

Sciences Industrielles de l'Ingénieur
DS N°2 : Sujet B

Prothèse myoélectrique Ottobock

Consignes pour la réalisation du sujet

Ce sujet correspond à l'épreuve d'SII du concours CCINP – PSI - 2012
Le sujet a été entièrement remanié mais garde la démarche du sujet original
Il a un niveau de difficulté Centrale / Mines-Ponts

Le sujet est constitué de :

12 pages d'énoncé : (pages 1/12 à 12/12)
2 pages de documents réponses

**Pour les questions 3, 4, 7, 16, 20 et 34 vous utiliserez
les documents réponse que vous détacherez du sujet
et rendrez avec votre copie.**

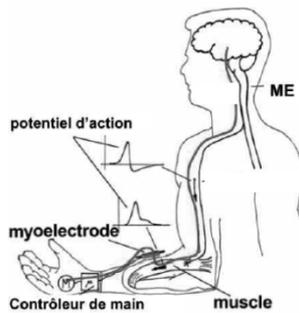
Présentation générale

La main est un organe qui permet de manipuler des objets avec une grande rapidité mais aussi avec une force contrôlée de manière précise. Redonner cette fonction à une personne amputée de la main n'est pas chose aisée. Pour cela le groupe Ottobock a développé une prothèse (voir **figure 1**) qui mise sur le bras amputé de sa main, permet de reproduire l'action de pincement entre les doigts d'une pièce.



Figure 1 – Préhenseur de la prothèse avec et sans le gant de protection en PVC

Cette prothèse est commandée à partir de la contraction des muscles du bras amputé sur lequel sont placés des capteurs appelés myoélectrodes. Ainsi la volonté de la personne amputée est acquise par le signal délivré par ces myoélectrodes (voir **figure 2**)



Myoélectrodes \Rightarrow



Figure 2 – Acquisition de l'intention de serrage par l'utilisateur

Ce signal électrique est ensuite traité par le contrôleur de main qui va délivrer au moteur à courant continu via un hacheur une intensité qui à l'équilibre sera proportionnelle à l'effort de serrage exercé par la prothèse sur la pièce à saisir.

Il s'agit donc d'asservir cet effort de serrage à la valeur de consigne proportionnelle à l'effort de serrage. Ce coefficient de proportionnalité étant constant et fonction des caractéristiques du moteur et de la chaîne de transmission et du préhenseur.

Enfin L'ensemble est recouvert d'un gant de protection en PVC donnant à l'ensemble une allure plus esthétique (voir **figure 3**).



Figure 3 – Gant de protection en PVC

Cahier des charges

Pour cet asservissement sans capteur d'effort (le constructeur compte simplement contrôler l'intensité d'alimentation du moteur et donc le couple moteur) le système doit répondre aux critères suivants du cahier des charges concernant le contrôle de l'effort de serrage $F(t)$:

- ☞ Le temps de réponse à 5% de la phase de serrage (Temps entre le contact avec la pièce à saisir et la fin du serrage) doit être compris entre 250 et 500 ms.
- ☞ Il ne doit y avoir aucun dépassement de la valeur finale

Description structurelle de l'ensemble actionneur transmetteur et préhenseur

La structure de cet ensemble est décrite par la figure 4. On a un motoréducteur à courant continu qui transmet son mouvement à un coupleur à la sortie duquel un engrenage conique (renvoi d'angle) entraîne en rotation le secteur denté fixé sur le doigt 3 qui met en mouvement le doigt 4 via la biellette 5.

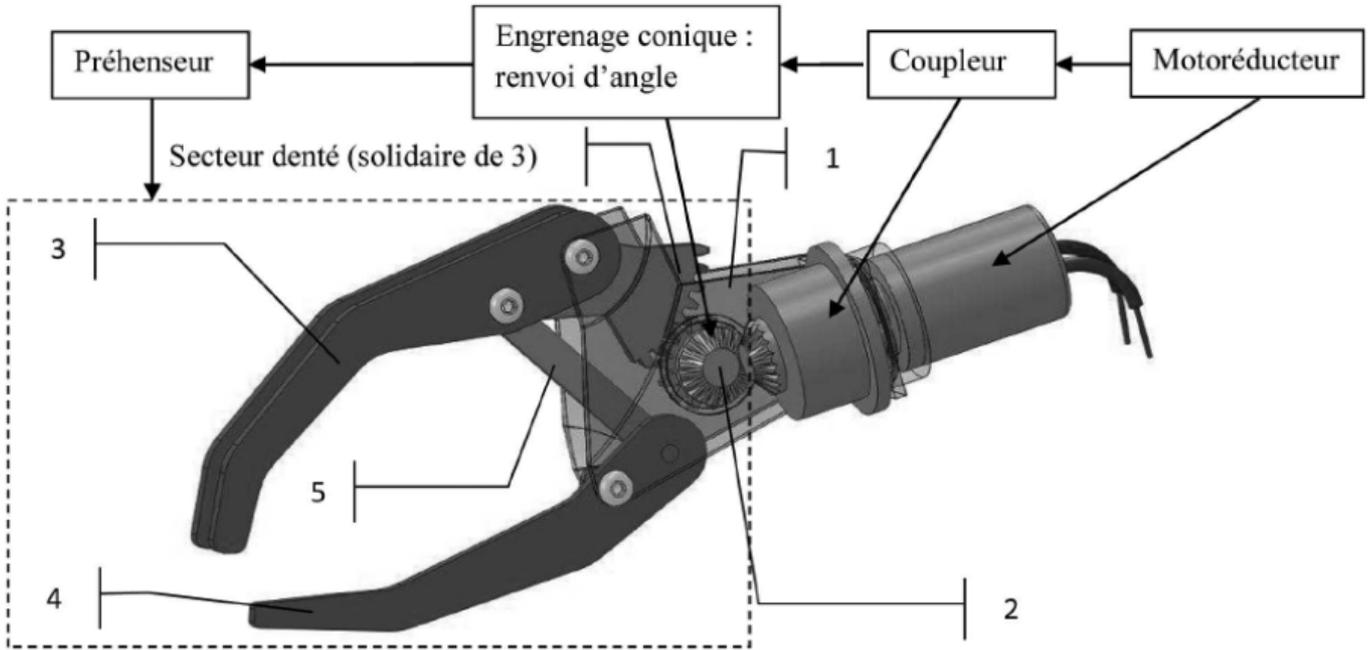


Figure 4 – Schéma de structure du préhenseur

La pièce à saisir est pincée entre les deux doigts par des contacts ponctuels avec les doigts 3 et 4 respectivement de centre E et F.

On a donc deux forces (appliquée en E et F) de la pièce à saisir sur les doigts 3 et 4 :

$$\vec{F}_{\text{Pièce} \rightarrow 4} = -\vec{F}_{\text{Pièce} \rightarrow 3} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \cdot \vec{\mathbf{u}} \quad \text{où:} \quad \vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{EF}}}{\|\vec{\mathbf{EF}}\|} \quad \text{Donc:} \quad \vec{\mathbf{u}} // \vec{\mathbf{EF}}$$

La pièce à saisir est assimilée à un ressort de raideur K de longueur initiale l_0 . On note l la distance entre les points E et F et α l'écrasement de la pièce.

On a donc : $\alpha = l_0 - l$. D'où : $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \mathbf{K} \cdot \alpha(\mathbf{t})$ et : $\vec{\mathbf{V}}_{E \in 3/4} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \dot{\alpha}(\mathbf{t})$

Description du coupleur

Afin de permettre une fermeture rapide de la pince et un écrasement plus lent de la pièce à serrer, le coupleur a un fonctionnement non continu.

Lorsque la pince se ferme avant le contact avec la pièce, le coupleur est bloqué. La transmission du mouvement se fait alors directement de l'arbre d'entrée à l'arbre de sortie. On a donc $\rho = 1$.

Lorsque la pince est en contact avec la pièce et exerce un effort sur celle-ci, le coupleur est actif. La transmission se fait alors de l'arbre d'entrée 16 à l'arbre de sortie 9 par un réducteur à engrenages épicycloïdaux. (Voir figure 5) On a alors $\rho < 1$.

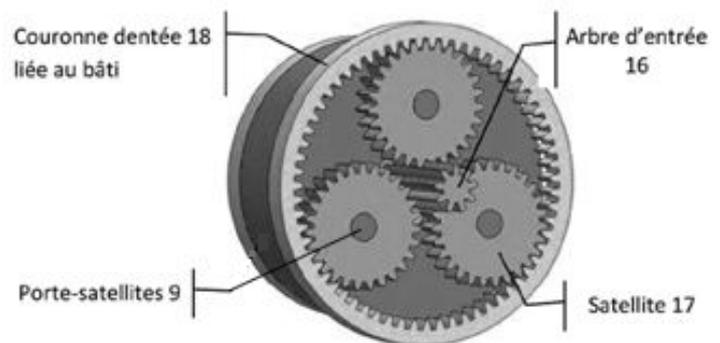


Figure 5 – Schéma de structure réducteur épicycloïdal

D'autre part, lorsque le coupleur est actif, l'arbre de sortie du réducteur à engrenages épicycloïdaux se fait via un ressort de torsion (ressort en spirale) de raideur K_R (en $N.m.rad^{-1}$) qui transmet le couple au renvoi d'angle. La **figure 6** décrit la structure de cette transmission via le ressort de torsion.

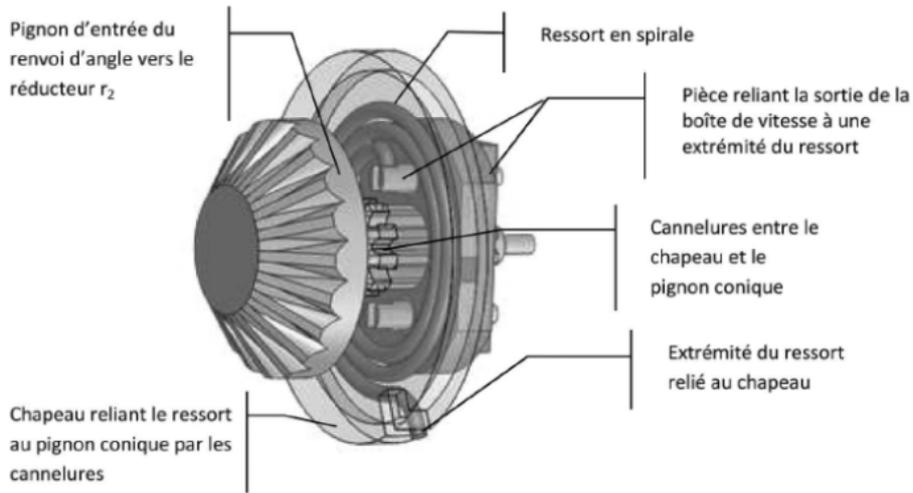


Figure 6 – Schéma de structure réducteur épicycloïdal

Parti I : Etude de la cinématique de la transmission et du préhenseur

Modélisation cinématique du préhenseur

Cette modélisation est donnée par les **figures 7 et 8**. Les doigts 3 et 4 sont liés au bâti 1 par respectivement des liaisons pivot d'axe (A, \vec{z}_1) et (D, \vec{z}_1).

La biellette 5 est en liaisons pivot d'axes (B, \vec{z}_1) et (C, \vec{z}_1) avec respectivement les doigts 3 et 4.

A chaque solide i on associe une base :

$$\mathcal{B}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$$

Avec le paramètre δ_i angle définissant la rotation entre les repères \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_1 .

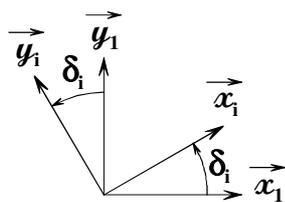


Figure 7 – Figure de changement de bases

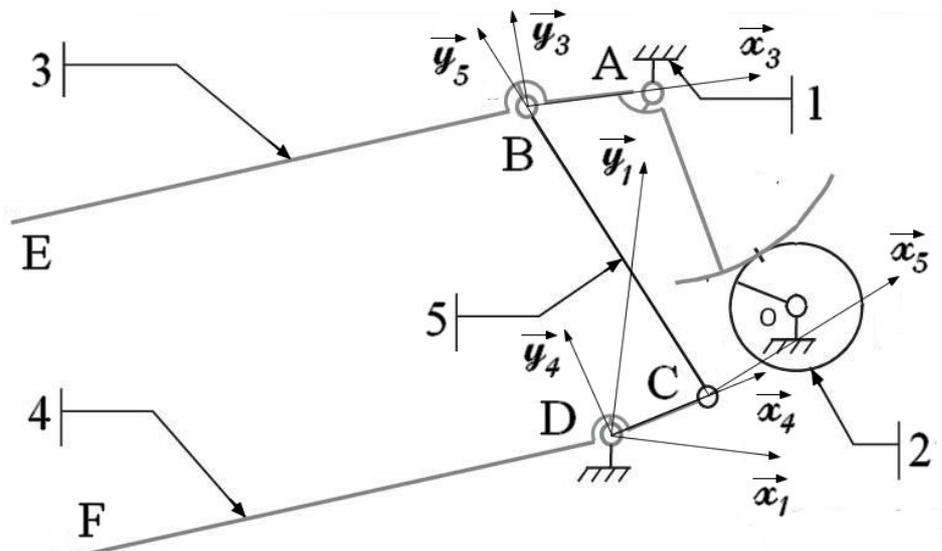


Figure 8 – Schéma de structure réducteur épicycloïdal

La géométrie du système est telle qu'on a l'égalité des distances $AD = BC$ et $AB = CD$. On a alors :

$$\overline{AB} = -d \cdot \vec{x}_3 \quad \overline{DC} = d \cdot \vec{x}_4 \quad \overline{DA} = h \cdot \vec{y}_1 \quad \overline{CB} = h \cdot \vec{y}_5$$

D'autre part on a : $\overline{AE} = x_E \cdot \vec{x}_3 + y_E \cdot \vec{y}_3$ Et : $\overline{DF} = x_F \cdot \vec{x}_4 + y_F \cdot \vec{y}_4$

Détermination du gain du mécanisme préhenseur

Q1 - Ecrire la fermeture géométrique du cycle 1-3-5-4-1 et en déduire deux équations scalaires entre les distances d et h et les paramètres angulaires δ_3, δ_4 et δ_5 .

Q2 - En déduire une unique relation scalaire entre les distances d et h et uniquement les paramètres angulaires δ_3 et δ_4 . Vous écrirez cette relation sous la forme $f(\delta_3, \delta_4) = 0$.

On souhaite tracer la représentation graphique de l'angle δ_4 en fonction de l'angle δ_3 . Pour cela on écrit un code Python en reprenant la relation scalaire écrite précédemment.

Les premières lignes de ce code sont données sur la **figure 9**. On importe ainsi les bibliothèques Python nécessaires et on définit les valeurs en millimètre des constantes : d , h , x_E , y_E , x_F , y_F .

```

5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import numpy as np
7
8 d=15
9 h=54
10 xe,ye=-90,-18
11 xf,yf=-71,0

```

Figure 9 – Premières lignes du code Python

Q3 - Compléter sur le **document réponse DR1** la fonction « **f(d3:float,d4:float) -> float** » qui prend en argument les angles δ_3 et δ_4 en radian et qui retourne la valeur de la fonction $f(\delta_3, \delta_4)$ écrite à la question précédentes.

On écrit une fonction « **Dichotomie(d3 :float) -> float** » qui prend en argument l'angle δ_3 en radian et qui renvoie en radian une approximation à 10^{-6} radian près de l'angle δ_4 .

Cette fonction, dont le code est partiellement donné sur le **document réponse DR2**, recherche par dichotomie dans l'intervalle $[-\pi/2 ; \pi/2]$ la valeur de l'angle δ_4 solution de l'équation $f(\delta_3, \delta_4) = 0$. La fonction $f(\delta_3, \delta_4)$ est supposée monotone croissante ou décroissante sur l'intervalle $[g,d]$.

Pour cela on réduit de moitié, à chaque itération de la boucle **while**, la largeur de l'intervalle $[g,d]$ jusqu'à ce qu'elle soit inférieure à 10^{-6} rad et on retourne la valeur moyenne de cette intervalle.

Q4 - Compléter sur le **document réponse DR2** (ligne 18 à 26) le code de cette fonction.

La figure 10 donne le code correspondant aux fonctions « **Resol_inter(a :float,b :float) -> tuple** » et « **Trace_d4_fct_d3(a :float,b :float)** ». Ces fonctions permettent respectivement d'obtenir : D'une part les listes des valeurs en degré de δ_3 et δ_4 solutions de l'équation $f(\delta_3, \delta_4) = 0$ (Avec 201 valeurs pour δ_3 régulièrement espacées dans l'intervalle $[a,b]$ en degré) et d'autre part, le tracé de la fonction $\delta_4 = f(\delta_3)$ pour $\delta_3 \in [a,b]$ (a et b en degré).

```

29 def Resol_inter(a:float,b:float) -> tuple: # Fonction retournant un couple de tableaux numpy
30                                     # Liste des angles Delta_3 et Delta_4 en degré
31     D3=np.linspace(a*np.pi/180,b*np.pi/180,201) # Tableau des valeurs de Delta_3 en radian
32     D4=[] # Initialisation de la liste des valeurs de Delta_4 en radian
33     for d3 in D3: # Boucle de calcul des angles Delta_4 en radian
34         D4.append(Dichotomie(d3))
35     D4=np.array(D4) # Transformation de la liste D4 en tableau numpy
36     D4=D4*180/np.pi # Passage des angles Delta_4 en degré
37     D3=D3*180/np.pi # Passage des angles Delat_3 en degré
38     return (D3,D4)
39
40 def Trace_d4_fct_d3(a:float,b:float): # Fonction pour tracer Delta_4 = f(Delta_3)
41     X,Y=Resol_inter(a,b)
42     plt.plot(X,Y)
43     plt.xlabel('Angle Delta_3 en degré')
44     plt.ylabel('Angle Delta_4 en degré')
45     plt.title("Angle Delta_4 en fonction de l'angle Delta_3")
46     plt.grid()
47     plt.show()

```

Figure 10 – Code pour le tracé de la fonction $\delta_4 = f(\delta_3)$

En lançant dans le Shell de Python la commande « **Trace_d4_fct_d3(0,28)** » on obtient le tracé de la **figure 11** : $\delta_4 = f(\delta_3)$

Q5 - Etablir, en justifiant votre réponse à partir du tracé de la **figure 11**, la relation entre les vitesses de rotation des deux doigts de la pince :

$$\omega_3 = \frac{d \delta_3(t)}{dt}$$

et :

$$\omega_4 = \frac{d \delta_4(t)}{dt}$$

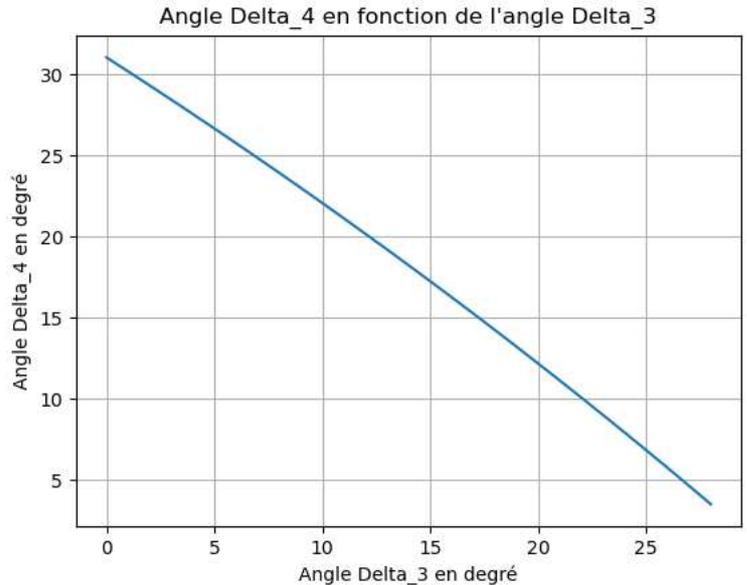


Figure 11 – Tracé de la fonction $\delta_4 = f(\delta_3)$

Q6 - On note x_{EF} et y_{EF} les abscisses et ordonnées du vecteur \vec{EF} dans le repère \mathcal{R}_1 . Déterminer les expressions de x_{EF} et y_{EF} en fonction de h , δ_3 , δ_4 , x_E , y_E , x_F et y_F .

On donne sur le **document réponse DR3** le code de la fonction « **Trace_x_fct_d3(a,b)** », qui prend en argument les réels a et b (angles en degré) et qui trace la distance x (en mm) entre les points E et F (Contacts des doigts avec la pièce à saisir) pour des angles δ_3 appartenant à l'intervalle $[a,b]$.

Q7 - Compléter sur le **document réponse DR3** uniquement les lignes 54 à 56.

En lançant dans le Shell de Python la commande « **Trace_x_fct_d3(0,28)** » on obtient la **figure 11**.

Q8 - Etablir, en justifiant votre réponse à partir de la **figure 11**, la relation numérique entre les vitesses ω_3 de rotation du doigt 3 et \dot{x} de fermeture de la pince :

$$\omega_3 = \frac{d \delta_3(t)}{dt} \text{ en rad.s}^{-1}$$

et :

$$\dot{x}(t) = \frac{d x(t)}{dt} \text{ en m.s}^{-1}$$

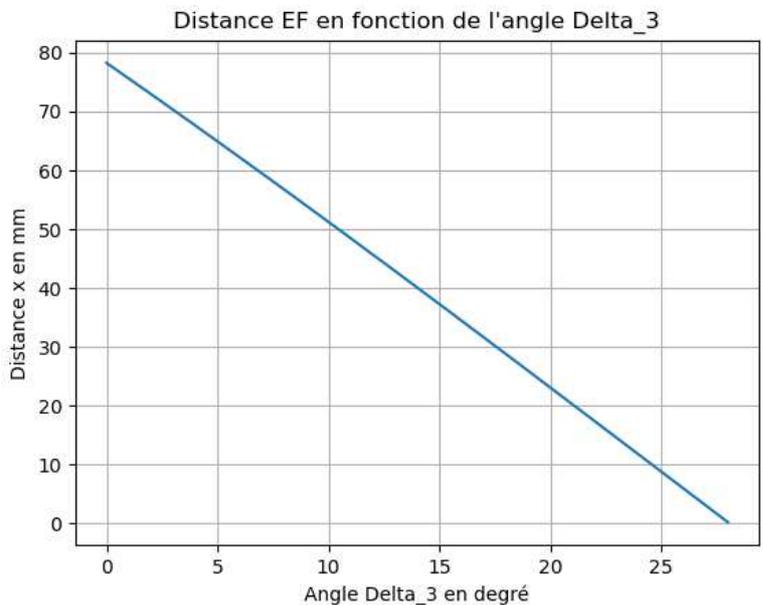


Figure 11 – Tracé de la fonction $\delta_4 = f(\delta_3)$

Détermination du rapport de transmission du coupleur

Le train d'engrenage épicycloïdal est décrit par le schéma cinématique de la **figure 12**. Il est constitué de :

- ☞ Un planétaire intérieur 16 : Roue dentée de Z_{16} dents
- ☞ Une couronne 18 : Roue à denture intérieure de Z_{18} dents. Fixe par rapport au bâti 1.
- ☞ Un satellite 17 : Roues dentées de Z_{17} dents. En liaison pivot sur le porte satellite 9.

On note λ la raison de ce train d'engrenages épicycloïdal défini par le rapport : $\lambda = \frac{\omega_{18/9}}{\omega_{16/9}}$

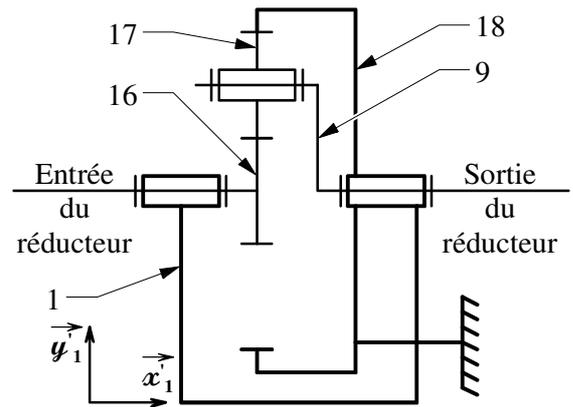


Figure 12 – Schéma cinématique du réducteur épicycloïdal

Q9 - Déterminer l'expression de cette raison λ en fonctions des nombres de dents des roues dentées de ce train d'engrenages.

Q10 - L'entrée de la boîte de vitesse se fait sur la roue dentée 16 ($\omega_e = \omega_{16/1}$) et la sortie sur le porte satellite 9 ($\omega_s = \omega_{9/1}$). En appliquant la loi de composition des vitesses, déterminer l'expression en fonction de λ du rapport de transmission ρ de la boîte de vitesse : $\rho = \frac{\omega_s}{\omega_e}$.

Q11 - Les roues 16, 17 et 18 ont respectivement : $Z_{16} = 9$ dents, $Z_{17} = 27$ dents et $Z_{18} = 63$ dents. Calculer numériquement la valeur du rapport de transmission ρ de la boîte de vitesse : $\rho = \frac{\omega_s}{\omega_e}$

Partie II- Détermination des grandeurs caractéristiques de l'ensemble motoréducteur, transmission et préhenseur

Pour cette partie et les suivantes, on admet quelque soit les résultats précédents que : $\omega_3 \approx -\omega_4$ et : $\dot{x}(t) = b \cdot \omega_3(t)$. (avec $b = C^{lc}$) On suppose également que le coupleur est actif : $\rho < 1$.

Pour cette partie uniquement on suppose que le ressort se comporte comme un solide indéformable. La chaîne de transmission est alors décrite par la **figure 13**.

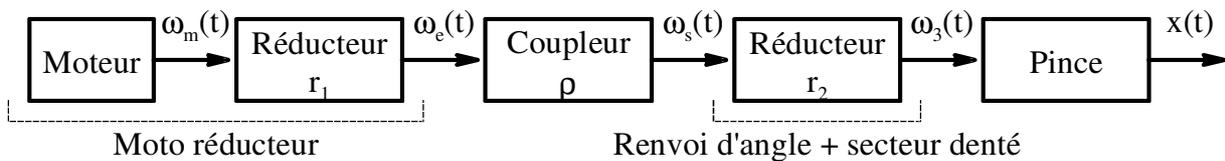


Figure 13 – Schéma de la transmission

Hypothèses et notations

On note :

- ☞ θ_m et ω_m la position et la vitesse angulaire de l'arbre moteur par rapport au bâti 1
- ☞ θ_e et ω_e la position et la vitesse angulaire de l'arbre d'entrée du coupleur par rapport au bâti 1
- ☞ θ_s et ω_s la position et la vitesse angulaire de l'arbre de sortie du coupleur par rapport au bâti 1
- ☞ δ_3 et ω_3 la position et la vitesse angulaire du doigt 3 par rapport au bâti 1.
- ☞ δ_4 et ω_4 la position et la vitesse angulaire du doigt 4 par rapport au bâti 1.

On note les rapports de transmission suivant :

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\theta_e}{\theta_m} = \frac{\omega_e}{\omega_m} = \frac{1}{10} \text{ du réducteur 1 entre le moteur et le coupleur.}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{\omega_s}{\omega_e} \text{ du coupleur entre le réducteur 1 et le pignon d'entrée du renvoi d'angle.}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{\delta_3}{\theta_s} = \frac{\omega_3}{\omega_s} = \frac{3}{10} \text{ du réducteur 2 entre le coupleur et le doigt 3.}$$

On note : $\Rightarrow J_m$ le moment d'inertie du moto-réducteur ramenée sur l'arbre moteur

$\Rightarrow J_c$ le moment d'inertie du coupleur ramené sur l'arbre d'entrée de ce coupleur

$\Rightarrow J_2$ le moment d'inertie du renvoi d'angle (réducteur 2) ramené sur son axe d'entrée

$\Rightarrow J_3$ et J_4 les moments d'inertie des doigts 3 et 4 par rapport aux axes (A, \vec{z}_1) et (D, \vec{z}_1)

Le bâti 1 est supposé immobile par rapport au repère terrestre.

Les doigts de la pince évoluant dans un plan horizontal, les actions de pesanteur sont négligées.

Le moteur exerce sur son rotor un couple moteur : $\vec{C}_m(t) = C_m(t) \cdot \vec{x}_1$

Les frottements visqueux dans le moto réducteur créent un couple de frottement sur l'arbre moteur de coefficient de frottement f_m . D'où le couple de frottement visqueux s'appliquant sur l'arbre moteur :

$$\vec{C}_{fm}(t) = -f_m \cdot \omega_m(t) \cdot \vec{x}_1$$

Les frottements visqueux dans le coupleur créent un couple de frottement sur l'arbre d'entrée de ce coupleur de coefficient de frottement f_c . D'où le couple de frottement visqueux s'appliquant sur l'arbre d'entrée du coupleur :

$$\vec{C}_{fc}(t) = -f_c \cdot \omega_e(t) \cdot \vec{x}_1$$

Les frottements dans les autres parties du mécanisme sont négligés.

Caractéristiques du moteur à courant continu

Tension d'alimentation : $u(t)$	Courant de l'induit : $i(t)$	Force contre électromotrice : $e(t)$
Vitesse de rotation : $\omega_m(t)$	Couple moteur : $c_m(t)$	Résistance de l'induit : $R = 2,9 \Omega$
Constante de couple et de force électromotrice : $K_C = 7,12 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.A}^{-1} = K_E = 7,12 \cdot 10^{-3} \text{ V.s.rad}^{-1}$		

Equation électromécaniques de fonctionnement :

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) \quad (a) \quad e(t) = K_E \cdot \omega_m(t) \quad (b) \quad c_m(t) = K_C \cdot i(t) \quad (c)$$

Equation différentielle de fonctionnement du mécanisme

On note E le système constitué de l'ensemble des pièces en mouvement.

Q12 - Montrer que l'énergie cinétique du système S dans son mouvement par rapport au bâti 1 s'écrit : $E_C(E/1) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_m^2$. Et donner l'expression de J (moment d'inertie de l'ensemble E ramené sur l'arbre moteur) en fonction des constantes du système.

Q13 - Montrer que la somme des puissances des actions de la pièce à serrer appliquée sur le système E dans son mouvement par rapport au bâti 1, s'écrit :

$$P(\text{Pièce} \rightarrow E/1) = P(\text{Pièce} \rightarrow 3/1) + P(\text{Pièce} \rightarrow 4/1) = -F(t) \cdot b \cdot \omega_3(t)$$

Q14 - Montrer que l'équation mécanique de fonctionnement du système s'écrit :

$$J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = c_m(t) - c_r(t) \quad (d)$$

Et donner les expressions de $c_r(t)$ et f en fonction de $F(t)$ et des constantes du système.

Identification des constantes mécaniques du système

Pour identifier le moment d'inertie équivalent J et le coefficient de frottement visqueux f du système ramené sur l'arbre moteur on procède à un essai à vide. Pour cela :

- ☞ On retire la pièce à serrer, on a donc $F(t) = 0$.
- ☞ Une des roues libre du coupleur est débrayée pour activer le coupleur. On a ainsi : $\rho < 1$.
- ☞ On alimente à la date $t = 0$ le moteur avec une tension constante $u(t) = 6V$.
- ☞ On relève la vitesse de rotation du moteur. On obtient alors la courbe de la figure 14

Evolution temporelle de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ en $rad.s^{-1}$, en fonction de la date t en s .

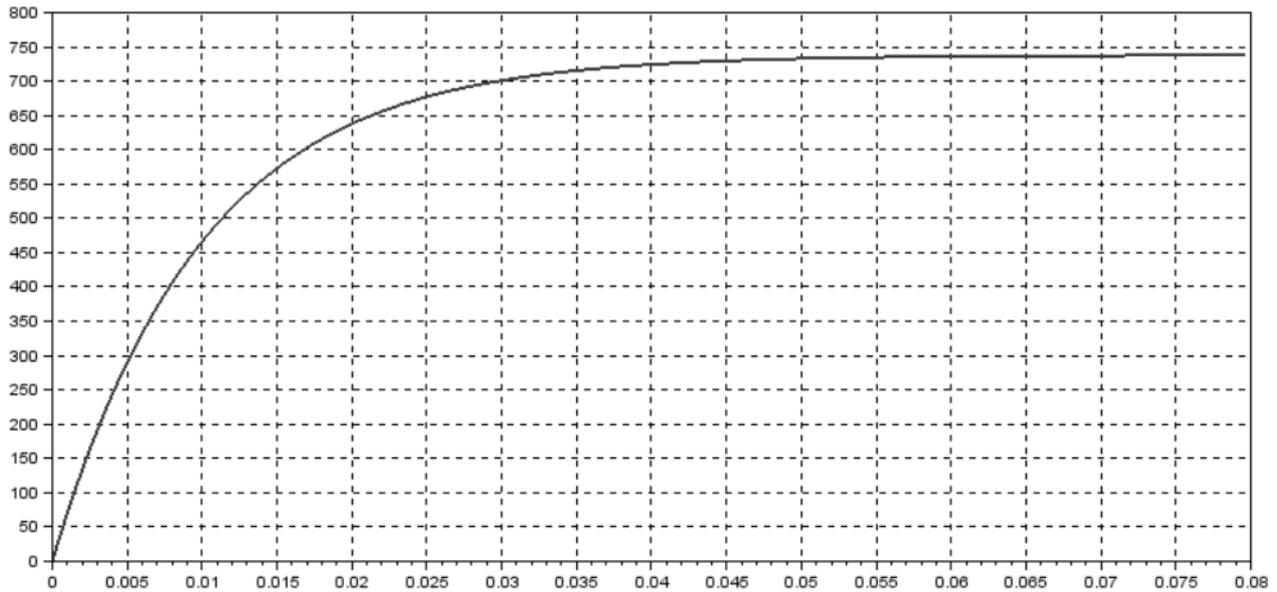


Figure 14 – Evolution temporelle de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ en $rad.s^{-1}$, en fonction de la date t en s .

Q15 - Déterminer une expression numérique de la fonction de transfert du moteur : $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$

On note $C_m(p)$, $C_r(p)$, $\Omega_m(p)$, $I(p)$ et $E(p)$ respectivement les transformées de Laplace des fonctions temporelles $c_m(t)$, $c_r(t)$, $\omega_m(t)$, $i(t)$ et $e(t)$.

Q16 - En considérant les équations électromécaniques du moteur (a), (b) et (c) et l'équation mécanique de fonctionnement du système (d) et en supposant toutes les conditions initiales nulle. Compléter sur le **document réponse DR4** le schéma bloc du moteur.

Q17 - Déterminer les valeurs numériques de J et f .

A partir des dimensions et des masses volumiques des pièces du mécanisme, on estime les valeurs des moments d'inertie J_2 , J_3 et J_4 : $J_2 \approx 4.10^{-6} \text{ kg.m}^2$ $J_3 \approx 2.10^{-4} \text{ kg.m}^2$ $J_4 \approx 1.10^{-4} \text{ kg.m}^2$

D'autre part quelque soit les résultats précédents on admet que $\rho = 0,125$.

Q18 - En reprenant les résultats des questions Q12 et Q17 et par une application numérique, justifier que les inerties du réducteur 2 et des doigts 3 et 4 sont négligeables

Partie III- Mise en place du modèle de la transmission de l'effort

Les partie I et II ont permis d'établir que :

$$J = 2.10^{-7} \text{ kg.m}^2 \quad f = 2,5.10^{-6} \text{ N.m.s.rad}^{-1} \quad \rho = 0,125 \quad \text{et} : \quad b = 0,16 \text{ m.rad}^{-1}$$

L'inertie du réducteur r_2 et des doigts 3 et 4 est négligeable : $J_3 + J_4 \approx 0$ et $J_2 \approx 0$. On a donc :
 $J = J_m + r_1^2.J_c$

Le frottement visqueux de coefficient f est du au motoréducteur et à la boîte de vitesse.

Dans cette partie et les suivantes on considère que le coupleur est actif $\rho < 1$ avec cette fois un ressort de torsion déformable de raideur K_R . La chaîne de transmission est alors décrite par la **figure 15**.

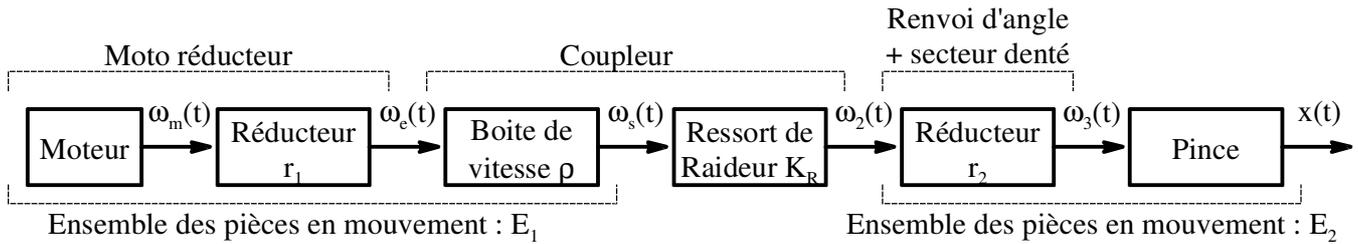


Figure 15 – Chaîne de transmission de l'ensemble motoréducteur, transmission et préhenseur.

- ☞ E_1 le système constitué de l'ensemble des pièces en mouvement située avant le ressort.
- ☞ E_2 le système constitué de l'ensemble des pièces en mouvement située après le ressort.
- ☞ θ_s et ω_s la position et la vitesse angulaire de l'arbre de sortie de la boîte de vitesse.
- ☞ θ_2 et ω_2 la position et la vitesse angulaire du pignon à l'entrée du renvoi d'angle.

Le ressort exerce donc deux couples :
 ☞ sur l'arbre de sortie de la boîte de vitesse : $-c_{res}(t) \cdot \vec{x}_1$
 ☞ sur le pignon à l'entrée du renvoi d'angle : $+c_{res}(t) \cdot \vec{x}_1$

avec :
$$c_{res}(t) = K_R \cdot (\theta_s(t) - \theta_2(t)) \quad (e)$$

On suppose enfin que la raideur de la pièce à saisir est de : $K = 10^4 \text{ N.m}^{-1}$.

Q19 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système E_1 pour en déduire une équation différentielle en $\omega_m(t)$ de fonctionnement mécanique de cet ensemble.

On note $C_m(p)$, $C_{res}(p)$, $C_r(p)$, $\Omega_m(p)$, $\Theta_m(p)$, $\Theta_s(p)$, $\Theta_2(p)$, $X(p)$ et $F(p)$ respectivement les transformées de Laplace des fonctions temporelles $c_m(t)$, $c_{res}(t)$, $c_r(t)$, $\omega_m(t)$, $\theta_m(t)$, $\theta_s(t)$, $\theta_2(t)$, $x(t)$ et $F(t)$.

Q20 - En considérant l'équation différentielle établie à la question Q19 ainsi que l'expression du couple du ressort (équation (e)) et en supposant toutes les conditions initiales nulles, compléter le schéma bloc du **document réponse DR5**.

Q21 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système E_2 pour en déduire $c_{res}(t)$ en fonction de r_2 , b et $F(t)$. Puis ensuite en vous aidant du schéma bloc du **document réponse DR5** déterminer $c_{res}(t)$ en fonction de K , r_2 , b et $\theta_2(t)$.

Q22 - En déduire que $D(p) = \frac{\Theta_2(p)}{\Theta_s(p)}$, la fonction de transfert définie sur le schéma bloc du **document réponse DR5**, est une constante D que vous exprimerez, en fonction de K , K_R , b et r_2 .

Le schéma bloc du **document réponse DR5** est équivalent au schéma bloc de la **figure 16**.

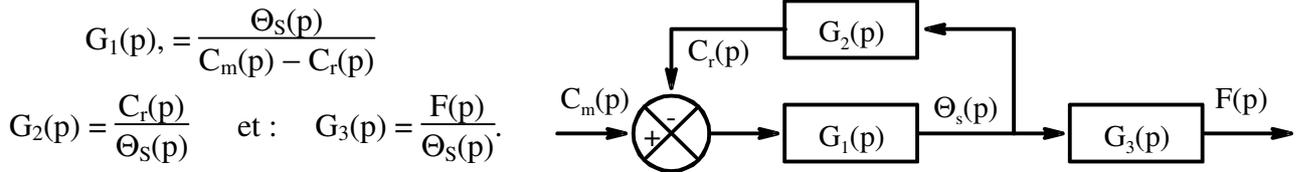


Figure 16 – Schéma bloc équivalent de la chaîne de transmission de l'effort.

Q23 - Déterminer les expressions des fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$ et $G_3(p)$, en fonction de r_1 , r_2 , ρ , b , K , K_R , J , f , D et de la variable de Laplace p .

Q24 - En déduire, en fonction de D et des constantes du système, l'expression sous sa forme canonique de la fonction de transfert de la transmission : $H_T(p) = \frac{F(p)}{C_m(p)}$.

Quelque soit les résultats précédents on admet que quelque soit la raideur K_R la fonction de transfert de la transmission est un ordre 2 : $H_T(p) = \frac{A}{1 + B.p + C.p^2} = \frac{K_T}{1 + \frac{2.\xi_T}{\omega_{0T}}.p + \frac{p^2}{\omega_{0T}^2}}$ Avec :

$$A = K_T = \frac{1}{r_1.\rho.r_2.b} \quad \omega_{0T} = r_1.\rho.r_2.b.\sqrt{\frac{K.K_R}{J.[K_R + (b.r_2)^2.K]}} \quad \text{et} : \quad \xi_T = \frac{f}{2.r_1.\rho.r_2.b}\sqrt{\frac{K_R + (b.r_2)^2.K}{J.K.K_R}}$$

Q25 - Déterminer la condition sur la valeur numérique de la raideur K_R du ressort de torsion permettant de respecter le critère de non dépassement de la valeur finale de $F(t)$ pour un échelon de couple $C_m(t) = C_0$.

Q26 - Pour la valeur maximale de K_R , en vous aidant de l'abaque de la figure 17, déterminer le temps de réponse à 5% de cette transmission.

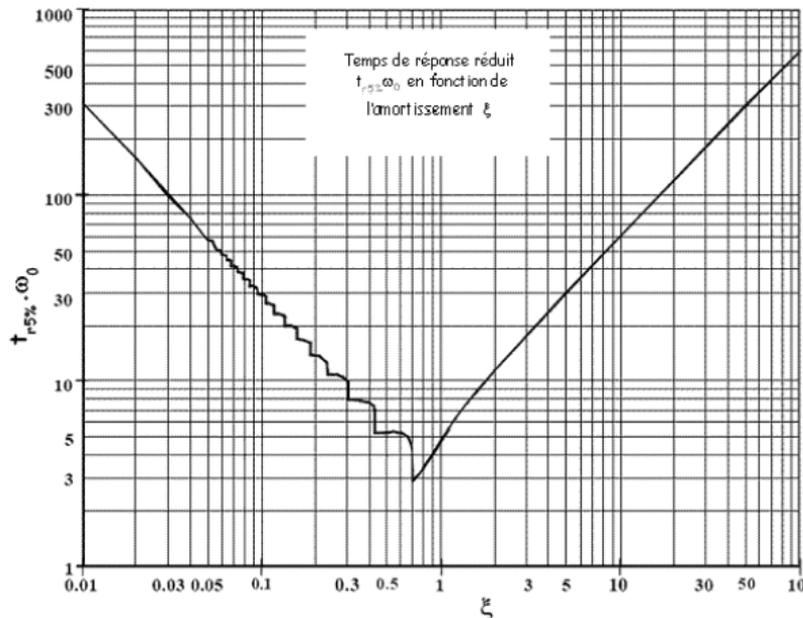


Figure 16 – Temps de réponse réduit d'un second ordre en fonction du facteur d'amortissement ξ .

Q27 - Conclure sur la capacité à répondre au cahier des charges avec un échelon de couple $C_m(t) = C_0$ à l'entrée de la transmission.

Partie IV- Commande de l'effort de serrage de la pince avec une boucle de courant

On a vu dans la partie III qu'on ne pouvant pas répondre au cahier des charges avec un échelon de couple $C_m(t) = C_0$ à l'entrée de la transmission. Pour remédier à cela le constructeur de la prothèse choisit de réaliser cet asservissement de l'effort $F(t)$ en fonction de l'intensité $i_c(t)$ en utilisant une boucle de courant. La structure de l'asservissement est alors décrite par la **figure 17**.

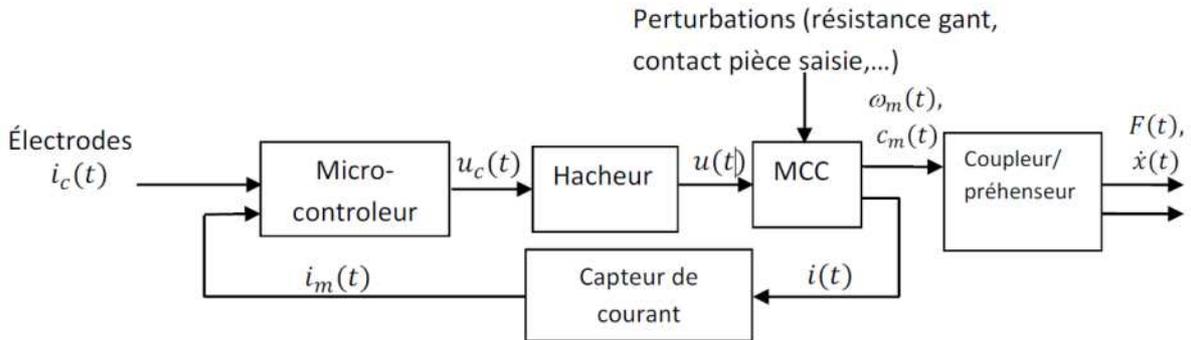


Figure 17 – Structure de l'asservissement avec une boucle de courant.

On utilise un capteur de courant qui mesure l'intensité $i(t)$ traversant l'induit du moteur. Ce capteur est un gain pur K_{Cap} . Il délivre une valeur réelle $i_m(t)$ qui est comparée à la valeur réelle $i_c(t)$ image de la consigne d'intensité issue des myoélectrodes. Cet écart $i_c(t) - i_m(t)$ est ensuite traité par un microcontrôleur qui délivre une tension de commande $u_c(t)$ à un hacheur 4 quadrants pour alimenter le moteur avec une tension $u(t)$. Ce hacheur est un gain pur : $K_H = 10$. Et le microcontrôleur est le correcteur numérique de cet asservissement. La fonction de transfert de ce correcteur est notée $C(p)$. On a alors le schéma bloc de cet asservissement conformément à la **figure 18**.

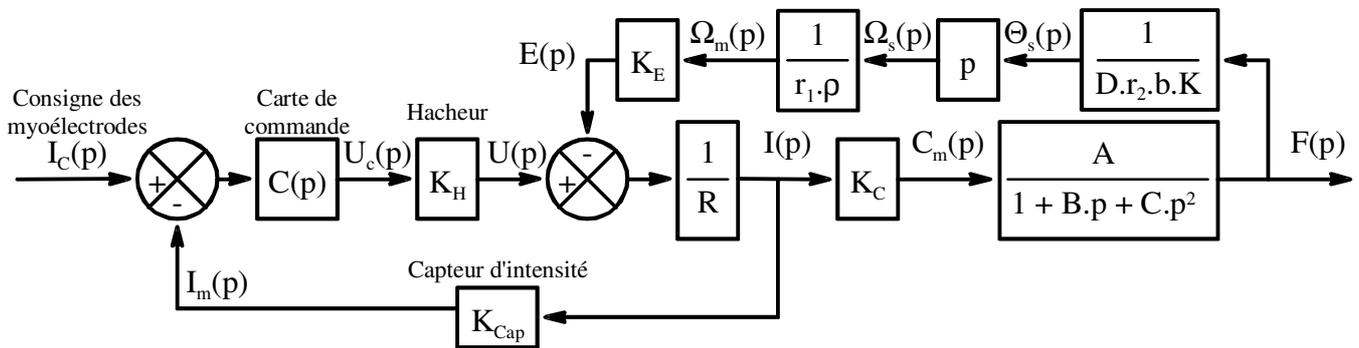


Figure 18 – Schéma bloc de l'asservissement avec une boucle de courant.

D'autre part, pour des raisons d'encombrement du ressort, on prend une valeur de raideur du ressort bien supérieure à celle calculée précédemment : $K_R = 1 \text{ N.m.rad}^{-1}$. Les applications numériques donnent alors : $D = 0,0416$ $A = 1\,667 \text{ m}^{-1}$ $B = 0,0167 \text{ s}$ $C = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2$

Ce schéma bloc peut être simplifié et ramené au schéma bloc de la **figure 19**. Avec :

$$H_1(p) = \frac{K_1 \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{1 + E \cdot p + F \cdot p^2}$$

Et :
$$H_2(p) = \frac{K_2}{1 + B \cdot p + C \cdot p^2}$$

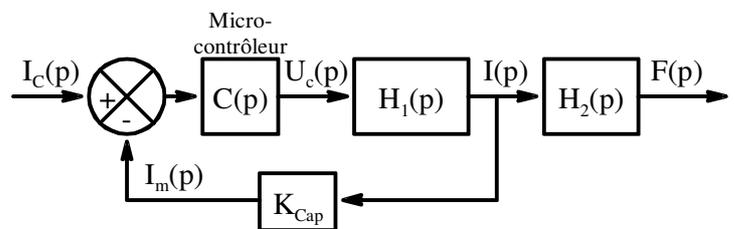


Figure 19 – Schéma bloc simplifié

Q28 - Déterminer en fonction de A, B, C, D et des constantes du système, les expressions des nouvelles constantes K_1 , K_2 , E et F.

L'application numérique nous donne : $E = 0,133 \text{ s}$ et $F = 1,34.10^{-3} \text{ s}^2$.

Q29 - Justifier que le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert $H_1(p)$ peut s'écrire : $(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)$ et donner deux relations entre T_1 , T_2 , E et F .

Par la résolution du système formé par les deux relations écrites à la question Q29 et les applications numériques de K_1 et K_2 , on en déduit que les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ peuvent s'écrire avec

les unités S.I : $H_1(p) = \frac{3,44.(1 + B.p + C.p^2)}{(1 + 0,122.p).(1 + 0,011.p)}$ et : $H_2(p) = \frac{11,9}{1 + B.p + C.p^2}$

Le constructeur choisit d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{K_{\text{Cor}}.(1 + 0,122.p)}{p}$$

Q30 - Justifier le choix de ce correcteur par le constructeur : Justifier et le choix du type de correcteur et le choix la valeur de la constante de temps.

Le gain du capteur d'intensité est unitaire : $K_{\text{Cap}} = 1 \text{ A}^{-1}$.

Q31 - Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement :

$H_{\text{BF}}(p) = \frac{F(p)}{I_C(p)}$. Cette expression sera donnée sous sa forme canonique uniquement en fonction de K_{Cor} et de la variable de Laplace p . Pour le reste on utilisera les valeurs numériques de B et C .

Q32 - Déterminer la valeur maximale de K_{Cor} permettant de respecter le critère de non dépassement de la valeur finale du cahier des charges.

Q33 - En vous aidant de l'abaque de la **figure 16** page 10, déterminer pour cette valeur maximale de K_{Cor} le temps de réponse à 5% du système.

On réalise une simulation du système pour un échelon de consigne : $i_C(t) = 0,84$. On utilise pour cela plusieurs correcteurs PI avec la même constante de temps 0,12 s et avec différentes valeurs de gain statique : $K_{\text{Cor}} = 1 ; 1,8 ; 3,4$ et $6,5 \text{ V.s}^{-1}$. Les réponses temporelles de l'effort de serrage $F(t)$ sont données sur le **document réponse DR6**.

Q34 - Proposer sur le document réponse DR6 une plage de variation du gain statique du correcteur K_{Cor} permettant un respect du cahier des charges. Tracer également les constructions nécessaires sur le **document réponse DR6**.

Fin de l'énoncé

Documents Réponses**Nom :****Prénom :****Q3 - Document réponse DR1**

```
13 def f(d3:float,d4:float) -> float :
14
15
```

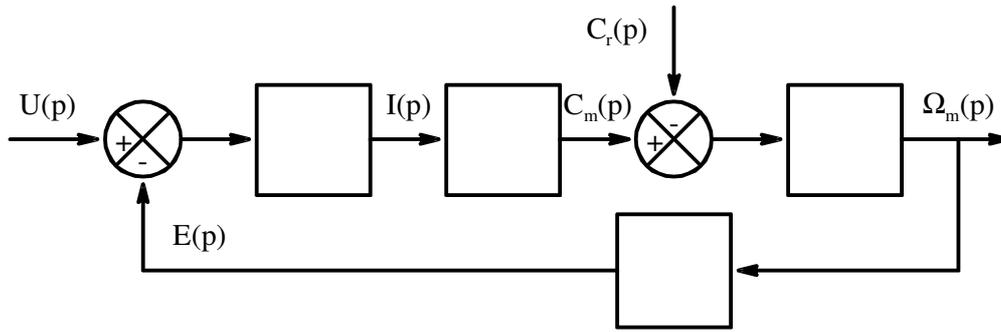
Q4 - Document réponse DR2

```
17 def Dichotomie(d3:float) -> float:
18     g,d=
19     while
20         m=
21         yg=
22         ym=
23         if
24
25         else:
26
27     return (g+d)/2
```

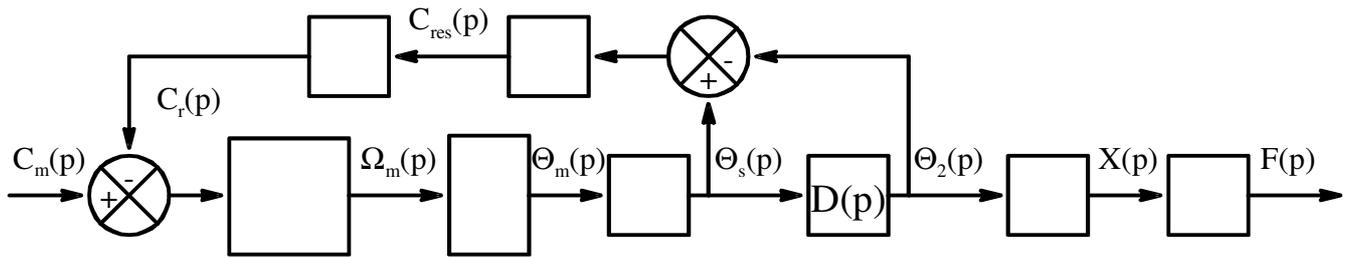
Q7 - Document réponse DR3

```
49 def Trace_x_fct_d3(a:float,b:float): # Fonction pour le tracé
50     # de x =f(Delta_3)
51     D3,D4=Resol_inter(a,b) # Tableaux des valeurs de Delta_3 et Delta_4
52     D4=D4*np.pi/180 # Passage de Delat_4 en radian
53     D3=D3*np.pi/180 # Passage de Delat_3 en radian
54     XEF=
55     YEF=
56     X=
57     D4=D4*180/np.pi # Passage de Delat_4 en degré
58     D3=D3*180/np.pi # Passage de Delat_3 en degré
59     plt.plot(D3,X)
60     plt.xlabel('Angle Delta_3 en degré')
61     plt.ylabel('Distance x en mm')
62     plt.title("Distance EF en fonction de l'angle Delta_3")
63     plt.grid()
64     plt.show()
```

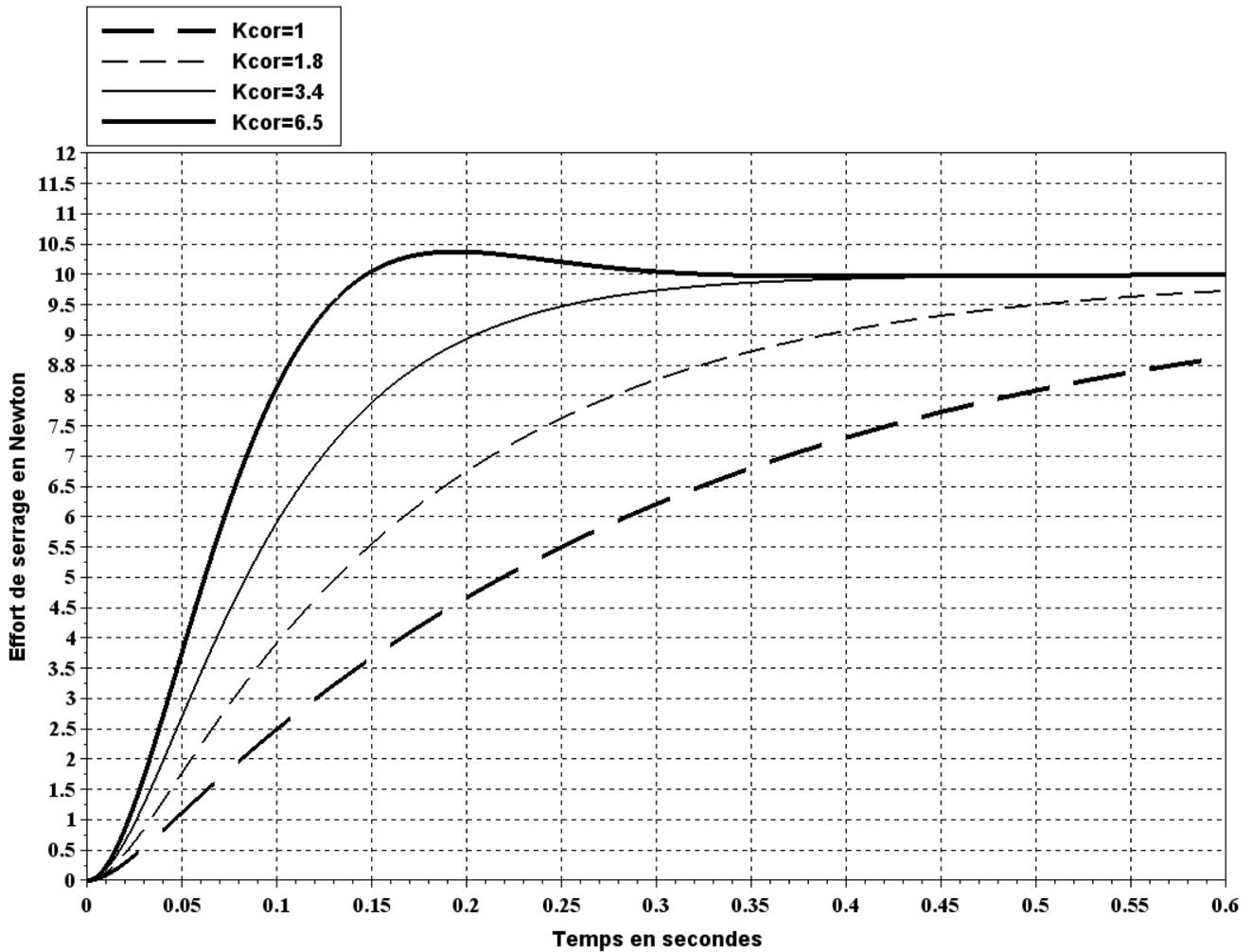
Q16 - Document réponse DR4



Q20 - Document réponse DR5



Q34 - Document réponse DR6



Plage de variation du gain statique du correcteur K_{Cor} :