Théorie des mécanismes

1- Isostatisme et Hyperstatisme

1.1- Définitions

La dynamique (ou statique) permet de déterminer des actions de liaisons ou des actions extérieures s'appliquant sur les pièces du système étudié. Elle permet également d'établir les équations différentielles régissant le fonctionnement d'un mécanisme.

Pour cela, le principe fondamental de la dynamique : PFD (ou PFS en statique) permet d'écrire des équations entre les inconnues cinématiques et sthéniques (inconnues des actions de liaisons ou actions extérieures. Ces équations sont appelées les équations sthéniques.

Les actions de liaisons ne pourront être déterminées que si il est possible d'écrire par le PFS autant d'équations indépendantes non triviales que d'inconnues d'actions de liaisons.

1.1.1- Degré d'hyperstatisme

Le degré d'hyperstatisme H d'un mécanisme est la différence entre :

☞ **I_S le nombre d'inconnues des actions de liaisons : Inconnues sthéniques**

et : ☞ **E_S : le nombre d'équations indépendantes issues du PFD ou PFS : Equations sthéniques indépendantes.**

Quelque soit le mécanisme le degré d'hyperstatisme est toujours positif ou nul

1.1.2- Isostatisme et hyperstatisme

1.2- Intérêt de l'isostatisme

Les inconnues sthéniques ne peuvent être déterminées que lorsque le degré d'hyperstatisme est nul. Dans le cas contraire il est nécessaire de faire des hypothèses sur les inconnues sthéniques pour résoudre le système d'équations sthéniques. Ou de tenir compte de la déformation élastique des pièces pour déterminer ces actions.

D'autre part un mécanisme hyperstatique impose que les surfaces réelles de contact entre les pièces correspondent précisément à leur définition géométrique avant fabrication. Or du fait des imprécisions liées à la fabrication des pièces, ou à la déformation de ces pièces sous la contrainte et les variations dues aux variations de température, ces surfaces diffèrent du modèle réel.

Un mécanisme hyperstatique impose donc des processus de fabrication et de montage plus difficiles et donc plus couteux pouvant également présenter des points durs voir un blocage du mécanisme.

1.3- Hypothèses et notations

On suppose les solides indéformables. Et on suppose que les liaisons sont permanents (Contact toujours effectifs). On pose alors :

☞ **N_P : le nombre de pièces (ou classes d'équivalence) du mécanisme (Bâti inclus)**

☞ **I_S : le nombre total d'inconnues sthéniques des liaisons du mécanisme**

☞ **I_C : le nombre total d'inconnues cinématiques des liaisons du mécanisme**

☞ **N_L : le nombre de liaisons entre les pièces du mécanisme**

1.4- Relation entre nombres d'inconnues sthéniques et cinématiques

Si le solide 1 est en liaison parfaite avec le solide 2 dont le torseur cinématique est : $\{\mathcal{V}(1/2)\}$, alors l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 peut se modéliser par un torseur $\{T(1/2)\}$ tel que le comoment de ces deux torseurs est nul. : $\{\mathcal{V}(1/2)\} \otimes \{T(1/2)\} = 0$

Exemple : Si on a $\{\mathcal{V}(1/2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_X & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_Z & V_Z \end{Bmatrix}$ Alors : $\{T_{1/2}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Le nombre d'inconnues sthéniques d'une liaison parfaite n_S plus le nombre d'inconnues cinématiques n_C de cette même liaison est donc égal à 6. Donc pour un mécanisme :

2- Chaines cinématiques

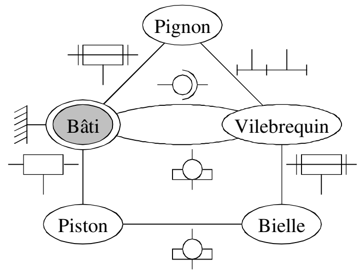
2.1- Graphe des liaisons d'un mécanisme

Le graphe des liaisons est un schéma sur lequel on indique :

- ☞ Chacune des classes d'équivalence par un cercle avec le numéro de la classe d'équivalence (ou le nom ou une lettre)
- ☞ Chacune des liaisons par un trait reliant les classes d'équivalence liées

Parfois le bâti de la machine est indiqué par un symbole de masse ou un double cercle ou un coloriage intérieur du cercle

Exemple de graphe des liaisons

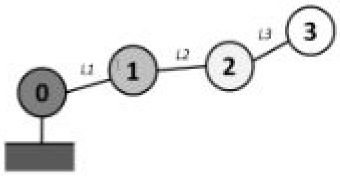


2.2- Chaines de solides

Suivant les mécanismes on a des chaines de solides ouvertes fermées ou complexes.

Chaine ouverte

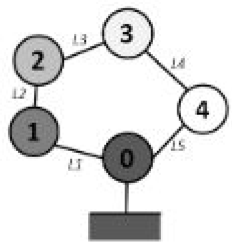
Les liaisons ne permettent pas de bouclage du graphe des liaisons



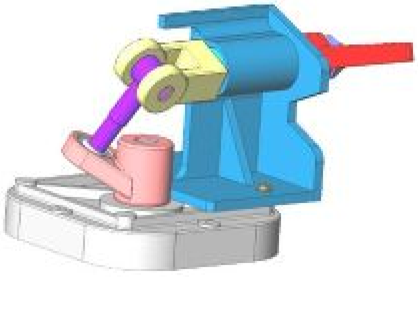
Exemple : Bras de robot

Chaine fermée

Les liaisons permettent un unique bouclage du graphe des liaisons

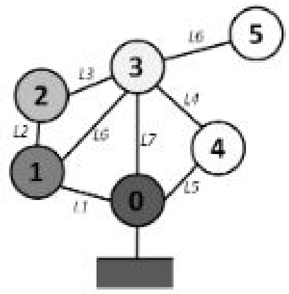


Exemple : Lève barrière



Chaine complexe

Les liaisons permettent plusieurs bouclage du graphe des liaisons



Exemple : Plate forme élévatrice

2.3- Nombre cyclomatique d'un mécanisme ou nombre de cycles indépendants

Dans un mécanisme une succession de liaisons entre des pièces peut permettre de revenir à la pièce d'origine. Cette succession de liaisons et de pièces forment un cycle. Sur le graphe des liaisons, ce cycle se reconnaît par une boucle. On note le alors le nombre de cycles indépendants :

Ce nombre cyclomatique se calcule par la relation :

2.4- Degré de mobilité d'un mécanisme

2.4.1- Définition

Les mobilités d'un mécanisme sont les différents mouvements indépendants de ce mécanisme.

2.4.2- Mobilités utiles et internes

On distingue les mobilités utiles et les mobilités internes. Il n'y a mathématiquement pas de différences entres les mobilités utiles et les mobilités internes. Cette différence tient au fait que certaines mobilités permettent de répondre aux fonctions techniques que doit remplir le mécanisme ; Ce sont les mobilités utiles. Les autres mobilités sont appelées mobilités internes.

Si on note : Alors :

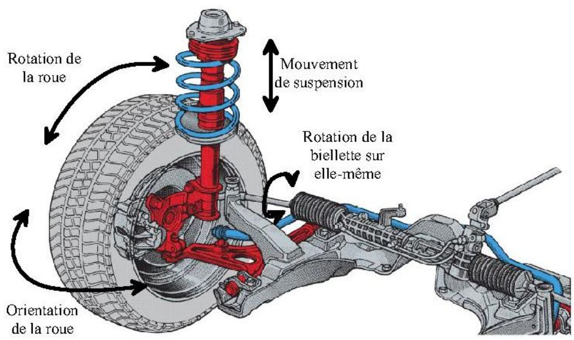
- ☞ **M_U le nombre de mobilités utiles du mécanisme**
- ☞ **M_I le nombre de mobilités internes du mécanisme**
- ☞ **M le degré de mobilité du mécanisme**

2.4.3- Exemple d'un train avant de voiture automobile.

Cette suspension doit permettre :

- ☞ La rotation de la roue autour de son axe pour faire avancer le véhicule
- ☞ La rotation de la roue autour d'un axe vertical pour diriger le véhicule
- ☞ L'enfoncement de la roue dans la caisse du véhicule pour le mouvement de suspension

D'autre part dans ce cas, la biellette de direction pouvant tourner sur elle même on a une autre mobilité qui n'a pas de fonction technique.



Ce mécanisme a donc 3 mobilités utiles et 1 mobilité interne soit un degré de mobilité de 4.

2.4.4- Cas des chaines ouvertes

Pour un mécanisme en chaine ouverte, le degré de mobilités du mécanisme est égal au nombre d'inconnues cinématiques de l'ensemble des liaisons soit au nombre total de degrés de liberté restant dans toutes les liaisons.

3- Degré d'hyperstatisme d'un mécanisme

3.1- Calcul de l'hyperstatisme par une approche sthénique

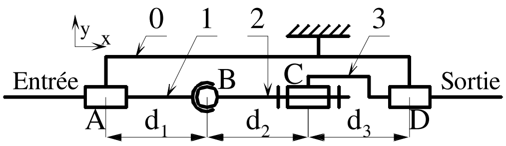
Analyse sthénique du mécanisme :

Le degré d'hyperstatisme est intrinsèque au mécanisme : Il ne dépend pas des actions mécaniques extérieures mais seulement des inconnues sthéniques. Analyser l'hyperstatisme d'un mécanisme revient donc à étudier le système d'équations obtenues sans les actions mécaniques extérieures du mécanisme.

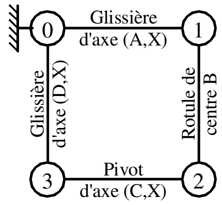
Le nombre d'équations du mécanisme est le nombre total d'équations obtenues en isolant séparément chaque solide hors bâti du mécanisme. On obtient donc $6.(N_P - 1)$ équations sthéniques.

Exemple :

Soit le mécanisme suivant :



On obtient le graphe des liaisons ci-contre :



On a alors :

$N_P = 4 \qquad N_L = 4 \qquad \gamma = 1$

$I_S = 5 + 3 + 5 + 5 = 18$

$M = M_U + M_I = 1 + 1 = 2$

L'isolement des solides 1, 2 et 3 donnent les trois équations torsorielles ci-dessous :

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{L_A} \\ \mathbf{Y_A} & \mathbf{M_A} \\ \mathbf{Z_A} & \mathbf{N_A} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{A}} + \left\{\begin{matrix} \mathbf{X_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z_B} & \mathbf{0} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{B}} = \left\{\mathbf{0}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} \mathbf{-X_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-Y_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-Z_B} & \mathbf{0} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{B}} + \left\{\begin{matrix} \mathbf{-X_C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-Y_C} & \mathbf{-M_C} \\ \mathbf{-Z_C} & \mathbf{-N_C} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}} = \left\{\mathbf{0}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{L_D} \\ \mathbf{Y_D} & \mathbf{M_D} \\ \mathbf{Z_D} & \mathbf{N_D} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{D}} + \left\{\begin{matrix} \mathbf{X_C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y_C} & \mathbf{M_C} \\ \mathbf{Z_C} & \mathbf{N_C} \end{matrix}\right\}_{\mathbf{C}} = \left\{\mathbf{0}\right\}$$

Les $6.(4 - 1) = 18$ équations issues de l'isolement des solides 1, 2 et 3 donnent donc :

$1 \Rightarrow \quad \mathbf{0 + X_B = 0} \quad \mathbf{Y_A + Y_B = 0} \quad \mathbf{Z_A + Z_B = 0} \quad \mathbf{L_A + 0 = 0} \quad \mathbf{M_A - d_1.Z_B = 0} \quad \mathbf{N_A + d_1.Y_B = 0}$

$\mathbf{2} \Rightarrow \quad \mathbf{X_B} + X_C = 0 \quad Y_B + Y_C = 0 \quad Z_B + Z_C = 0 \quad 0 + 0 = 0 \quad - M_C + d_2.Z_B = 0 \quad - N_C - d_2.Y_B = 0$

$3 \Rightarrow \quad 0 + X_C = 0 \quad Y_D + Y_C = 0 \quad Z_D + Z_C = 0 \quad L_D + 0 = 0 \quad M_D + M_C + d_3.Z_C = 0 \quad N_D + N_C - d_3.Y_C = 0$

La mobilité utile conduit a une combinaison linéaire des entre les trois équations de la résultante sur $\overrightarrow{x}$

La mobilité interne fait que l'équation des moments en projection sur $\overrightarrow{x}$ du solide 2 est triviale : 0 = 0

En notant r_S ($r_S = E_S$) le rang de la matrice sthénique (issue du système d'équations)

<u>On a donc 16 équations sthéniques indépendantes $E_S = r_S = 18 - 2 = 16 = 6.(N_P - 1) - (M_U + M_I)$</u>

Règle générale :

Relation entre hyperstatisme, mobilité et inconnues sthéniques :

Des résultats précédentes on en déduit que le degré d'hyperstatisme se calcule par la relation :

3.2- Calcul degré d'hyperstatisme par une approche cinématique

Relation entre hyperstatisme, mobilité et inconnues cinématiques :

Sachant que : $\gamma = N_L - N_P + 1$ On en déduit : $H = I_S + M_U + M_I - 6.(N_L - \gamma)$

et que : $6.N_L = I_S + I_C$ On obtient : $H = I_S + M_U + M_I + 6.\gamma - I_S - I_C$

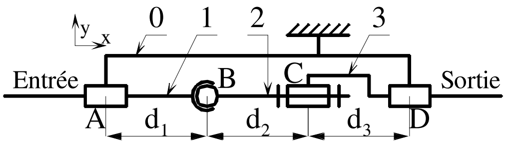
Analyse cinématique du mécanisme :

Si on note $\{\mathcal{V}_{i/j}\}$ les torseurs cinématiques associées aux liaisons entre les solides i et j (de 1 à n) d'un cycle de ce mécanisme, la fermeture cinématique de ce cycle (Composition des mouvements) s'écrit :

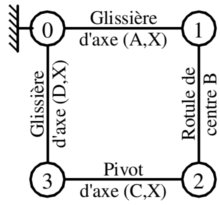
$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/3}\} + \ldots + \{\mathcal{V}_{n-1/n}\} + \{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{0\} \qquad \textbf{(on a } \gamma \textbf{ fermetures cinématiques)}$$

Exemple :

Soit le mécanisme suivant :



On obtient le graphe des liaisons ci-contre :



On a alors :

$N_P = 4 \qquad N_L = 4 \qquad \gamma = 1$

$I_C = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$

$M = M_U + M_I = 1 + 1 = 2$

Pour ce mécanisme : $H = 6 \times 1 + 2 - 6 = 2$

L'équation de fermeture cinématique du cycle donne : $\{\mathcal{V}_{0/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/0}\} = \{0\}$

$$\left\{\begin{matrix} 0 & V_{XA0/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} \omega_{X1/2} & 0 \\ \omega_{Y1/2} & 0 \\ \omega_{Z1/2} & 0 \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} \omega_{X2/3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_C + \left\{\begin{matrix} 0 & V_{XD3/0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_D = \left\{\begin{matrix} 0 \end{matrix}\right\}$$

En transportant les torseurs en B, on obtient donc le système d'équations :

$$\begin{aligned} \omega_{X1/2} + \omega_{X2/3} &= 0 \\ \omega_{Y1/2} &= 0 \\ \omega_{Z1/2} &= 0 \\ V_{XA0/1} + V_{XD3/0} &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système a deux équations triviales et aucune combinaison linéaire entre ses équations. Cela traduit le fait que le système est hyperstatique de degré 2 (H = 2).

Si on ajoute une inconnue sthénique, on retire une inconnue cinématique. On ajoute alors une mobilité ou une combinaison linéaire entre les équations (ou une équation triviale)

Règle générale :

En notant r_C le rang de la matrice cinématique (issue du système d'équations) le degré d'hyperstatisme est obtenu en faisant : $H = 6.\gamma - r_C$

3.3- Degré d'hyperstatisme d'une chaine ouverte

Pour une chaine ouverte on a : $M = M_I + M_U = I_C$ et: $\gamma = 0$ Donc : H =0

3.4 Réduction du degré d'hyperstatisme

Pour rendre le système isostatique sans modifier son fonctionnement, il faut :

On peut ajouter davantage d'inconnues cinématiques ce qui augmente les mobilités du mécanisme. Mais il ne faut pas augmenter le nombre de mobilités utiles.