# TD1 - Machine de Perçage : Corrigé

## 1- Modélisation

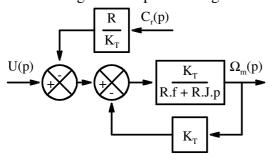
#### 1.1- Fonctionnement normal

Pour un fonctionnement normal il faut que :  $K_A = \frac{K_C}{K_V} = \frac{120}{2.\pi} \cdot \frac{2.\pi}{4.10^{-3}} = 30\ 000\ inc.m^{-1}$ 

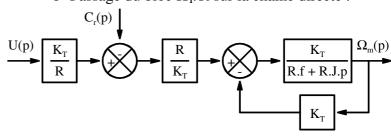
### 1.2- Simplification de la boucle interne du moteur

A- Par la modification des schémas bloc

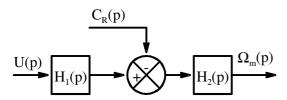
a- Passage du comparateur à gauche :



b- Passage du bloc K<sub>T</sub>/R sur la chaine directe :



Par identification au schéma bloc :

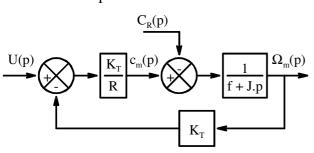


On obtient:  $H_1(p) = \frac{K_T}{R}$  et

$$H_{2}(p) = \frac{R}{K_{T}} \cdot \frac{\frac{K_{T}}{R.f + R.J.p}}{1 + \frac{K_{T}^{2}}{R.f + R.J.p}} \qquad H_{2}(p) = \frac{\frac{R}{K_{T}^{2} + R.f}}{1 + \frac{R.J}{K_{T}^{2} + R.f}p}$$

B- Par le principe de superposition

A partir du schéma bloc

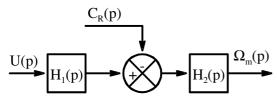


Par le principe de superposition on a :

$$\Omega_{m}(p) = \frac{\frac{K_{T}}{R.f + R.J.p}}{1 + \frac{K_{T}^{2}}{R.f + R.J.p}} \cdot U(p) - \frac{\frac{1}{f + J.p}}{1 + \frac{K_{T}^{2}}{R.f + R.J.p}} \cdot C_{r}(p)$$

$$\Omega_{m}(p) = \frac{\frac{K_{T}}{K_{T}^{2} + R.f}}{1 + \frac{R.J}{K_{T}^{2} + R.f}} \cdot U(p) - \frac{\frac{R}{K_{T}^{2} + R.f}}{1 + \frac{R.J}{K_{T}^{2} + R.f}} \cdot C_{r}(p)$$

A partir du schéma bloc



Par le principe de superposition on a :

$$\Omega_{\rm m}(p) = H_1(p).H_2(p).U(p) - H_2(p).C_{\rm r}(p)$$

Par identification on a donc:

$$\mathbf{H_{2}(p)} = \frac{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K_{T}}^{2} + \mathbf{R.f}}}{1 + \frac{\mathbf{R.J}}{\mathbf{K_{T}}^{2} + \mathbf{R.f}} \cdot \mathbf{p}} \qquad \mathbf{H_{1}(p).H_{2}(p)} = \frac{\frac{\mathbf{K_{T}}}{\mathbf{K_{T}}^{2} + \mathbf{R.f}}}{1 + \frac{\mathbf{R.J}}{\mathbf{K_{T}}^{2} + \mathbf{R.f}} \cdot \mathbf{p}}$$

Soit: 
$$H_1(p) = \frac{1}{H_2(p)} \cdot \frac{\frac{K_T}{K_T^2 + R.f}}{1 + \frac{R.J}{K_T^2 + R.f}p} = \frac{1 + \frac{R.J}{K_T^2 + R.f}p}{\frac{R}{K_T^2 + R.f}} \cdot \frac{\frac{K_T}{K_T^2 + R.f}}{1 + \frac{R.J}{K_T^2 + R.f}p}$$

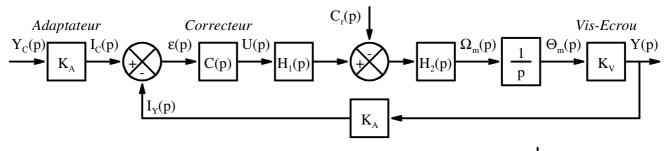
$$H_1(p) = \frac{K_T}{R}$$

#### C- Application numérique :

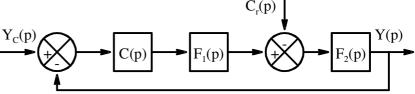
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{p}) &= \frac{0.08}{1.2} = \frac{1}{15} \, \mathbf{N.m.V^{-1}} \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{p}).\mathbf{H}_2(\mathbf{p}) &= \mathbf{H}_m(\mathbf{p}) \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{p})}{\mathbf{H}_1(\mathbf{p})} = \frac{15 \times 10}{1 + 0.05.p} \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) = \frac{150}{1 + 0.05.p} \, \mathbf{rad.s^{-1}.N^{-1}.m^{-1}} \end{aligned}$$

### 1.3- Retour unitaire

Le schéma bloc de l'asservissement devient :



Par identification au schéma bloc :



On obtient: 
$$F_1(p) = K_A.H_1(p) = \frac{30\ 000}{15}$$
  $F_1(p) = 2\ 000\ N.in.V^{-1}$ 

$$F_2(p) = \frac{H_2(p).K_V}{p} = \frac{150 \times 4.10^{-3}}{2.\pi.p.(1 + 0.05.p)}$$
 
$$F_2(p) = \frac{9.55.10^{-2}}{p.(1 + 0.05.p)} N^{-1}$$

## 1.4- Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée

$$H_{BONC}(p) = F_1(p).F_2(p) = \frac{2\ 000 \times 9,55.10^{-2}}{p.(1+0,05.p)}$$

$$H_{BONC}(p) = \frac{191}{p.(1+0,05.p)} \text{ inc.V}^{-1}$$

## 2- Etude avec un correcteur proportionnel

#### 2.1- Erreur statique

La FTBO est de classe 1 donc l'erreur statique pour un échelon de consigne est nulle :  $\varepsilon_{SC} = 0$ 

L'intégrateur de la FTBO est en aval de la perturbation (qui est un échelon  $C_{r0}$ ) donc l'erreur statique due à cette perturbation est :  $\varepsilon_P = \frac{C_{r0}}{K_1}$  où  $K_1$  est le gain de la fonction de transfert en amont de la

perturbation :  $K_1 = 2~000.K$  D'où l'erreur due à cette perturbation :  $\varepsilon_P = \frac{C_{r0}}{2~000.K}$ 

On en déduit l'erreur statique totale :  $\varepsilon_{ST} = \varepsilon_{SC} + \varepsilon_{P} = \frac{C_{r0}}{2\ 000.K}$ 

#### 2.2- Erreur de trainage

La FTBO est de classe 1 donc l'erreur de trainage (ou de poursuite) pour une rampe de pente  $V_0$  en consigne est :  $\epsilon_{TC} = \frac{V_0}{K_{BO}}$  Où  $K_{BO}$  est le gain de la FTBO :  $K_{BO} = 191.K$  Soit :  $\epsilon_{TC} = \frac{V_0}{191.K}$ 

L'erreur due à l'échelon de perturbation est toujours :  $\varepsilon_P = \frac{C_{r0}}{2\ 000.K}$ 

On en déduit l'erreur de trainage totale :  $\epsilon_{TT} = \epsilon_{TC} + \epsilon_P = \frac{1}{K} \cdot \left( \frac{V_0}{191.K} + \frac{C_{r0}}{2\,000} \right)$ 

#### 2.3- Dimensionnement du correcteur pour la précision

Pour respecter les deux critères de précision il faut que :

$$\begin{split} \epsilon_{ST} &\leq 0,1 \text{ mm} = 1.10^{-4} \text{ m} \\ \frac{C_{r0}}{2\ 000.\text{K}} &\leq 1.10^{-4} \quad \text{Avec} : C_{r0} = 0,05 \text{ N.m} \\ K &\geq \frac{0,05}{2\ 000 \times 1.10^{-4}} = 0,25 \text{ V.inc}^{-1} \\ \end{split} \qquad \begin{aligned} \epsilon_{TT} &\leq 2 \text{ mm} = 2.10^{-3} \text{ m} \quad \text{Avec} : C_{r0} = 0,1 \text{ m.s}^{-1} \\ \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{V_0}{191.K} + \frac{C_{r0}}{2\ 000}\right) &\leq 2.10^{-3} \quad \text{Avec} : C_{r0} = 0,05 \text{ N.m} \\ K &\geq \frac{1}{2.10^{-3}} \cdot \left(\frac{0,1}{191} + \frac{0,05}{2\ 000}\right) = 0,27 \text{ V.inc}^{-1} \end{aligned}$$

#### 2.4- Respect du critère de stabilité

Si on choisit un correcteur proportionnel de gain K = 0.27 la courbe de gain de la FTBO sera translatée verticalement de :  $20.\log(0.27) = -11.4$  dB. Or le gain dynamique de la FTBO non corrigé est de + 11.4 dB à la pulsation  $\omega \approx 30 \text{ rad.s}^{-1}$ . Donc pour  $K = 0.27 \text{ V.inc}^{-1}$  on a  $\omega_{0dB} \approx 30 \text{ rad.s}^{-1}$ .

De plus à cette pulsation  $\omega_{0dB} \approx 30 \text{ rad.s}^{-1}$  la phase de la FTBO non corrigée (qui ne sera pas modifiée avec un correcteur proportionnel) est de :  $\phi_{BO}(\omega_{0dB}) \approx -145^{\circ}$ .

Donc avec un correcteur proportionnel de gain  $K = 0.27 \text{ V.inc}^{-1}$  la marge de phase sera de :

$$M_{\odot} = 180^{\circ} - 145^{\circ} = 35^{\circ} < 60^{\circ}$$

Si on choisit un gain supérieur à 0,27 la marge de phase sera encore plus faible. SI on choisit un gain inférieur à 0,27 les critère de précision ne seront plus respectés.

Un correcteur proportionnel ne permet donc pas de respecter simultanément les critères de précision et de stabilité. En revanche la critère de rapidité  $\omega_{0dB} \ge 6$  rad.s<sup>-1</sup> peut être respecté.

## 3- Etude avec un correcteur proportionnel intégral

#### 3.1- Fonction de transfert du correcteur

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p \cdot p + K_i}{p} = \frac{K_i \cdot \left(1 + \frac{K_p}{K_i} \cdot p\right)}{p} \qquad \text{Soit :} \qquad C(p) = \frac{K \cdot (1 + T \cdot p)}{p} \qquad \text{Avec} \quad \left| \begin{array}{c} K = K_i \\ T = \frac{K_p}{K_i} \end{array} \right|$$

#### 3.2- Impact du correcteur sur la précision

Ce correcteur est de classe 1. Il introduit donc un 2<sup>ième</sup> intégrateur dans la FTBO. On en déduit :

- Qu'avec 2 intégrateurs dans la FTBO le système est précis en réponse à un échelon ou une rampe en consigne.
- ☞ L'intégrateur du correcteur étant en amont de la perturbation il n'y pas d'erreur due à un échelon de perturbation.

Avec ce correcteur les erreurs statique et de trainage sont toutes les deux nulles. Donc tous les critères de précision sont respectés.

#### 3.3- Dimensionnement du correcteur

Déterminons la phase et le gain dynamique de la FTBO non corrigée à la pulsation  $\omega = 6 \text{ rad.s}^{-1}$ .

- Par lecture sur le diagramme de Bode on a :  $\phi_{BONC}(6) = -107^{\circ}$   $G_{dBBONC}(6) = 30 \text{ dB}$
- Par le calcul on a :  $\phi_{BONC}(6) = -90^{\circ} \arctan(0.05 \times 6) = -106.7^{\circ}$

$$G_{\text{dBBONC}}(6) = 20.\log\left(\frac{191}{6}\right) - 10.\log(1 + (0.05 \times 6)^2) = 29.7 \text{ dB}$$

Donc pour obtenir une marge de phase de  $60^\circ$  à la pulsation  $\omega_{0dB}=6~{\rm rad.s}^{-1}$ , la phase  $\phi_{Cor}(6)$  et le gain dynamique du correcteur  $G_{dBCor}(6)$  à cette pulsation doivent être tels que :

$$\Rightarrow 180^{\circ} + \phi_{BONC}(6) + \phi_{Cor}(6) = 60^{\circ} \Leftrightarrow \phi_{Cor}(6) = 60^{\circ} - 180^{\circ} + 106,7^{\circ} = -13,3^{\circ}$$

$$G_{\text{dBBONC}}(6) + G_{\text{dBCor}}(6) = 0 \text{ dB}$$
  $\Leftrightarrow$   $G_{\text{dBCor}}(6) = -29.7 \text{ dB}$ 

Or étant donné la fonction de transfert du correcteur on a :

 $C(p) = \frac{4,5.10^{-2}.(1+0,71.p)}{p} \text{ V.inc}^{-1}$ D'où finalement la fonction de transfert du correcteur :

#### 3.4- Gains proportionnel et intégral du correcteur :

 $K_i = K = 4.5.10^{-2} \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ Des questions 3.1 et 3.2 on obtient :  $K_p = T.K_i = 0.71 \times 4.5.10^{-2} = 3.2.10^{-2} \text{ V.inc}^{-1}$ et:

## 3.5- Respect du cahier des charges

- Par dimensionnement du correcteur les critères de marge de phase  $(M_0 \ge 60^\circ)$  et de pulsation de coupure ( $\omega_{0dB} \ge 6 \text{ rad.s}^{-1}$ ) sont respectés.
- © Comme vu à la question 3.2, tous les critères de précision sont respectés.
- $\mathcal{F}$  En revanche la simulation nous montre un temps de réponse à 5% d'environ :  $t_{5\%} = 1,35 \text{ s} > 1 \text{ s}$ . le critère de rapidité n'est donc pas respecté.

#### Remarque:

On voit que le temps d'établissement (temps mis pour atteindre le 1<sup>ier</sup> maximum) est conforme à la loi empirique  $t_e.\omega_{0dB} \approx 3 \Rightarrow t \approx \frac{3}{6} = 0.5$  s. En revanche le temps mis pour revenirà la valeur finale est trop long: environ 0,8 s. Ce qui fait que le temps de réponse à 5% est trop important.

Cela est caractéristique des correcteurs PI dont la phase à la pulsation  $\omega_{0dB}$  est trop proche de 0°. En général pour éviter cela on préfère prendre un correcteur PI de phase (à  $\omega_{0dB}$ ) inférieure à  $-20^{\circ}$ . Mais cela n'est pas toujours possible comme dans ce cas.

## 4- Etude avec un correcteur à Avance de phase

#### 4.1- Dimensionnement du correcteur

Déterminons la phase et le gain dynamique de la FTBO non corrigée à la pulsation  $\omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ .

- Par le calcul on a :  $\phi_{BONC}(50) = -90^{\circ} \arctan(0.05 \times 50) = -158.2^{\circ}$

$$G_{\text{dBBONC}}(50) = 20.\log\left(\frac{191}{50}\right) - 10.\log(1 + (0.05 \times 50)^2) = 3.0 \text{ dB}$$

Donc pour obtenir une marge de phase de  $60^{\circ}$  à la pulsation  $\omega_{0dB} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ , la phase  $\varphi_{Cor}(50)$  et le gain dynamique du correcteur G<sub>dBCor</sub>(50) à cette pulsation doivent être tels que :

$$G_{dBBONC}(50) + G_{dBCor}(50) = 0 \text{ dB}$$
  $\Leftrightarrow$   $G_{dBCor}(50) = -3.0 \text{ dB}$ 

Or étant donné la fonction de transfert du correcteur, si on choisit d'avoir une phase maximale du correcteur à la pulsation  $\omega_{0dB} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ , on a :

$$Arr arcsin(rac{a-1}{a+1}) = \phi_{Cor}(50) = 38.2^{\circ} \Leftrightarrow c = rac{1 + \sin 38.2^{\circ}}{1 - \sin 38.2^{\circ}} = 4.24$$

$$\omega_{\text{OdB}} = \omega_{\text{Max}} = \frac{1}{\text{T.}\sqrt{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\omega_{\text{OdB.}}\sqrt{a}} = \frac{1}{50.\sqrt{4.24}} = 9,7.10^{-3} \text{ s} = 9,7 \text{ ms}$$

$$^{\text{GP}}$$
 G<sub>dBCor</sub>(50) = 20.log K + 10.log a = −3,0 dB  $\iff$  20.log K = −3,0 − 10.log 4,24 = −9,3 dB

$$\Leftrightarrow$$
 K =  $10^{-9,3/20}$  = 0,34 V.inc<sup>-1</sup>

D'où finalement la fonction de transfert du correcteur :  $C(\mathbf{p}) = \frac{0.34.(1 + 4.1.10^{-2}.\mathbf{p})}{1 + 9.7.10^{-3}.\mathbf{p}} \text{ V.inc}^{-1}$ 

#### 4.2- Respect des critères de précision

Comme avec le correcteur proportionnel la FTBO n'a qu'un seul correcteur en aval de la perturbation. Donc comme pour ce correcteur proportionnel les critère de précision seront respectés à la condition que le gain du correcteur soit tel que  $K \ge 0.27 \text{ V.inc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Ce qui est le cas ici : 0.34 > 0.27.

Donc tous les critères de précision du cahier des charges sont respectés.

#### 4.3- Respect du cahier des charges

- <sup>⊕</sup> Par dimensionnement du correcteur les critères de marge de phase ( $M_{\phi} \ge 60^{\circ}$ ) et de pulsation de coupure ( $ω_{0dB} \ge 6 \text{ rad.s}^{-1}$  ici  $ω_{odB} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ ) sont respectés.
- © Comme vu à la question 4.2, tous les critères de précision sont respectés. (Cela est confirmé par la simulation en réponse à un échelon de consigne de 0,1 m une rampe de pente 0,1 m.s<sup>-1</sup>)
- The La simulation nous montre un temps de réponse à 5% d'environ :  $t_{5\%}$  = 0,1 s ≤ 1 s. le critère de rapidité est donc respecté.

Donc tous les critères du cahier des charges sont respectés.

#### Remarque:

Un temps de réponse de 0,1 s (pour un déplacement de 0,1 m = 10 cm) est dans la réalité peu probable. L'application du théorème de la valeur initiale nous montre que pour un déplacement à cette vitesse il nous faut une tension initiale d'alimentation du moteur de 4 320 V. Ce qui est bien sur impossible. Même pour un déplacement de 1 cm cette tension serait de 432 V. Et rare sont les moteurs à courant continu acceptant une telle tension.

Il faut alors utiliser une combinaison de deux correcteurs :  $C(p) = C_1(p) \cdot C_2(p)$ 

Un correcteur PI de gain statique unitaire :  $C_1(p) = \frac{1 + T_1 \cdot p}{p}$ 

Un correcteur à avance de phase :  $C_2(p) = \frac{K.(1 + a.T_2.p)}{1 + T_2.p}$ 

En choisissant une pulsation de coupure de  $\omega_{0dB} = 8 \text{ rad.s}^{-1}$ , une phase du correcteur PI de  $-40^{\circ}$  et une phase maximale du correcteur à avance de phase à  $\omega_{0dB} = 8 \text{ rad.s}^{-1}$ , on obtient le correcteur :

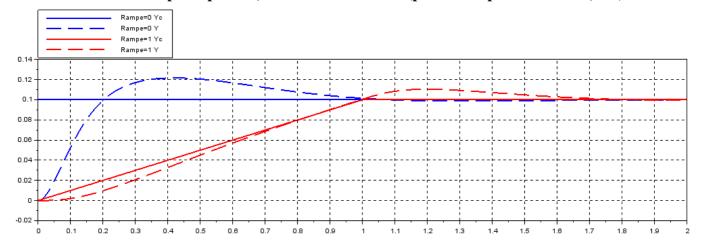
$$C(p) = 0.13 \cdot \frac{1 + 0.15.p}{p} \cdot \frac{1 + 0.22.p}{1 + 0.07.p}$$

(Un exercice de dimensionnement de correcteur intéressant à faire)

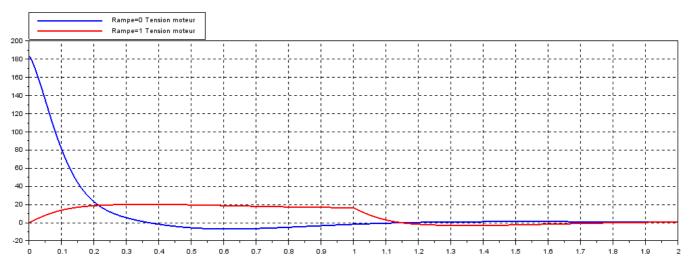
La simulation pour un déplacement de 10 cm en échelon (Rampe = 0) et en rampe de pente  $0.1 \text{ m.s}^{-1} \text{ sur } 1$  seconde nous donne alors la courbe de la page suivante.

- Fireurs statiques et de trainages nulles : Critères de précision respecté
- $^{\circ}$  Marge de phase de  $60^{\circ}$  : Critère de marge de phase respecté :  $M_{o} \ge 60^{\circ}$
- $^{\circ}$  Pulsation de coupure de 8 rad.s<sup>-1</sup> : Critère de pulsation de coupure respecté :  $ω_{0dB} ≥ 6$  rad.s<sup>-1</sup>

L'ensemble du cahier des charges est bien respecté. Avec une tension maximale d'alimentation du moteur de seulement 184 V. Ce qui est acceptable pour certains moteurs à courant continu Réponse temporelle du système (en m) à un échelon de consigne de 0,1 m = 10 cm Et à une rampe de pente 0,1 m.s<sup>-1</sup> sur 1 seconde (pour un déplacement de 0,1 m)



Tension d'alimentation du moteur (en V) pour un échelon de consigne de 0,1 m = 10 cmEt à une rampe de pente  $0,1 \text{ m.s}^{-1}$  sur 1 seconde (pour un déplacement de 0,1 m)



Diagrammes de Bode de la FTBO Corrigée

