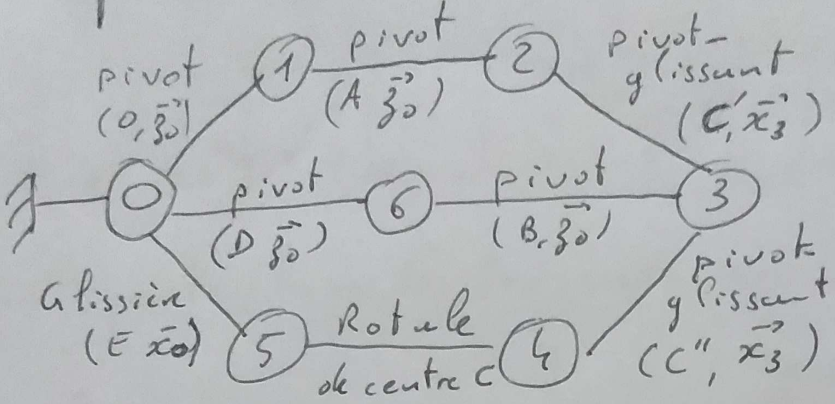
Variateur GUSA : Corrigé

① Graphe de structure du mécanisme



$N_p = 7 \quad N_L = 8 \quad \gamma = 2 \quad$ et $M = M_u + M_I = 2 + 1 = 3$

Mobilités utiles : → Transmission de la rotation de 1 à celle de 6

→ Reglage du rapport de vitesse variable par translation du support 5

Mobilité interne : → Rotation de 4 sur son axe ($C\vec{x}_3$)

② Nombre d'inconnues cinematiques :

$$I_c = \underbrace{4 \times 1}_{\text{pivot}} + \underbrace{1 \times 1}_{\text{Glissière}} + \underbrace{1 \times 3}_{\text{Rotule}} + \underbrace{2 \times 2}_{\text{pivot-glissant}} = 12$$

$$I_s = 4 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 3 + 2 \times 4 = 36$$

$$H = I_s + M - 6(N_p - 1) = 36 + 3 - 6(7-1)$$

ou

$$H = 6\gamma + M - I_c = 6 \times 2 + 3 - 12$$

$$\boxed{H = 3}$$

③ Écrivons la fermeture cinématique du cycle 0-6-3-4-5-0

$$\{\mathcal{V}_{0/6}\} + \{\mathcal{V}_{6/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/4}\} + \{\mathcal{V}_{4/5}\} + \{\mathcal{V}_{5/0}\} = \{0\}$$

$${}_{D}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z06} & 0 \end{Bmatrix}_{R} + {}_{B}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z63} & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x34} & V_{xC34} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x45} & 0 \\ \omega_{y45} & 0 \\ \omega_{z45} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{E}\begin{Bmatrix} 0 & V_{xE50} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = \{0\}$$

On transporte tous les torseurs en C dans le repère R_0

$${}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_5 \omega_{z06} \\ \omega_{z06} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \omega_{z63} \\ \omega_{z63} & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x34} & V_{xC34} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} +$$

$${}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x45} & 0 \\ \omega_{y45} & 0 \\ \omega_{z45} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & V_{xE50} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Soit $${}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_5 \omega_{z06} \\ \omega_{z06} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & -\lambda_3 \omega_{z63} \sin\varphi \\ 0 & \lambda_3 \omega_{z63} \cos\varphi \\ \omega_{z63} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x34} \cos\varphi & V_{xC34} \cdot \cos\varphi \\ \omega_{x34} \sin\varphi & V_{xC34} \cdot \sin\varphi \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$+ {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{x45} & 0 \\ \omega_{y45} & 0 \\ \omega_{z45} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & V_{xE50} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = {}_{C}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} \omega_{x34} \cos\varphi + \omega_{x45} = 0 \\ \omega_{x34} \sin\varphi + \omega_{y45} = 0 \\ \omega_{z06} + \omega_{z63} + \omega_{z45} = 0 \\ -\lambda_3 \omega_{z63} \sin\varphi + V_{xC34} \cos\varphi + V_{xE50} = 0 \\ -\lambda_5 \omega_{z06} + \lambda_3 \omega_{z63} \cos\varphi + V_{xC34} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a pour ce système une équation triviale et 5 équations indépendantes.

D'où le degré d'hyperstatisme du cycle $\underline{H_1 = 1}$

Si on rajoute dans la liaison de centre C entre 4 et 5 une translation suivant $\vec{z_0}$: V_{zC45}

La dernière equation du système n'est plus triviale (on obtient $V_{zC45} = 0$) est ~~est~~ independante des 5 autres.

Le cycle est alors isostatique.

Le torseur cinematique de la liaison est alors

$$\{\mathcal{V}_{4/5}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \omega_{x45} & 0 \\ \omega_{y45} & 0 \\ \omega_{z45} & V_{zC45} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Torseur cinematique d'une liaison lineaire annulaire d'axe $(C\vec{z_0})$.

Donc pour rendre le cycle isostatique, il faut en C une liaison linéaire annulaire d'axe $(C\vec{z_0})$

4) Ecrivons la fermeture cinematique du cycle

0-6-3-2-1-0 : $\{\mathcal{V}_{0/6}\} + \{\mathcal{V}_{6/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{0\}$

$$\{0\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z06} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z63} & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_C\begin{Bmatrix} \omega_{x32} & V_{xC32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z10} & 0 \end{Bmatrix}$$

or $\vec{AO} = -R_1\vec{x_1} = -R_1\cos\alpha\,\vec{x_0} - R_1\sin\alpha\,\vec{x_0}$ et $\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD}$

on transporte tous les torseurs en A dans R_0 on a :

$$\{0\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & -R_1\sin\alpha\,\omega_{z06} \\ 0 & (R_1\cos\alpha - L)\,\omega_{z06} \\ \omega_{z06} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2\omega_{z63} \\ \omega_{z63} & 0 \end{Bmatrix}_{R_3}$$

$$+ {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x32} & V_{xC32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z21} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & -R_1\sin\alpha\,\omega_{z10} \\ 0 & R_1\cos\alpha\,\omega_{z10} \\ \omega_{z10} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Soit encore :

$$ {}_A\begin{Bmatrix} 0&0\\0&0\\0&0\end{Bmatrix}_{R_0} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & -R_1\sin\alpha\,\omega_{z01}\\ 0 & (R_1\cos\alpha - L)\,\omega_{z01}\\ \omega_{z06} & 0\end{Bmatrix}_{R_0} + {}_A\begin{Bmatrix}0 & \lambda_2\,\omega_{z63}\sin\varphi\\0 & -\lambda_2\,\omega_{z63}\cos\varphi\\ \omega_{z63} & 0\end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$ + {}_A\begin{Bmatrix}\omega_{x32}\cos\varphi & V_{xC32}\cos\varphi\\ \omega_{x32}\sin\varphi & V_{xC32}\sin\varphi\\ 0&0\end{Bmatrix}_{R_0} + {}_A\begin{Bmatrix}0&0\\0&0\\ \omega_{z21}&0\end{Bmatrix}_{R_0} + {}_A\begin{Bmatrix}0 & -R_1\sin\alpha\,\omega_{z10}\\ 0 & R_1\cos\alpha\,\omega_{z10}\\ \omega_{z10} & 0\end{Bmatrix}_{R_0}$$

D'où le système d'équations

$$\begin{cases}
(1) & \omega_{x32}\cos\varphi = 0\\
(2) & \omega_{x32}\sin\varphi = 0\\
(3) & \omega_{z06}+\omega_{z63}+\omega_{z21}+\omega_{z10} = 0\\
(4) & -R_1\sin\alpha\,\omega_{z10} + \lambda_2\,\omega_{z63}\sin\varphi + V_{xC32}\cos\varphi - R_1\sin\alpha\,\omega_{z10} = 0\\
(5) & (R_1\cos\alpha - L)\,\omega_{z10} - \lambda_2\,\omega_{z63}\cos\varphi + V_{xC32}\sin\varphi + R_1\cos\alpha\,\omega_{z10} = 0\\
(6) & 0 = 0
\end{cases}$$

On a pour ce système, une équation triviale (6) et deux équations liées (1 et 2 : 2 = 1 $\tan\varphi$) et enfin 4 équations indépendantes (1 3 4 5 ou 2 3 4 5).

D'où le degré d'hyperstatisme du cycle $\boxed{H_2 = 2}$

Pour rendre le cycle isostatique il faut ajouter à la liaison de centre A :

- Une translation suivant $\vec{z}_0$: V_{zA21}, pour que l'équation 6 ne soit plus triviale.
- Une (ou deux) rotation suivant $\vec{y}_3$ pour que les équations 1 et 2 ne soient plus liées

$$\left.\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow \omega_{x32}\cos\varphi - \omega_{y21}\sin\varphi = 0\\
(2) &\Rightarrow \omega_{x32}\sin\varphi + \omega_{y21}\cos\varphi = 0
\end{aligned}\right\}\ \text{Équations liées}$$

Le torseur cinematique de la liaison est

alors $\{\mathcal{V}_{21}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{zA21} \end{matrix} \right\}_{A,\,R_3}$

Cependant cette liaison n'est pas normalisée.

On peut donc ajouter encore une rotation suivant $\vec{x_3}$

Les equations ① et ② deviennent alors :

① $\omega_{x32} \cos\varphi + \omega_{x21} \cos\varphi - \omega_{y21} \sin\varphi = 0$

② $\omega_{x32} \sin\varphi + \omega_{x21} \sin\varphi + \omega_{y21} \cos\varphi = 0$

(On remarquera que si on ne met que la rotation suivant $\vec{x_1}$ et pas suivant $\vec{y_1}$ les equations ① et ② restent liées)

Le torseur cinematique de la liaison est alors :

$\{\mathcal{V}_{21}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x21} & 0 \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & \omega_{zA21} \end{matrix} \right\}_{A,\,R_3}$ Torseur cinematique d'une liaison lineaire annulaire d'axe $(A, \vec{z})$

Donc pour rendre isostatique le cycle, il faut en A une liaison lineaire annulaire d'axe $(A\vec{z})$

<u>Remarque</u> en ajoutant 3 degrés de liberté à la liaison en A (alors qu'on avait $H_2 = 2$) on ajoute au système une mobilité. Cette mobilité est une rotation de 2 autour de son axe $(A, \vec{x_3})$.

Mais cette mobilité n'influe pas sur le reste du mécanisme. C'est donc une mobilite interne.