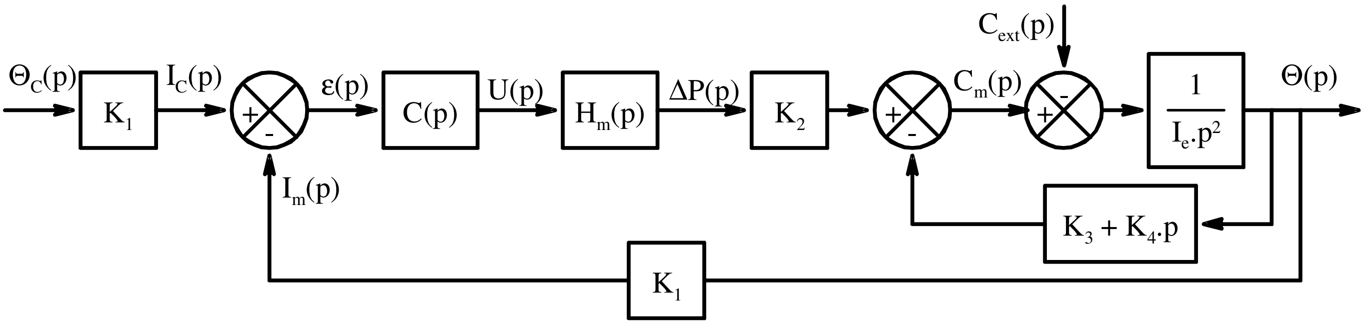
TD* : Bras artificiel à structure anthropomorphique : Corrigé

1- Modélisation simplifiée et correcteur proportionnel

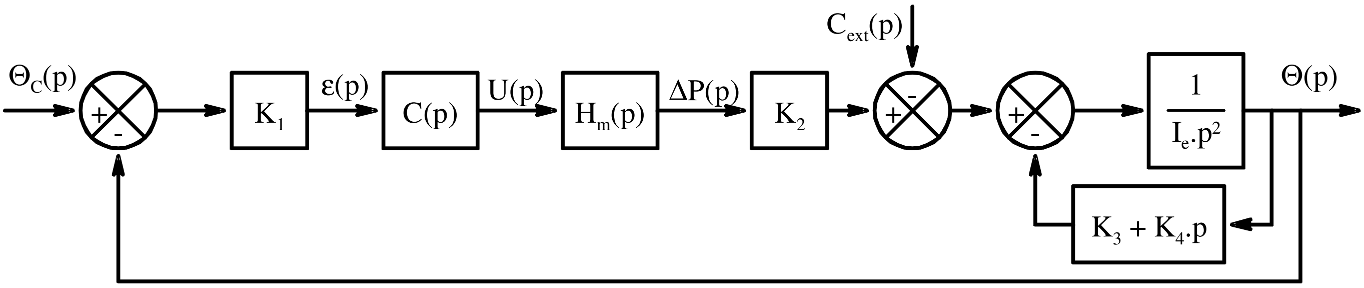
1.1- Avec des conditions initiales nulles les équations différentielles dans le domaine de Laplace donnent : $C_m(t) - C_{ext}(t) = I_e.\ddot{\theta}(t) \quad \Rightarrow \quad C_m(p) - C_{ext}(p) = I_e.p^2.\Theta(p)$

$C_m(t) = K_2.\delta p(t) - K_3.\theta(t) - K_4.\dot{\theta}(t) \quad \Rightarrow \quad C_m(p) = K_2.\Delta P(p) - (K_3 + K_4.p).\Theta(p)$

On en déduit le schéma bloc de l'asservissement :



1.2- Le schéma bloc ci-dessus est équivalent au schéma bloc à retour unitaire ci-dessous. On a pour cela passé les gains K_1 après le comparateur de gauche et permutés les deux comparateurs de droite.



Par identification avec le schéma bloc donné dans l'énoncé on en déduit :

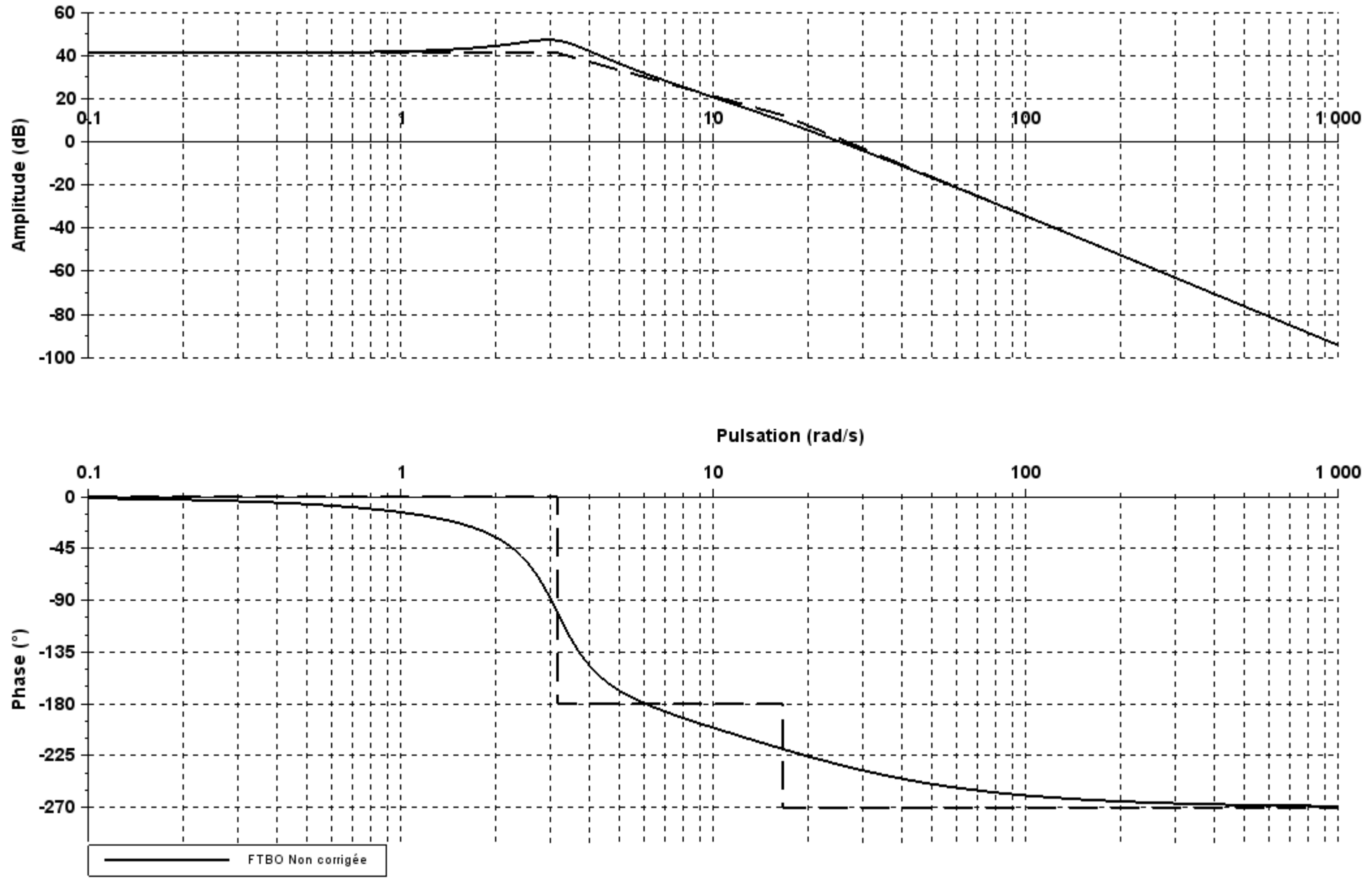
$$F_1(p) = K_1.K_2.H_m(p) = 573 \times 4 \times \frac{0,25}{1 + 0,06.p} = \frac{573}{1 + 0,06.p}$$

$$F_2(p) = \frac{\frac{1}{I_e.p^2}}{1 + \frac{K_3 + K_4.p}{I_e.p^2}} = \frac{1}{K_3 + K_4.p + I_e.p^2} = \frac{\frac{1}{K_3}}{1+\frac{K_4}{K_3}.p+\frac{I_e}{K_3}.p^2} = \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{0,8}{5}.p + \frac{0,5}{5}.p^2} = \frac{0,2}{1 + 0,16.p + 0,1.p^2}$$

Soit : $\mathbf{F_1(p) = \frac{K_{F1}}{1 + \tau.p}}$ avec : $\mathbf{K_{F1} = 573\ N.m.inc.rad^{-1}.V^{-1}}$ **et :** $\boldsymbol{\tau = 0,06\ s}$

Et : $\mathbf{F_2(p) = \dfrac{K_{F2}}{1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$ avec : $\mathbf{K_{F2} = 0,2\ rad.N^{-1}.m^{-1}}$, $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,1}} = 3,16\ rad.s^{-1}}$, $\boldsymbol{\xi = \frac{3,16}{2}.0,16 = 0,25}$

1.3- La FTBO non corrigée s'écrit donc : $H_{BONC}(p) = F_1(p).F_2(p)$. D'où pour les diagrammes de Bode deux pulsations de coupure de $\omega_{C1} = \omega_0 = 3,16\ rad.s^{-1}$ et $\omega_{C2} = 1/\tau = 16,7\ rad.s^{-1}$. Avec des pentes des asymptotes de gain de 0, – 40 et – 60 dB/dec. Un gain dynamique pour $\omega \to 0$ de : $20.\log 573\times0.2 = 41,2$ dB et pour $\omega = \omega_0 = 3,16\ rad.s^{-1} = 20.\log 573\times0.2 - 20.\log 0,25 = 53,2$ dB



1.4- La FTBO non corrigée s'écrit : $H_{BONC}(p) = \dfrac{114{,}6}{(1 + 0{,}16.p + 0{,}1.p^2).(1 + 0{,}06.p)}$ On en déduit à la pulsation $\omega_{0dB} = 8$ rad.s^{-1} son gain dynamique et sa phase :

☞ $\mathbf{G_{dBBONC}(6) = 20.\log 114{,}6 - 10.\log(1+(0{,}06\times 8)^2) - 10.\log((1-(8/3{,}16)^2)^2+4\times 0{,}25^2.(8/3{,}16)^2) = 25{,}4\ dB}$

☞ $\mathbf{\varphi_{BONC}(6) = -\arctan(0{,}06\times 8) - \arctan\left(\dfrac{2\times 0{,}25.(8/3.16)}{1-(8/3.16)^2}\right) - 180° = -192{,}5°}$

2- Choix d'un correcteur

2.1- La cahier des charges exige une erreur nulle en réponse à un échelon de consigne ainsi qu'à un échelon de perturbation en échelon. Cela impose qu'il y ait dans la FTBO un intégrateur placé en amont de la perturbation. Or la FTBO non corrigée est de classe 0. Donc il faut utiliser un correcteur avec un intégrateur.

Donc les correcteurs proportionnels et à avance de phase ne peuvent pas convenir.

Le cahier des charges impose une marge de phase de 45° à 8 rad.s^{-1}. Or la phase de la boucle ouverte est de – 192,5° à 8 rad.s^{-1}. Le correcteur doit donc avoir à 8 rad.s^{-1} une phase de : 45° – 180° + 192,5° = 57,5°. Or le correcteur intégral à une phase constante de –90° et le correcteur PI un phase variant de –90° à 0°.

Donc les correcteurs intégral et proportionnel intégral ne peuvent pas convenir.

2.2- Il faut, pour respecter les exigences de précision un intégrateur dans le correcteur, et un correcteur relevant la phase. On choisit donc une combinaison de deux correcteurs :

☞ **Un correcteur proportionnel intégral pour son intégrateur**

☞ **Un correcteur à avance de phase pour relever la phase à 8 rad.s^{-1}.**

3- Dimensionnement du correcteur

3.1- Le correcteur choisit est donc de la forme : $\mathbf{C(p) = K \,.\, C_1(p) \,.\, C_2(p)}$

Avec : $\mathbf{C_1(p) = \dfrac{1+ T_1.p}{p}}$ et : $\mathbf{C_2(p) = \dfrac{1 + c.T_2.p}{1 + T_2.p}}$

Afin de ne pas avoir de gain intégral du correcteur PI trop petit, on choisit la constante de temps T_1 de telle sorte qu'à 8 rad.s^{-1} la phase de $C_1(p)$ soit de – 20°. On a donc :

$-20° = -90° + \arctan(8.T_1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T_1 = \dfrac{\tan(90 - 20)}{8} = 0{,}343\ s}$

On a vu précédemment que le correcteur C(p) doit avoir une phase de + 57,5°. Sachant que $C_1(p)$ à une phase de – 20° $C_2(p)$ doit donc avoir une phase de : 57,5° + 20° = 77,5° à 8 rad.s^{-1}.

On choisit $C_2(p)$ de telle sorte que sa phase soit maximale à 8 rad.s^{-1}. $C_2(p)$ étant un premier ordre généralisé On a donc : $\mathbf{c = \dfrac{1 + \sin 77{,}5°}{1 - \sin 77{,}5°} = 83{,}4}$ et : $\mathbf{T_2 = \dfrac{1}{8.\sqrt{83{,}4}} = 0{,}014\ s}$

On a donc : $C(p) = K \,.\, \dfrac{1 + 0{,}343.p}{p} \,.\, \dfrac{1 + 83{,}4\times0{,}014\,.p}{1 + 0{,}014.p}$

Le gain dynamique de ce correcteur à 8 rad.s^{-1} est de :

$20.\log K - 20.\log 8 + 10.\log(1 + (8\times0{,}343)^2) + 10.\log 83{,}4 = 20.\log K + 10{,}5\ dB$

Or le gain dynamique de la FTBO non corrigée à 8 rad ;s^{-1} est de 25,4 dB. Donc pour avoir : ω_{0dB} = 8 rad.s^{-1} il faut que : $20.\log K + 10{,}5 = -25{,}4 \iff 20.\log K = -35{,}9$

$\iff \quad \mathbf{K = 10^{-35{,}9/20} = 0{,}016\ V.inc^{-1}.s^{-1}}$

D'où : $\mathbf{C(p) = 0{,}016 \,.\, \dfrac{1 + 0{,}343.p}{p} \,.\, \dfrac{1 + 1{,}17\,.p}{1 + 0{,}014.p}}$

3.2- Ce correcteur ayant un intégrateur (placé en amont de la perturbation) l'erreur due à un échelon de consigne ou de perturbation est nulle. Et l'erreur due à une rampe de pente v_0 est : $\varepsilon_T = \dfrac{v_0}{K_{BO}}$ où K_{BO} est le gain de la FTBO corrigée : $K_{BO} = 114{,}6\times0{,}016 = 1{,}83$ Soit pour une pente de : v_0 = 0,2 rad.s^{-1}

$\mathbf{\varepsilon_T = \dfrac{0{,}2}{1{,}83} = 0{,}109\ rad = 6{,}26°}$ **Le critère de précision $\varepsilon_T \leq 5°$ n'est donc pas vérifié**

3.3- On peut choisir un correcteur du type $C(p) = K \,.\, C_1(p) \,.\, C_3(p) \,.\, C_3(p)$

Avec : $C_1(p) = \dfrac{1+ T_1.p}{p}$ (le même que précédemment) et : $C_3(p) = \dfrac{1 + c.T_3.p}{1 + T_3.p}$

3.4- Ainsi la phase de $C_3(p)$ pourra être de $\dfrac{77{,}5}{2} = 38{,}75°$

Soit $\mathbf{c = \dfrac{1 + \sin 38{,}75°}{1 - \sin 38{,}75°} = 4{,}34}$ et : $\mathbf{T_3 = \dfrac{1}{8.\sqrt{4{,}34}} = 0{,}06\ s}$

Le gain dynamique de ce correcteur à 8 rad.s^{-1} est de :

$20.\log K - 20.\log 8 + 10.\log(1 + (8\times0{,}343)^2) + 20.\log 4{,}34 = 20.\log K + 4{,}0\ dB$

Il faut donc : $20.\log K + 4 = -25{,}4 \iff 20.\log K = -29{,}4 \iff$ $\mathbf{K=10^{-29{,}4/20}=0{,}034\ V.inc^{-1}.s^{-1}}$

D'où : $\mathbf{C(p) = 0{,}034 \,.\, \dfrac{1 + 0{,}343.p}{p} \,.\, \left(\dfrac{1 + 0{,}26.p}{1 + 0{,}06.p}\right)^2}$

3.5- L'erreur de trainage est alors de : $\mathbf{\varepsilon_T = \dfrac{0{,}2}{114{,}6\times0{,}034} = 0{,}0513\ rad = 2{,}9° \leq 5°}$ **. Donc l'ensemble des critères du cahier des charges sont vérifiés**