doit avoir $\epsilon_S \leq 5\%$. Donc on ne peut pas, avec un correcteur proportionnel, vérifier simultanément les exigences de dépassement, de rapidité et de précision avec la perturbation.

5.5- Correction avec action proportionnelle et intégrale – correcteur PI

Question 27 Voir tracé en bleu ci-dessous



Marge de phase.

Par lecture : $\omega_{0dB} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$ $\varphi(\omega_{0dB}) = -124^\circ$ $M_\varphi = 180^\circ - 124^\circ$ **$M_\varphi = 56^\circ$**

Marge de gain

Par lecture : $\omega_{-180^\circ} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ $G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -64 \text{ dB}$ $M_G = -G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$ **$M_G = 64 \text{ dB}$**

Question 28 Voir tracé en rouge ci-dessous

Pour respecter la marge de phase il faut une phase à ω_{0dB} supérieure à $35 - 135^\circ = -145^\circ$. Par lecture sur le diagramme de phase on en déduit qu'il faut $\omega_{0dB} \in [37;150] \text{ rad.s}^{-1}$. On retient la pulsation de $\omega_{0dB} = 150 \text{ rad.s}^{-1}$ pour maximiser la bande passante.

On a à cette pulsation pour $K_{corr} = 1\,000$ un gain dynamique de la FTBO de -33 dB . Donc pour avoir $\omega_{0dB} = 150 \text{ rad.s}^{-1}$ il faut : **$K_{corr} = 1\,000 \times 10^{(33/20)} = 44\,700 \text{ V.inc}^{-1}.s^{-1}$** .

Le gain K_{corr} est sans influence sur la phase donc $\forall K_{corr}$ on a $\omega_{-180^\circ} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Pour $K_{corr} = 1\,000$ le gain dynamique de la FTBO est de -64 dB . Or pour avoir une marge de gain de 45 dB , il faut que le gain à cette pulsation soit de -45 dB . Donc la courbe de gain peut être translatée de $-45 + 64 = 19 \text{ dB}$. Donc pour avoir une marge de gain de 45 dB il faut : **$K_{corr} = 1\,000 \times 10^{(19/20)} = 8\,910 \text{ V.inc}^{-1}.s^{-1}$** .

Finalement : ☞ Pour la marge de phase de 35° il faut : **$K_{corr} \leq 56\,200 \text{ V.inc}^{-1}.s^{-1}$** .

☞ Pour la marge de gain de 45 dB il faut : **$K_{corr} \leq 8\,910 \text{ V.inc}^{-1}.s^{-1}$** .

Donc pour les exigences de stabilité il faut un gain maximal du correcteur de **$K_{corr}^{Max} = 8\,910 \text{ V.inc}^{-1}.s^{-1}$** .

Question 29

Avec ce correcteur qui respecte les marges de stabilité le système est également précis ($\epsilon_S = 0$ car on a un intégrateur en amont de la perturbation). Il respecte également l'exigence de rapidité car $t_{5\%} \approx 50 \text{ ms}$. Et enfin l'exigence d'amortissement car il n'y a pas de dépassement de la valeur finale.

Donc toutes les exigences du cahier des charges sont respectées.

Cependant cela impose un pic d'intensité au début du mouvement de 35 A . Or l'intensité maximale du moteur est de $26,8 \text{ A}$. Donc cette commande risque d'endommager le moteur.

Question 30

Ce bloc de saturation sera placé entre les blocs $\frac{1}{R+L.p}$ et K_c du document réponse DR3.

Question 31

Avec ce bloc de saturation seule la rapidité est très légèrement modifiée. $t_{5\%} \nearrow : t_{5\%} \approx 55 \text{ ms} < 60 \text{ ms}$.
 Donc toutes les exigences du cahier des charges sont respectées.

Partie VI - Étude de l'exigence 3.1.3 « Transmission des efforts du patient »

Question 32

Si on isole l'ensemble {1,2,3}, les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ L'action du sol 0 sur 1 : Une force $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}$ appliquée en I
- ☞ L'action du patient sur 1 : Une force \vec{F}_P appliquée en H

D'après le théorème du système à l'équilibre soumis à deux forces, on en déduit que ces deux forces ont même support la droite (IH). D'autre part on a : $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = - \vec{F}_P$

Question 33

D'après la loi de Coulomb, l'angle entre $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}$ et \vec{j}_0 est inférieur ou égal à l'angle d'adhérence φ .

Donc pour maintenir la canne à l'équilibre on doit avoir $\beta(t) < \varphi$.

Cet équilibre sera maintenu quelque soit l'intensité de \vec{F}_P car pour maintenir l'équilibre il suffit d'avoir $\beta(t) < \varphi$ et $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = - \vec{F}_P$.

Ce type d'équilibre est un arc-boutement.

Question 34

On peut écrire : $\vec{IA} + \vec{AH} + \vec{HI} = \vec{0}$ Soit : $R \cdot \vec{j}_0 + \ell(t) \cdot \vec{y}_2 - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Soit en projection :

	sur \vec{i}_0	- $\ell(t) \cdot \sin \theta(t) + \lambda \cdot \sin \beta(t) = 0$	$\Rightarrow \lambda \cdot \sin \beta(t) = \ell(t) \cdot \sin \theta(t)$
	sur \vec{j}_0	$R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t) - \lambda \cdot \cos \beta(t) = 0$	$\Rightarrow \lambda \cdot \cos \beta(t) = R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)$

On obtient donc par le quotient de ces deux égalités : **$\tan \beta = \frac{\ell(t) \cdot \sin \theta(t)}{R + \ell(t) \cdot \cos \theta(t)}$**

Question 35

On relève sur la figure 3 un angle maximal de 20° . On obtient donc : $\beta = \arctan\left(\frac{h-R}{h} \cdot \tan \theta\right)$

Application numérique : $h = 101 \text{ cm}$ $R = 5 \text{ cm}$ $\theta = 20^\circ$ $\beta = \arctan\left(\frac{101-5}{101} \cdot \tan 20^\circ\right) = 19^\circ$

D'où le facteur de frottement minimal nécessaire : **$f_{\min} = \tan \beta = \tan 19^\circ$ $f_{\min} = 0,34$**

Or pour un sol en béton $f = 0,4 > f_{\min}$. Donc le prototype peut-être utilisé sur un sol en béton.

Question 36

On isole la roue 1, les actions mécaniques extérieures sont :

- ☞ Action du sol 0 sur la roue 1 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = - F_P \cdot \vec{v}$ Appliquée en I et telle que $\varphi = \widehat{\vec{y}_0 \cdot \vec{v}}$
- ☞ Action de la canne inférieure 2 sur la roue 1 due à la liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0)
- ☞ Action de la courroie sur la roue : $\mathcal{M}_{A(\text{Courroie} \rightarrow 1).Z_0} = C_r$ car les deux poulies (motrices et réceptrices) ont le même diamètre primitif : $D_{pm} = D_{pr}$.

Le théorème du moment statique par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) donne : $\vec{AI} \wedge (-\vec{F}_P) \cdot \vec{z}_0 + 0 + C_r = 0$

Or : $\vec{AI} \wedge (-\vec{F}_P) \cdot \vec{z}_0 = -R \cdot \vec{y}_0 \wedge (-F_P \cdot \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + F_P \cdot \cos \varphi \cdot \vec{z}_0) = R \cdot F_P \cdot \sin \varphi$

On en déduit : $C_r = R \cdot F_P \cdot \sin \varphi$

Application numérique : $R = 0,05 \text{ m}$ $F_P = 175 \text{ N}$ $\varphi = \arctan 0,4 = 21,8^\circ$ $C_r = 3,25 \text{ N.m}$

Question 37

Il s'agit de bloquer le mouvement. Donc si le mouvement a lieu l'énergie va de la roue vers le moteur.

Donc : $-C_m \cdot \omega_{mR/2} + \eta_{trans} \cdot C_r \cdot \omega_{R/2} = 0$ (et pas : $-\eta_{trans} \cdot C_m \cdot \omega_{mR/2} + C_r \cdot \omega_{R/2} = 0$) soit : $C_m = \eta_{trans} \cdot C_r \cdot \frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}}$

On obtient donc : $C_m = \eta_{trans} \cdot C_r \cdot r$ Application numérique : $C_m = \frac{0,9 \times 5}{30} = 0,15 \text{ N.m}$

Or le couple nominal du moteur est de $C_n = 0,279 \text{ N.m}$ (et le couple maximal $C_{Max} = K_C \cdot I_{Max} = 2,85 \text{ N.m}$) ce qui est supérieur au couple pour bloquer le mouvement ($C_m = 0,15 \text{ N.m}$).

Sachant que $C_{Max} \geq C_n \geq C_m$ le moteur choisi permet bien le blocage de la roue.

Partie VII - Modélisation et analyse de la commande de la roue lors de la phase de balancement

Question 38

Les points A et H appartiennent respectivement à 2 et 3.

Donc : $\vec{V}_{H,3/2} = \left(\frac{d \vec{AH}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{d \ell(t) \cdot \vec{y}_2}{dt} \right)_{\mathcal{B}_2}$

On en déduit : $\vec{V}_{H,3/2} = \dot{\ell}(t) \cdot \vec{y}_2$

Question 39

Par la relation de Varignon on a : $\vec{V}_{H,2/0} = \vec{V}_{A,2/0} + \vec{HA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

Or A étant le centre de la liaison pivot entre 2 et 1 : $\vec{V}_{A,2/0} = \vec{V}_{A,1/0}$

Or par la relation de Varignon on a : $\vec{V}_{A,1/0} = \vec{V}_{I,1/0} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

D'autre part on a : ☞ Par composition des vitesses : $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{\Omega}_{1/2} + \vec{\Omega}_{2/0}$

☞ Et du fait du roulement sans glissement en I : $\vec{V}_{I,1/0} = \vec{0}$

Donc on obtient : $\vec{V}_{H,2/0} = \vec{HA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$

$\vec{V}_{H,2/0} = -\ell(t) \cdot \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_2 - R \cdot \vec{y}_0 \wedge (-\omega(t)) \cdot \vec{z}_0 - R \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0$

$\vec{V}_{H,2/0} = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] \cdot \vec{x}_0 - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_2$

Question 40

Par composition des vitesses on a : $\vec{V}_{H,3/0} = \vec{V}_{H,3/2} + \vec{V}_{H,2/0}$

Soit : $\vec{V}_{H,3/0} = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] \cdot \vec{x}_0 - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_2 + \dot{\ell}(t) \cdot \vec{y}_2$

Question 41

En projetant cette relation sur \vec{y}_0 on obtient : $\vec{V}_{H,3/0} \cdot \vec{y}_0 = 0 = -\ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \sin \theta(t) + \dot{\ell}(t) \cdot \cos \theta(t)$

Soit : $\dot{\ell}(t) = \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)}$

D'autre en projetant sur \vec{x}_0 on a : $\vec{V}_{H,3/0} \cdot \vec{x}_0 = V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) - \dot{\ell}(t) \cdot \sin \theta(t)$

Par substitution on obtient :
$$V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} \cdot \sin \theta(t)$$

$$V = R[\omega(t) - \dot{\theta}(t)] - \ell(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)}{\cos \theta(t)}$$

$$V = R \cdot \omega(t) - \dot{\theta}(t) \cdot \left[R + \frac{\ell(t)}{\cos \theta(t)} \right]$$

Et donc finalement :

$$\omega(t) = \frac{V}{R} + \dot{\theta}(t) \cdot \left[1 + \frac{\ell(t)}{R \cdot \cos \theta(t)} \right]$$

Question 42

Le rapport de réduction du réducteur est défini par le quotient $\frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}}$ où $\omega_{R/2}$ et $\omega_{mR/2}$ sont respectivement les vitesses de rotation de la roue et de l'arbre moteur par rapport à la canne inférieure 2. Or la fréquence de rotation nominale du moteur est de 3 260 tr/min soit une vitesse de $\omega_{mR/2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3\,260}{60} = 341 \text{ rad.s}^{-1}$.

D'où le rapport du réducteur nécessaire :
$$r = \frac{\omega_{R/2}}{\omega_{mR/2}} = \frac{11}{341} \approx \frac{1}{30}$$

Question 43

Ce réducteur à trains d'engrenages épicycloïdaux à une raison :
$$\lambda = \frac{\omega_{P1/PS}}{\omega_{P2/PS}} = -\frac{Z_{P2} \cdot Z_S}{Z_S \cdot Z_{P1}} = -\frac{Z_{P2}}{Z_{P1}}$$

Question 44

Par composition des vitesses on a :
$$\lambda = \frac{\omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}}{\omega_{P2/2} - \omega_{PS/2}}$$

Or la couronne P2 est encastrée sur la canne inférieure 2. Donc : $\omega_{P2/2} = 0$

On obtient donc : $-\lambda \cdot \omega_{PS/2} = \omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}$ Soit : $\omega_{P1/2} = (1 - \lambda) \cdot \omega_{PS/2}$

Or le rapport de transmission est défini par : $R_1 = \frac{\omega_{PS/2}}{\omega_{P1/PS}}$ Donc : $R_1 = \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{P2}}{Z_{P1}}}$

Soit encore :
$$R_1 = \frac{Z_{P1}}{Z_{P1} + Z_{P2}}$$
 Application numérique :
$$R_1 = \frac{18}{18 + 82} = 0,18$$

Si n est le nombre d'étages du réducteur alors : $r = R_1^n$ Donc : $n = \frac{\ln r}{\ln R_1} = \frac{\ln(1/30)}{\ln 0,18} = 1,98 \approx 2$

Deux étages sont donc nécessaires pour obtenir le rapport de réduction r souhaité.

Partie VIII - Synthèse

Question 45

Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.

Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

Question 46

Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- ☞ Un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de 20° ,
- ☞ Le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne entre l'avant et l'arrière du pied.

Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied.

Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à 20° .

On peut donc conclure que ce réglage permet de satisfaire les performances de synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.