

**PSI 2024-2025**                      **DS N°2 – Sujet B**                      **Corrigé**  
**Prothèse myoélectrique (Inspiré de CCINP – PSI – 2012)**

**Parti I : Etude de la cinématique de la transmission et du préhenseur**

**Détermination du gain du mécanisme préhenseur**

**Q1- Fermeture géométrique**

La fermeture géométrique du cycle 1-3-5-4-1 s'écrit :  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

Soit :  $-d \cdot \vec{x}_3 - h \cdot \vec{y}_5 - d \cdot \vec{x}_4 + h \cdot \vec{y}_1 = \vec{0} \iff h \cdot \vec{y}_5 = h \cdot \vec{y}_1 - d \cdot \vec{x}_3 - d \cdot \vec{x}_4$

Soit en projection dans le repère  $\mathcal{R}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  :

$$\begin{cases} -h \cdot \sin \delta_5 = -d \cdot \cos \delta_3 - d \cdot \cos \delta_4 \\ h \cdot \cos \delta_5 = h - d \cdot \sin \delta_3 - d \cdot \sin \delta_4 \end{cases}$$

**Q2- Relation entre  $\delta_3$  et  $\delta_4$**

En faisant la somme des deux équations précédentes élevées au carré on obtient :

$$h^2 = h^2 + 2 \cdot d^2 + 2 \cdot d^2 \cdot \cos \delta_3 \cdot \cos \delta_4 - 2d \cdot h \cdot \sin \delta_3 - 2 \cdot d \cdot h \cdot \sin \delta_4 + 2 \cdot d^2 \cdot \sin \delta_3 \cdot \sin \delta_4$$

$$0 = 2 \cdot d^2 + 2 \cdot d^2 \cdot (\cos \delta_3 \cdot \cos \delta_4 + \sin \delta_3 \cdot \sin \delta_4) - 2 \cdot d \cdot h \cdot (\sin \delta_3 + \sin \delta_4)$$

Soit finalement après simplification :  **$d \cdot [1 + \cos(\delta_3 - \delta_4)] - h \cdot (\sin \delta_3 + \sin \delta_4) = 0$**

**Q3- Fonction  $f(\delta_3, \delta_4)$**

La fonction python s'écrit donc :

```
def f(d3,d4) :
    return d*(1+np.cos(d3-d4))-h*(np.sin(d3)+np.sin(d4))
```

**Q4- Fonction recherche du zéro par dichotomie**

```
def Dichotomie(d3):
    g,d = -np.pi/2,np.pi/2 # Bornes gauche et droite de l'intervalle de départ
    while d-g>1e-6: # Tant que l'intervalle [g,d] a une largeur supérieure à 10^-6
        m = (g+d)/2 # Calcul du milieu de l'intervalle
        yg = f(d3,g) # Calcul de la valeur de f(d3,d4) à la gauche de l'intervalle
        ym = f(d3,m) # Calcul de la valeur de f(d3,d4) au milieu de l'intervalle
        if yg*ym>0: # Si yg et ym sont de même signe (Solution à droite du milieu)
            g=m # Alors on place la borne gauche au milieu
        else: # Sinon (Solution à gauche du milieu)
            d=m # Alors on place la borne droite au milieu
    return (g+d)/2 # On retourne le milieu de l'intervalle inférieur à 10^-6
```

**Q5- Relation entre  $\omega_3$  et  $\omega_4$**

La tracé obtenu montre que  $\delta_4$  est quasiment une fonction affine de  $\delta_3$  :  $\delta_4 = c \cdot \delta_3 + \delta_0$

La droite représentant cette fonction affine passe par les points de coordonnées (0 , 32) et (27 , 5).

On a donc :  $\delta_0 = 32$  et :  $c = \frac{5 - 32}{27 - 0} = -1 \implies \delta_4 \approx -\delta_3 + 32$     Or :  $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\frac{d \delta_4(t)}{dt}}{\frac{d \delta_3(t)}{dt}} = \frac{d \delta_4}{d \delta_3}$

Sachant que :  $\delta_4 \approx -\delta_3 + 32$     on obtient :  $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{d \delta_3}{d \delta_4} = -1$     **On a donc bien :  $\omega_4 \approx -\omega_3$**

**Q6- Coordonnée du vecteur  $\vec{EF}$**

On a :  $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF} = -x_E \cdot \vec{x}_3 - y_E \cdot \vec{y}_3 - h \cdot \vec{y}_1 + x_F \cdot \vec{x}_4 + y_F \cdot \vec{y}_4$

En projetant cette équation dans le repère  $\mathcal{R}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  on obtient :

$\vec{EF} = x_{EF} \cdot \vec{x}_1 + y_{EF} \cdot \vec{y}_1$  Avec:  $\begin{cases} x_{EF} = -x_E \cdot \cos \delta_3 + y_E \cdot \sin \delta_3 + x_F \cdot \cos \delta_4 - y_F \cdot \sin \delta_4 \\ y_{EF} = -h - x_E \cdot \sin \delta_3 - y_E \cdot \cos \delta_3 + x_F \cdot \sin \delta_4 + y_F \cdot \cos \delta_4 \end{cases}$

**Q7- Calcul de la distance  $EF = -x$**

Les variables D3 et D4 étant des tableaux Numpy on peut avoir directement les tableaux Numpy XEF, YEF. D'autre part la distance  $EF = -x$  est définie par  $x = \sqrt{x_{EF}^2 + y_{EF}^2}$  on obtient donc le tableau X par la fonction racine carrée de Numpy : « sqrt ». D'où les trois lignes 54 à 56 du code python.

```
XEF = -xe*np.cos(D3)+ye*np.sin(D3)+xf*np.cos(D4)-yf*np.sin(D4)
YEF = -h-xe*np.sin(D3)-ye*np.cos(D3)+xf*np.sin(D4)+yf*np.cos(D4)
X = np.sqrt(XEF**2+YEF**2)
```

**Q8- Relation entre  $\omega_3$  et  $x$**

La tracé obtenu montre que  $x$  est quasiment une fonction affine de  $\delta_3$  :  $EF = -x = -b \cdot \delta_3 - x_0$

La droite représentant cette fonction affine passe par les points de coordonnées (0 , 78) et (28 , 0).

On a donc :  $x_0 = -78$  et :  $-b = \frac{0 - 78}{28 - 0} = -2,78 \text{ mm.deg}^{-1} \Rightarrow x \approx 2,78 \cdot \delta_3 - 78$

Or :  $2,78 \text{ mm.deg}^{-1} = 2,78 \cdot \frac{10^{-3}}{\pi/180} \text{ m.rad}^{-1} = 0,16 \text{ m.rad}^{-1}$  Et :  $\frac{\dot{x}}{\omega_3} = \frac{\frac{d x(t)}{dt}}{\frac{d \delta_3(t)}{dt}} = \frac{d x}{d \delta_3}$

On obtient donc :  $\frac{\dot{x}}{\omega_3} = \frac{d x}{d \delta_3} = 0,16 \text{ m.rad}^{-1}$  On a donc :  $\dot{x}(t) \approx b \cdot \omega_3(t)$  Avec :  $b = 0,16 \text{ m.rad}^{-1}$

**Détermination du rapport de transmission du coupleur**

**Q9- Raison du train d'engrenage épicycloïdal**

L'engrenage 16-17 étant extérieur et l'engrenage 17-18 étant intérieur, on a :

$\lambda = \frac{\omega_{18/9}}{\omega_{16/9}} = \frac{\omega_{18/9}}{\omega_{17/9}} \cdot \frac{\omega_{17/9}}{\omega_{16/9}} = \frac{Z_{17}}{Z_{18}} \cdot \left( -\frac{Z_{16}}{Z_{17}} \right)$  Soit:  $\lambda = \frac{\omega_{18/9}}{\omega_{16/9}} = -\frac{Z_{16}}{Z_{18}}$

**Q10- Rapport de transmission du train d'engrenage épicycloïdal**

Par composition des vitesses on a :  $\lambda = \frac{\omega_{18/9}}{\omega_{16/9}} = \frac{\omega_{18/1} + \omega_{1/9}}{\omega_{16/1} + \omega_{1/9}}$  Soit :  $\lambda = \frac{\omega_{18/1} - \omega_{9/1}}{\omega_{16/1} - \omega_{9/1}}$

L'entrée est sur la roue dentée 16 ( $\omega_e = \omega_{16/1}$ ), la sortie sur 9 ( $\omega_s = \omega_{9/1}$ ) et 18 est fixe ( $\omega_{18/1} = 0$ ). La

relation précédente devient donc :  $\lambda = \frac{0 - \omega_s}{\omega_e - \omega_s} \Leftrightarrow \lambda \cdot \omega_e - \lambda \cdot \omega_s = -\omega_s \Leftrightarrow \lambda \cdot \omega_e = (\lambda - 1) \cdot \omega_s$

Donc finalement on obtient :  $\rho = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$

**Q11- Application numérique :**

$\lambda = -\frac{Z_{16}}{Z_{18}}$  et :  $\rho = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$  Donc :  $\rho = \frac{-\frac{Z_{16}}{Z_{18}}}{-\frac{Z_{16}}{Z_{18}} - 1} = \frac{Z_{16}}{Z_{16} + Z_{18}} = \frac{9}{9 + 63}$  Soit :  $\rho = 0,125$

**Partie II- Détermination des grandeurs caractéristiques de l'ensemble motoréducteur, transmission et préhenseur**

**Equation différentielle de fonctionnement du mécanisme**

**Q12- Equation générale du fonctionnement**

Seules les inerties du motoréducteur, du coupleur, du renvoie d'angle 2 et des doigts 3 et 4 ne sont pas négligées. On en déduit l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement :

$$E_C(E/1) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_C \cdot \omega_e^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_s^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_4 \cdot \omega_4^2$$

Or :  $\omega_e = r_1 \cdot \omega_m \quad \omega_s = \rho \cdot \omega_e = r_1 \cdot \rho \cdot \omega_e \quad \omega_3 = \omega_4 = r_2 \cdot \omega_s = \rho \cdot r_2 \cdot \omega_e = r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot \omega_m$

On en déduit :  $E_C(E/1) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_C \cdot r_1^2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot (r_1 \cdot \rho)^2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot (J_3 + J_4) \cdot (r_1 \cdot \rho \cdot r_2)^2 \cdot \omega_m^2$

Soit :  $E_C(E/1) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_m^2$  Avec :  $J = J_m + r_1^2 \cdot J_C + (r_1 \cdot \rho)^2 \cdot J_2 + (r_1 \cdot \rho \cdot r_2)^2 \cdot (J_3 + J_4)$

**Q13- Puissance des actions de la pièce sur les doigts**

Les actions de la pièce sur les doigts 3 et 4 sont des forces  $F_{Pièce \rightarrow 3}$  et  $F_{Pièce \rightarrow 4}$  appliquée respectivement en E et F. On en déduit que la somme des puissances des actions de la pièce à serrer appliquée sur le système E dans son mouvement par rapport au bâti 1, s'écrit :

$$P(Pièce \rightarrow E/1) = P(Pièce \rightarrow 3/1) + P(Pièce \rightarrow 4/1) = F_{Pièce \rightarrow 3} \cdot \vec{V}_{E \in 3/1} + F_{Pièce \rightarrow 4} \cdot \vec{V}_{F \in 4/1}$$

Or :  $F_{Pièce \rightarrow 4} = - F_{Pièce \rightarrow 3} = F(t) \cdot \vec{u} \Rightarrow P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \vec{u} \cdot \vec{V}_{E \in 3/1} + F(t) \cdot \vec{u} \cdot \vec{V}_{F \in 4/1}$   
 $P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \vec{u} \cdot (\vec{V}_{E \in 3/1} - \vec{V}_{F \in 4/1})$

Soit par composition des vitesses :  $P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \vec{u} \cdot (\vec{V}_{E \in 3/4} + \vec{V}_{E \in 4/1} - \vec{V}_{F \in 4/1})$

Or :  $\vec{V}_{F \in 4/1} = \vec{V}_{E \in 4/1} + \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{4/1} \Rightarrow P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \vec{u} \cdot (\vec{V}_{E \in 3/4} - \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{4/1})$

D'autre part :  $\vec{V}_{E \in 3/4} \cdot \vec{u} = \dot{x}(t) \Rightarrow P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \dot{x}(t) + F(t) \cdot \vec{u} \cdot \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{4/1}$

Sachant que  $\vec{u} \cdot \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{4/1} = \vec{\Omega}_{4/1} \cdot \vec{u} \wedge \vec{FE}$  et que  $\vec{u} // \vec{FE}$  on a  $\vec{u} \cdot \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{4/1} = 0$

On en déduit :  $P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot \dot{x}(t)$  Enfin sachant que :  $\dot{x}(t) = b \cdot \omega_3(t)$

On obtient donc :  $P(Pièce \rightarrow E/1) = - F(t) \cdot b \cdot \omega_3(t)$

**Q14- Equation différentielle de fonctionnement du mécanisme**

Les actions extérieures s'appliquant sur l'ensemble E sont le couple moteur et les actions de la pièce sur les doigts 3 et 4 ainsi que les liaisons parfaites avec le bâti. D'où la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur E dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

$$\Sigma P(Ext \rightarrow E/s1) = P(C_{fm}(t) \rightarrow rotor/1) + P(Pièce \rightarrow E/1) = C_m \cdot \omega_m - F(t) \cdot b \cdot \omega_3(t)$$

Tous les frottements sont négligés sauf ceux du moto réducteur (Couple  $C_{fm}(t)$  appliqué sur l'arbre moteur) et du coupleur (Couple  $C_{fe}(t)$  appliquée sur l'arbre d'entrée du coupleur). D'où la somme des puissances des actions intérieures s'appliquant sur E dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

$$\Sigma P(Int \rightarrow E/1) = P(C_{fm}(t) \rightarrow rotor/1) + P(C_{fe}(t) \rightarrow Entrée coupleur/1) = - f_m \cdot \omega_m \cdot \omega_m - f_e \cdot \omega_e \cdot \omega_e$$

Or :  $\omega_e = r_1 \cdot \omega_m$  On en déduit :  $\Sigma P(Int \rightarrow E/s1) = - (f_m + r_1^2 \cdot f_e) \cdot \omega_m^2$

L'application du TEC à cet ensemble E :  $\frac{d E_C(E/1)}{dt} = \Sigma P(Ext \rightarrow E/1) + \Sigma P(Int \rightarrow E/1)$

Donne donc :  $J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} \cdot \omega_m = C_m \cdot \omega_m - F(t) \cdot b \cdot \omega_3 - (f_m + r_1^2 \cdot f_e) \cdot \omega_m^2$  or :  $\omega_3 = r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot \omega_m$

On a donc :  $J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = c_m(t) - c_r(t)$  Avec :  $f = f_m + r_1^2 \cdot f_e$   
 $c_r(t) = r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot F(t)$

**Identification des constantes mécaniques du système**

**Q15- Fonction de transfert du moteur**

La réponse du moteur à un échelon de tension de 6V est une courbe dont la valeur finale est de : 740 rad.s<sup>-1</sup> sans dépassement de cette valeur finale et avec une tangente à l'origine non horizontale.

Cette fonction de transfert est donc un premier ordre :  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$

Avec :  $K_m = \frac{740}{6} = 123 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$

D'autre part la valeur  $0,63 \times 740 = 466,2 \text{ rad.s}^{-1}$  est obtenue à la date  $t = 0,01 \text{ s}$ . Donc  $\tau_m = 0,01 \text{ s}$

D'où l'expression de cette fonction de transfert du moteur :  $H_m(p) = \frac{123}{1 + 0,01 \cdot p} \text{ (en rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}\text{)}$

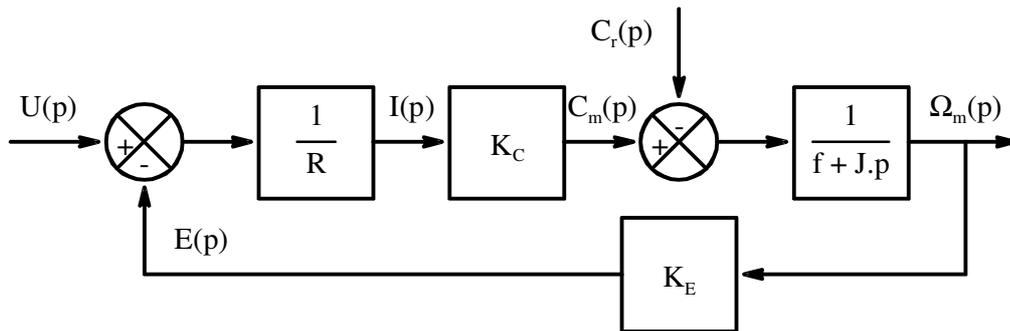
**Q16- Schéma bloc du moteur**

Les équations (a), (b), (c) et (d) passées dans le domaine de Laplace donnent :

$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(p) = \frac{1}{R} \cdot (U(p) - E(p)) \quad c_m(t) = K_C \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} C_m(p) = K_C \cdot I(p)$

$e(t) = K_E \cdot \omega_m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = K_E \cdot \Omega_m(p) \quad J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = c_m(t) - c_r(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega_m(p) = \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot (C_m(p) - C_r(p))$

D'où le schéma bloc de ce moteur à courant continu :



**Q17- Valeurs numériques de J et f**

De ce schéma bloc, on en déduit la fonction de transfert du moteur pour  $C_r(p) = 0$  :

$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_C}{R \cdot (f + J \cdot p)}}{1 + \frac{K_C \cdot K_E}{R \cdot (f + J \cdot p)}} = \frac{K_C}{K_C \cdot K_E + R \cdot f + R \cdot J \cdot p}$  Soit :  $H_m(p) = \frac{K_C}{K_C \cdot K_E + R \cdot f + R \cdot J \cdot p}$

Donc :  $K_m = \frac{K_C}{K_C \cdot K_E + R \cdot f} \Rightarrow f = \frac{K_C}{R \cdot K_m} \cdot (1 - K_m \cdot K_E) = \frac{7,12 \cdot 10^{-3}}{2,9 \times 123} \cdot (1 - 123 \times 7,12 \cdot 10^{-3}) = 2,5 \cdot 10^{-6}$

Et :  $\tau_m = \frac{R \cdot J}{K_C \cdot K_E + R \cdot f} \Rightarrow J = \frac{\tau_m}{R} \cdot (K_C \cdot K_E + R \cdot f) = \frac{0,01}{2,9} \cdot ((7,12 \cdot 10^{-3})^2 + 2,9 \times 2,5 \cdot 10^{-6}) = 2,0 \cdot 10^{-7}$

On a donc :  $f = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ N.m.s.rad}^{-1}$  et :  $J = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

**Q18- Inertie de l'ensemble 2, 3 et 4**

On note  $J_{234}$  l'inertie équivalente de 2,3 et 4 ramenée sur l'arbre moteur. On a de la question Q12 :

$J_{234} = (r_1 \cdot \rho)^2 \cdot J_2 + (r_1 \cdot \rho \cdot r_2)^2 \cdot (J_3 + J_4)$

$J_{234} = (0,1 \times 0,125)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} + (0,1 \times 0,125 \times 0,3)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4}) = 5 \cdot 10^{-9} \text{ kg.m}^2$

Or de la question Q17 on a  $J = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$  On peut donc considérer :  $J_{234} \ll J$

**Les inerties du réducteur 2 et des doigts 3 et 4 sont donc négligeables.** Soit :  $J \approx J_m + r_1^2 \cdot J_C$

**Partie III- Mise en place du modèle de la transmission de l'effort**

**Q19- TEC aux organes moteurs**

Energie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement :  $E_C(E_1/1) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_C \cdot \omega_e^2$

Or :  $\omega_e = r_1 \cdot \omega_m$  On en déduit :  $E_C(E_1/1) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_C \cdot r_1^2 \cdot \omega_m^2$  Soit :  $E_C(E_1/1) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_m^2$

Les actions extérieures s'appliquant sur l'ensemble  $E_1$  sont le couple moteur et le couple du ressort, ainsi que les liaisons parfaites avec le bâti. D'où la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur  $E_1$  dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow E_1/1) = P(\overrightarrow{C_m}(t) \rightarrow \text{rotor}/1) + P(\text{Ressort} \rightarrow \text{Sortie coupleur } E_1/1) = C_m \cdot \omega_m - C_{res} \cdot \omega_s$$

Or :  $\omega_s = r_1 \cdot \rho \cdot \omega_m$  On en déduit :  $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow E_1/1) = (C_m - r_1 \cdot \rho \cdot C_{res}) \cdot \omega_m$

Tous les frottements sont négligés sauf ceux du moto réducteur (Couple  $\overrightarrow{C_{fm}}(t)$  appliqué sur l'arbre moteur) et du coupleur (Couple  $\overrightarrow{C_{fe}}(t)$  appliquée sur l'arbre d'entrée du coupleur). D'où la somme des puissances des actions intérieures s'appliquant sur  $E$  dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

$$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow E_1/1) = P(\overrightarrow{C_{fm}}(t) \rightarrow \text{rotor}/1) + P(\overrightarrow{C_{fe}}(t) \rightarrow \text{Entrée coupleur}/1) = -f_m \cdot \omega_m \cdot \omega_m - f_e \cdot \omega_e \cdot \omega_e$$

Or :  $\omega_e = r_1 \cdot \omega_m$  On en déduit :  $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow E_1/s1) = -(f_m + r_1^2 \cdot f_e) \cdot \omega_m^2 = -f \cdot \omega_m^2$

De l'application du TEC à cet ensemble  $E_1$  :  $\frac{d E_C(E_1/1)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow E_1/1) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow E_1/1)$  on a :

$$J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} \cdot \omega_m = (C_m - r_1 \cdot \rho \cdot C_{res}) \cdot \omega_m - f \cdot \omega_m^2 \quad \text{Soit : } \boxed{J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = c_m(t) - r_1 \cdot \rho \cdot c_{res}(t)}$$

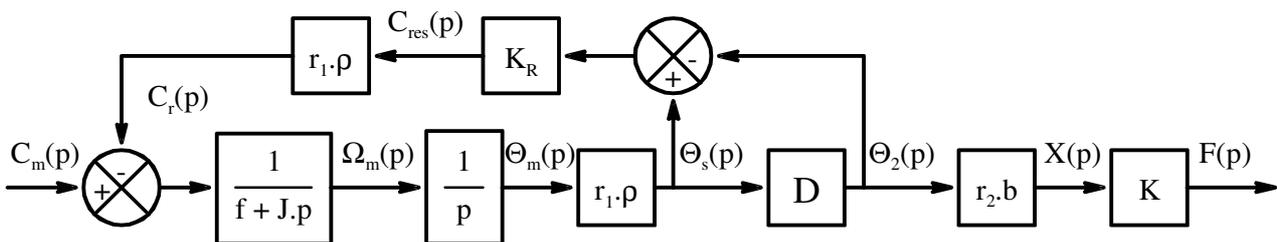
**Q20- Schéma bloc de la transmission**

$$J \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} + f \cdot \omega_m(t) = c_m(t) - r_1 \cdot \rho \cdot c_{res}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega_m(p) = \frac{1}{f + J \cdot p} \cdot (C_m(p) - C_r(p))$$

$$D'autre part : c_{res}(t) = K_R \cdot (\theta_s(t) - \theta_2(t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} C_{res}(p) = K_R \cdot (\Theta_s(p) - \Theta_2(p))$$

$$\text{Et : } \omega_m(t) = \frac{d \theta_m(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Theta_m(p) = \frac{1}{p} \cdot \Omega_m(p) \quad \text{enfin : } \left\{ \begin{array}{l} \theta_s(t) = r_1 \cdot \rho \cdot \theta_m(t) \\ \alpha(t) = r_2 \cdot b \cdot \theta_2(t) \\ F(t) = K \cdot \alpha(t) \end{array} \right. \xrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \begin{array}{l} \Theta_s(p) = r_1 \cdot \rho \cdot \Theta_m(p) \\ X(p) = r_2 \cdot b \cdot \Theta_2(p) \\ F(p) = K \cdot X(p) \end{array} \right.$$

On en déduit le schéma bloc de la transmission :



**Q21- TEC aux organes récepteurs**

Comme on néglige l'inertie des doigts 3 et 4 ainsi que celle des autres pièces des organes récepteurs, l'énergie cinétique des organes récepteurs est négligeable :  $E_C(E_2/1) \approx 0$

Les actions extérieures s'appliquant sur l'ensemble  $E_2$  sont le couple du ressort, les actions de la pièce sur les doigts, ainsi que les liaisons parfaites avec le bâti. D'où la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur  $E_2$  dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow E_2/1) = P(\text{Ressort} \rightarrow \text{Pignon de renvoi}/1) + P(\text{Pièce} \rightarrow \text{doigts}/1) = c_{res}(t) \cdot \omega_2 - F(t) \cdot b \cdot \omega_3$$

Les organes récepteurs sont des pièces en liaisons parfaites Donc :  $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow E_2/1) = 0$

De l'application du TEC à cet ensemble  $E_2$  :  $\frac{d E_C(E_2/1)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow E_2/1) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow E_2/1)$  on a :

$$0 = c_{\text{res}}(t) \cdot \omega_2 - F(t) \cdot b \cdot \omega_3 \quad \text{or :} \quad \omega_3 = r_2 \cdot b \cdot \omega_2 \quad \text{On en déduit :} \quad c_{\text{res}}(t) = r_2 \cdot b \cdot F(t)$$

D'autre part du schéma bloc ci-dessus on a :  $F(t) = K \cdot r_2 \cdot b \cdot \theta_2(t)$  Donc :  $c_{\text{res}}(t) = K \cdot (r_2 \cdot b)^2 \cdot \theta_2(t)$

**Q22- Expression de la fonction de transfert D(p)**

De l'équation précédente :  $c_{\text{res}}(t) = K \cdot (r_2 \cdot b)^2 \cdot \theta_2(t)$  et sachant que :  $c_{\text{res}}(t) = K_R \cdot (\theta_s(t) - \theta_2(t))$

On en déduit :  $K \cdot (r_2 \cdot b)^2 \cdot \theta_2(t) = K_R \cdot (\theta_s(t) - \theta_2(t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} K \cdot (r_2 \cdot b)^2 \cdot \Theta_2(p) = K_R \cdot (\Theta_s(p) - \Theta_2(p))$

Donc la fonction de transfert  $D(p) = \frac{\Theta_2(p)}{\Theta_s(p)}$  est la constante :  $D = \frac{K_R}{K_R + (r_2 \cdot b)^2 \cdot K}$

**Q23- Simplification du schéma bloc**

Du schéma bloc précédent on a :  $G_1(p) = \frac{\Theta_s(p)}{C_m(p) - C_r(p)} = \frac{r_1 \cdot \rho}{p \cdot (f + J \cdot p)}$

$$G_3(p) = \frac{F(p)}{\Theta_s(p)} = D \cdot r_2 \cdot b \cdot K$$

$C_r(p) = r_1 \cdot \rho \cdot K_R \cdot (\Theta_s(p) - \Theta_2(p))$  et :  $\Theta_2(p) = D \cdot \Theta_s(p)$

Donc :  $G_2(p) = \frac{C_r(p)}{\Theta_s(p)} = r_1 \cdot \rho \cdot K_R \cdot (1 - D)$

**Q24- Fonction de transfert de la transmission**

Du schéma bloc simplifié on en déduit :  $H_T(p) = \frac{F(p)}{C_m(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot G_3(p)$

Soit :  $H_T(p) = \frac{\frac{r_1 \cdot \rho}{p \cdot (f + J \cdot p)} \cdot D \cdot r_2 \cdot b \cdot K}{1 + \frac{r_1 \cdot \rho}{p \cdot (f + J \cdot p)} \cdot r_1 \cdot \rho \cdot K_R \cdot (1 - D)} = \frac{r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot K \cdot D}{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D) + p \cdot f + J \cdot p^2}$

Ou encore sous sa forme canonique :  $H_T(p) = \frac{\frac{r_2 \cdot b \cdot K \cdot D}{r_1 \cdot \rho \cdot K_R \cdot (1 - D)}}{1 + \frac{f}{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D)} \cdot p + \frac{J}{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D)} \cdot p^2}$

Remarque :

Fonction de transfert du second ordre de : Gain statique :  $K_T = \frac{r_2 \cdot b \cdot K \cdot D}{r_1 \cdot \rho \cdot K_R \cdot (1 - D)}$

Pulsation propre :  $\omega_{0T} = \sqrt{\frac{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D)}{J}}$

Facteur d'amortissement :  $\xi_T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D)}{J}} \cdot \frac{f}{(r_1 \cdot \rho)^2 \cdot K_R \cdot (1 - D)}$

Soit :  $\xi_T = \frac{f}{2 \cdot r_1 \cdot \rho \cdot \sqrt{J \cdot K_R \cdot (1 - D)}}$

Sachant que :  $D = \frac{K_R}{K_R + (r_2 \cdot b)^2 \cdot K} \Rightarrow 1 - D = \frac{(r_2 \cdot b)^2 \cdot K}{K_R + (r_2 \cdot b)^2 \cdot K} \Rightarrow \frac{D}{1 - D} = \frac{K_R}{K \cdot (r_2 \cdot b)^2}$

On retrouve alors les résultats donnés à la partie 5 de l'énoncé :

$$K_T = \frac{1}{r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b} \quad \omega_{0T} = r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot \sqrt{\frac{K \cdot K_R}{J \cdot [K_R + (b \cdot r_2)^2 \cdot K]}} \quad \xi_T = \frac{f}{2 \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b} \cdot \sqrt{\frac{K_R + (b \cdot r_2)^2 \cdot K}{J \cdot K \cdot K_R}}$$

**Q25- Détermination de la raideur  $K_R$  du ressort pour éviter le dépassement de la valeur finale**

Pour respecter le critère de non dépassement de la valeur finale de  $F(t)$  pour un échelon de couple  $C_m(t) = C_0$ , il faut un facteur d'amortissement supérieur ou égal à 1 :  $\xi_T \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \frac{f}{2.r_1.\rho.r_2.b} \sqrt{\frac{K_R + (b.r_2)^2.K}{J.K.K_R}} &\geq 1 \Leftrightarrow f^2.(K_R + (b.r_2)^2.K) \geq (2.r_1.\rho.r_2.b)^2.J.K.K_R \\ &\Leftrightarrow (f.b.r_2)^2.K \geq (2.r_1.\rho.r_2.b)^2.J.K - f^2.K_R \\ &\Leftrightarrow \mathbf{K_R \leq \frac{(f.b.r_2)^2.K}{(2.r_1.\rho.r_2.b)^2.J.K - f^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \frac{(f.b.r_2)^2.K}{(2.r_1.\rho.r_2.b)^2.J.K - f^2} = \frac{(2,5.10^{-6} \times 0,16 \times 0,3)^2 \times 10^4}{(2 \times 0,1 \times 0,125 \times 0,16 \times 0,3)^2 \times 2.10^{-7} \times 10^4 - (2,5.10^{-6})^2} = 0,05 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

**Donc, pour respecter le critère de non dépassement de la valeur finale de  $F(t)$  pour un échelon de couple  $C_m(t) = C_0$ , il faut une raideur  $K_R$  du ressort de torsion de :  $K_R \leq 0,05 \text{ N.m.rad}^{-1}$ .**

**Q26- Temps de réponse à 5%**

Pour la valeur maximale de la raideur  $K_R$  du ressort respectant le critère de non dépassement de la valeur finale :  $K_R = 0,05 \text{ N.m.rad}^{-1}$ , la pulsation propre de la fonction de transfert de la transmission est :

$$\omega_{0T} = r_1.\rho.r_2.b \sqrt{\frac{K.K_R}{J.[K_R + (b.r_2)^2.K]}} = 0,1 \times 0,125 \times 0,3 \times 0,16 \sqrt{\frac{10^4 \times 0,05}{2.10^{-7} \cdot [0,05 + (0,3 \times 0,16)^2 \cdot 10^4]}} = 6,24 \text{ rad.s}^{-1}$$

D'autre part pour cette valeur maximale de  $K_R$  on a  $\xi_T = 1$ .

Donc l'abaque nous donne :  $t_{5\%} \cdot \omega_{02} = 4,8$

On en déduit donc le temps de réponse à 5 % de :  $t_{5\%} \approx \frac{4,8}{6,24} = 0,768 \text{ s} = 769 \text{ ms}$

**Q27- Conclusion**

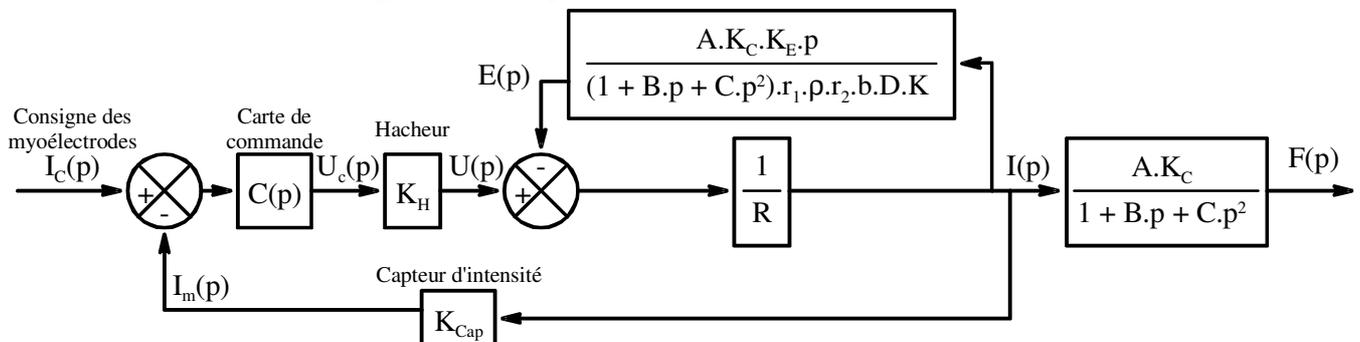
Or le cahier des charges impose outre le non dépassement de la valeur finale un temps de réponse à 5% de la phase de serrage compris entre 250 et 500 ms.

**Ayant un temps de réponse minimal sans dépassement de la valeur finale  $t_{5\%} > 500 \text{ ms}$ , On en déduit que la transmission ne permet pas de répondre au cahier des charges avec un échelon de couple  $C_m(t) = C_0$  à l'entrée de la transmission.**

**Partie IV- Commande de l'effort de serrage de la pince avec une boucle de courant**

**Q28- Simplification du schéma bloc**

Le schéma bloc de la figure 18 est équivalent au schéma bloc ci-dessous :



Par identification avec le schéma bloc de la figure 19 on a :

D'une part :  $H_2(p) = \frac{K_2}{1 + B.p + C.p^2} = \frac{A.K_C}{1 + B.p + C.p^2}$  Soit :  $\mathbf{K_2 = A.K_C}$

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part : } H_1(p) &= K_H \cdot \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{A \cdot K_c \cdot K_e \cdot p}{(1 + B \cdot p + C \cdot p^2) \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R}} \\
 H_1(p) &= \frac{K_H \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2) \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K}{(1 + B \cdot p + C \cdot p^2) \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R + A \cdot K_c \cdot K_e \cdot p} \\
 H_1(p) &= \frac{K_H \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2) \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K}{r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R + (B \cdot r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R + A \cdot K_c \cdot K_e) \cdot p + r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R \cdot C \cdot p^2} \\
 \text{Soit finalement : } H_1(p) &= \frac{\frac{K_H}{R} \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{1 + \left( B + \frac{A \cdot K_c \cdot K_e}{r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R} \right) \cdot p + C \cdot p^2} \\
 \text{Soit : } \quad \mathbf{K_1} &= \frac{K_H}{R} \quad \mathbf{E} = B + \frac{A \cdot K_c \cdot K_e}{r_1 \cdot \rho \cdot r_2 \cdot b \cdot D \cdot K \cdot R} \quad \mathbf{F} = C
 \end{aligned}$$

**Q29- Justification des deux constantes de temps**

Le dénominateur de la fonction de transfert  $H_1(p)$  :  $1 + E \cdot p + F \cdot p^2 = 1 + 0,133 \cdot p + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot p^2$  a un discriminant :  $\Delta = 0,133^2 - 4 \times 1,34 \cdot 10^{-3} = + 0,0123$  Qui est donc positif.

**On en déduit que ce polynôme a 2 zéros réels. Donc il peut donc s'écrire :  $(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)$  avec :  $T_1 + T_2 = 0,133$  et :  $T_1 \cdot T_2 = 1,34 \cdot 10^{-3}$**

**Q30- Choix du correcteur**

D'une part, le correcteur choisi (Proportionnel intégral) introduit un intégrateur dans la FTBO. Cela permet d'obtenir une erreur nulle en réponse à un échelon de consigne.

D'autre part, en choisissant la constante de temps 0,122 s cela permet de compenser la plus grande constante de temps du dénominateur de la FTBO non corrigée.

**Q31- FTBF**

$$\begin{aligned}
 \text{On a alors la FTBO : } H_{BO}(p) &= C(p) \cdot H_{BONC}(p) = \frac{K_{Cor} \cdot (1 + 0,122 \cdot p)}{p} \cdot \frac{3,44 \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{(1 + 0,011 \cdot p) \cdot (1 + 0,122 \cdot p)} \\
 H_{BO}(p) &= \frac{3,44 \cdot K_{Cor} \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{p \cdot (1 + 0,011 \cdot p)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Du schéma bloc de la figure 19, on obtient la FTBF : } H_{BF}(p) = \frac{F(p)}{I_C(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \cdot H_2(p)$$

$$\begin{aligned}
 H_{BF}(p) &= \frac{\frac{3,44 \cdot K_{Cor} \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{p \cdot (1 + 0,011 \cdot p)}}{1 + \frac{3,44 \cdot K_{Cor} \cdot (1 + B \cdot p + C \cdot p^2)}{p \cdot (1 + 0,011 \cdot p)}} \cdot \frac{11,9}{1 + B \cdot p + C \cdot p^2} \\
 H_{BF}(p) &= \frac{40,9 \cdot K_{Cor}}{3,44 \cdot K_{Cor} + (1 + 3,44 \cdot B \cdot K_p) \cdot p + (0,011 + 3,44 \cdot C \cdot K_p) \cdot p^2} \\
 H_{BF}(p) &= \frac{11,9}{1 + \frac{1 + 3,44 \cdot B \cdot K_{Cor}}{3,44 \cdot K_{Cor}} \cdot p + \frac{0,011 + 3,44 \cdot C \cdot K_{Cor}}{3,44 \cdot K_{Cor}} \cdot p^2} \\
 \mathbf{H_{BF}(p)} &= \frac{\mathbf{11,9}}{\mathbf{1 + \frac{1 + 0,0574 \cdot K_{Cor}}{3,44 \cdot K_{Cor}} \cdot p + \frac{0,011 + 4,61 \cdot 10^{-3} \cdot K_{Cor}}{3,44 \cdot K_{Cor}} \cdot p^2}}
 \end{aligned}$$

**Q32- Valeur maximale de  $K_{Cor}$**

Fonction de transfert du second ordre pour laquelle on a :

Un gain statique :  $K_{BF} = 11,9 \text{ N.A}^{-1}$  Une pulsation propre :  $\omega_{0BF} = \sqrt{\frac{3,44.K_{Cor}}{0,011 + 4,61.10^{-3}.K_{Cor}}}$

Un facteur d'amortissement :  $\xi_{BF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3,44.K_{Cor}}{0,011 + 4,61.10^{-3}.K_{Cor}}} \cdot \frac{1 + 0,0574.K_{Cor}}{3,44.K_{Cor}}$

$$\xi_{BF} = \frac{1 + 0,0574.K_{Cor}}{2 \cdot \sqrt{3,44.K_{Cor} \cdot (0,011 + 4,61.10^{-3}.K_{Cor})}}$$

La valeur maximale de  $K_{Cor}$  ne donnant pas lieu à dépassement est telle que :  $\xi_{BF} = 1$ .

$$\begin{aligned} \xi_{BF} = 1 &\Leftrightarrow 1 + 0,0574.K_{Cor} = 2 \cdot \sqrt{3,44.K_{Cor} \cdot (0,011 + 4,61.10^{-3}.K_{Cor})} \\ &\Leftrightarrow 1 + 0,1148.K_{Cor} + 3,295.10^{-3}.K_{Cor}^2 = 0,1514.K_{Cor} + 0,06343.K_{Cor}^2 \\ &\Leftrightarrow 0,06015.K_{Cor}^2 + 0,0366.K_{Cor} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$  ou  $\begin{cases} K_{Cor} = -4,39 \\ K_{Cor} = 3,78 \end{cases}$  Cette valeur maximale de  $K_{Cor}$  est donc :  $K_{Cor} = 3,78 \text{ V.s}^{-1}$

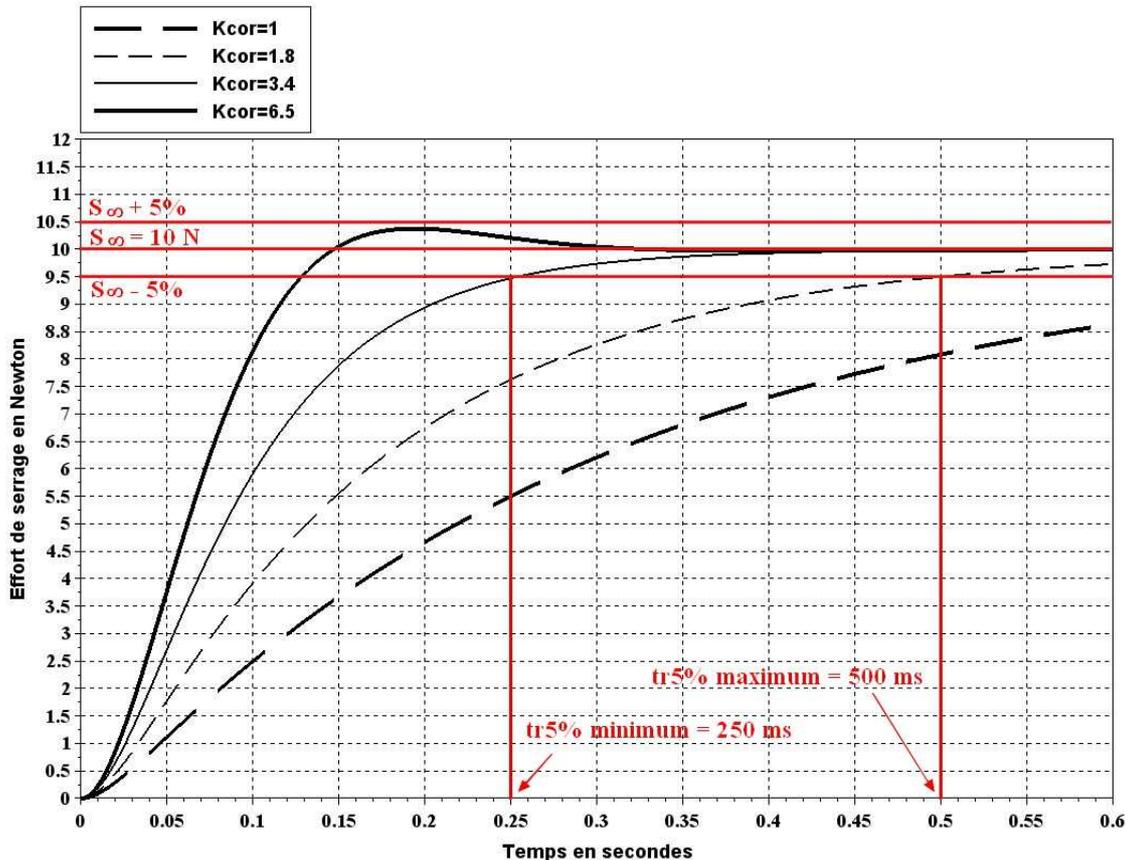
**Q33- Temps de réponse**

Pour cette valeur de  $K_{Cor} = 3,78 \text{ V.A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  :  $\omega_{0BF} = \sqrt{\frac{3,44 \times 3,78}{0,011 + 4,61.10^{-3} \times 3,78}} = 21,4 \text{ rad.s}^{-1}$

D'autre part on a :  $\xi_{BF} = 1$  Donc d'après l'abaque de la figure 16 :  $t_{5\%} \cdot \omega_{0BF} = 4,8$

Donc réponse pour cette valeur maximale de  $K_{Cor}$  le temps de réponse est :  $t_{5\%} = \frac{4,8}{21,4} = 0,22 \text{ s}$

**Q34- Temps de réponse**



Plage de variation du gain statique du correcteur  $K_{Cor}$  :  $K_{Cor} \in [1,8 ; 3,4]$