Démonstrations de cinétique

1- Notations pour les démonstrations

Soit un repère R ce repère est le repère dans lequel on applique le Principe Fondamental de la Dynamique ou le Théorème de l'Energie Cinétique. Il s'agit donc d'un repère galiléen.

Soit un solide S
- ☞ de masse M
- ☞ de centre de gravité G
- ☞ auquel on associe un repère R_S
- ☞ Ce solide est constitué de masses élémentaire dm aux points P. On a donc :

$$M = \iiint_S dm \qquad \iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

Soit un point A fixe dans le solide S.

Soit un point O fixe dans le solide S et dans le repère R

On note $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ la résultante cinématique (Vecteur rotation) du mouvement de S dans le repère R.

On note les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ dans le repère R_S liée à au solide S :

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_{OP} \\ y_{OP} \\ z_{OP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2- Résultante cinétique

Par définition la résultante cinétique est le vecteur : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Donc : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}.dm$

Or $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ sont liés au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.\iiint_S dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm \right]$

Or : $M = \iiint_S dm$ et $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{R_C(S/R)} = M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$

3- Moment cinétique

Par définition le moment cinétique au point A est le vecteur : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$

Selon les relations de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$ et Chasles : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}$

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

Or $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont liés solide S ou a son mouvement du par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \left[\iiint_S dm \right].\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm \right] \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

Or : $M = \iiint_S dm$ et $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

D'autre part : $\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_2.z_{AP} - \omega_3.y_{AP} \\ \omega_3.x_{AP} - \omega_1.z_{AP} \\ \omega_1.y_{AP} - \omega_2.x_{AP} \end{pmatrix}_{R_S}$

$$\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \omega_1.(y_{AP}^2+z_{AP}^2) - \omega_2.x_{AP}.y_{AP} - \omega_3.x_{AP}.z_{AP} \\ -\omega_1.x_{AP}.y_{AP} + \omega_2.(x_{AP}^2+z_{AP}^2) - \omega_3.y_{AP}.z_{AP} \\ -\omega_1.x_{AP}.z_{AP} - \omega_2.y_{AP}.z_{AP} + \omega_3.(x_{AP}^2+y_{AP}^2) \end{pmatrix}_{R_S}$$

Donc : $\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

d'où : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} .dm$

Or $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est lié au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc est indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \left[\iiint_S \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} .dm \right] . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

En posant : $\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} \iiint_S (y_{AP}^2 + z_{AP}^2).dm & \iiint_S -x_{AP}.y_{AP}.dm & \iiint_S -x_{AP}.z_{AP}.dm \\ \iiint_S -x_{AP}.y_{AP}.dm & \iiint_S (x_{AP}^2 + z_{AP}^2)\,.dm & \iiint_S -y_{AP}.z_{AP}.dm \\ \iiint_S -x_{AP}.z_{AP}.dm & \iiint_S -y_{AP}.z_{AP}.dm & \iiint_S (x_{AP}^2 + y_{AP}^2)\,.dm \end{pmatrix}_{R_S}$

On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{J_A(S)}}\,.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

Calcul au centre de gravité G ou en un point fixe O dans R

Dans le cas où on prend pour le point A, le point G centre de gravité ou O point fixe dans R, on a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{O\in S/R}} = \vec{0}$. On obtient donc :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = \overline{\overline{J_G(S)}}\,.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}} \quad \text{et:} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_O(S/R)} = \overline{\overline{J_O(S)}}\,.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

4- Théorème de Huygens généralisé

Quelque soit le vecteur $\overrightarrow{U}$ et le point A, on peut définir une rotation d'axe $(A, \overrightarrow{U})$ et de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overrightarrow{U}$ du solide S par rapport au repère R.

On a alors : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0}$ et donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overline{\overline{J_A(S)}}\,.\overrightarrow{U}}$

D'autre part de la relation de Varignon sur le torseur cinétique : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG}\wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

On obtient donc : $\overline{\overline{J_A(S)}}\,.\overrightarrow{U} = \overline{\overline{J_G(S)}}\,.\overrightarrow{U} + M.\overrightarrow{AG}\wedge.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

Or pour cette rotation d'axe $(A, \overrightarrow{U})$ et de vecteur $\overrightarrow{U}$: $\overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{AG}$

avec : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0}$

On a donc la relation de Huygens généralisées applicable quelque soit le vecteur $\overrightarrow{U}$:

$$\boldsymbol{\overline{\overline{J_A(S)}}\,.\overrightarrow{U} = \overline{\overline{J_G(S)}}\,.\overrightarrow{U} + M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{AG}}$$

On note les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère R_S : $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$. Avec : $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

On a alors : $M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} = M.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} c.\omega_2 - b.\omega_3 \\ a.\omega_3 - c.\omega_1 \\ b.\omega_1 - a.\omega_2 \end{pmatrix}_{R_S}$

ou : $M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} (b^2 + c^2).\omega_1 - a.b.\omega_2 - a.c.\omega_3 \\ - a.b.\omega_1 + (a^2 + c^2).\omega_2 - b.c.\omega_3 \\ - a.c.\omega_1 - b.c.\omega_2 + (a^2 + b^2).\omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

ou encore : $M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

On obtient donc : $\overline{\overline{J_A(S)}} .\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overline{\overline{J_G(S)}} .\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} .\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Cette relation étant vérifiées quelque soit le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ on en déduit :

$$\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{R_S} = \overline{\overline{J_G(S)}}_{R_S} + M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S}} \qquad \textbf{où :} \quad \mathbf{\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}}$$

5- Energie cinétique

Calcul par le comoment des torseurs cinétique et cinématique

Calculons le comoment du torseur cinétique et cinématique d'un solide S par rapport à un repère R.

Quelque soit le point A appartenant au solide S on a :

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \\ \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm .\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm.$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.(\overrightarrow{V_{P\in S/R}} + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}).dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm + \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm - \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm$$

or l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R est le réel :

$$E_C(S/R) = \iiint_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm$$

Donc l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R est le demi comoment des torseurs cinétique et cinématique de ce solide S dans son mouvement par rapport à R :

$$\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2} . \{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}}$$

On en déduit : $E_C(S/R) = \frac{1}{2} . M. \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} . \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}. \overline{\overline{J_A(S)}} . \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Calcul par le centre de gravité G

Au centre de gravité G les torseurs cinétique et cinématique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R, ont pour expression : $\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_G\left\{\begin{matrix} M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{matrix}\right\}$ et : $\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \end{matrix}\right\}$

D'où l'expression de l'énergie cinétique : $\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2}\,.\,M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}^{\,2} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

Calcul par un point fixe O dans R

En un point O fixe danss R les torseurs cinétique et cinématique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R, ont pour expression : $\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_O\left\{\begin{matrix} M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overline{\overline{J_O(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{matrix}\right\}$ et : $\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$

D'où l'expression de l'énergie cinétique : $\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overline{\overline{J_O(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

6- Résultante dynamique

Par définition la résultante dynamique est le vecteur : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{a_{P\in S/R}}.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Sachant que : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R$ et : $\overrightarrow{a_{G\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$ on a :

$$\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R$$

Or d'après la relation de Bore : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Or les point P et G sont fixes dans R_S donc $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$ donc : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Donc : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Soit : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.dm$

Or $\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ sont liés au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

D'où : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.\left[\iiint_S dm\right] + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm\right] + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm\right] \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Sachant que définition de la masse et du centre de gravité d'un solide S :

$$M = \iiint_S dm \qquad \text{et :} \qquad \iiint_S \overrightarrow{GP}\,.\,dm = \vec{0}$$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{R_D(S/R)} = M.\,\overrightarrow{a_{G\in S/R}}}$

7- Moment dynamique

Calcul au centre de gravité G

Par définition le moment dynamique en G est le vecteur : $\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{P\in S/R}}\,.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Sachant que : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R$ et : $\overrightarrow{a_{G\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$

on a : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R$

soit : $\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R .dm$

Or $\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ est lié au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

donc : $\iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm = \left[\int_S \overrightarrow{GP}.dm\right] \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ avec : $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R .dm}$ **(a)**

D'après la relation de Bore : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Or les point P et G sont fixes dans R_S donc $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$ donc : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Donc : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0}$ soit: $\mathbf{\iiint_S \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge (\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}).dm = \vec{0}}$ **(b)**

Des équations (a) et (b) on en déduit :

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \left[\overrightarrow{GP} \wedge \left(\frac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge (\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}})\right].dm$$

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R.dm = \left(\frac{d \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}.dm}{dt}\right)_R$$

Or en page 2 on a montré que $\iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}\,.dm = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)}$

On en déduit donc : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R}$

Calcul en un point A quelconque du solide S

D'après la relation de Varignon appliquée au torseur dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_D(S/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge M.\,\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{AG} \wedge M.\left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{AG} \wedge M.\left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R \wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,[\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}\,]}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

Or d'après la relation de Varignon appliquée au torseur cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}$$

Donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R}$ **(a)**

D'après la relation de Chasles : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AO}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = -\left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R$

Or le point O étant fixe dans R et les points A et G fixes sur S :

$\left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{V_{A/R}}$ et : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

Donc : $M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = -\,M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{A/R}} + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$ (a)

Soit : $\boldsymbol{M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = M.\,\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$ **(b)**

Des équations (a) et (b) on en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\,\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$

<u>Calcul en un point O fixe dans R</u>

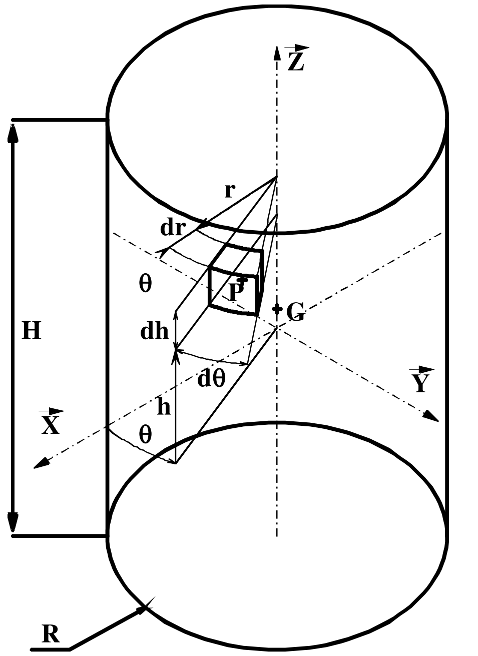
Si on applique au point O la relation précédente :

$$\overrightarrow{\delta_O(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\,\overrightarrow{V_{O/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

Or le point O est également fixe dans R. Donc : $\overrightarrow{V_{O/R}} = \vec{0}$

On en déduit donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_O(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O(S/R)}}{dt}\right)_R}$

8- Opérateur d'inertie d'un cylindre de révolution



Soit un cylindre homogène de révolution dont la masse volumique est ρ. Ce cylindre a un rayon R et une hauteur H. l'axe de révolution de ce cylindre est $(G, \overrightarrow{Z})$ où G est le centre de gravité.

Ce cylindre étant de révolution d'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ son opérateur d'inertie en G dans le repère du solide $R_S = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ est :

$$\overline{\overline{I_G(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

On décompose ce cylindre en une infinité de volumes élémentaires dv de centre P tel que $\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S}$. On a alors :

$$A = \iiint_S (y_{GP}^2 + z_{GP}^2).dm \quad \text{et :} \quad C = \iiint_S (x_{GP}^2 + y_{GP}^2).dm$$

On décompose ce cylindre en une infinité de volumes élémentaires dv de centre P, hauteur dh, dans un secteur angulaire dθ et de largeur dr.

la masse dm de ce volume élémentaire est alors : $dm = \rho.r.d\theta.dr.dh$

Et on a : $x_{GP} = r.\cos\theta$ $y_{GP} = r.\sin\theta$ $z_{GP} = h$

On a donc les moments d'inertie de ce cylindre :

$$A = \int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^2.\sin^2\theta + h^2).\rho.r.d\theta.dr.dh$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^3.\sin^2\theta + h^2.r).dh.d\theta.dr$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left[r^3.\sin^2\theta.h + \frac{h^3}{3}.r \right]_{-H/2}^{+-H/2}.d\theta.dr$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left(r^3.\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2.\theta}{2}\right).H + \frac{r.H^3}{12} \right).d\theta.dr$$

$$A = \frac{\rho.H}{12}.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left(12.r^3.\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2.\theta}{2}\right) + r.H^2 \right).d\theta.dr$$

$$A = \frac{\rho.H}{12}.\int_0^R \left[12.r^3.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2.\theta}{4}\right) + r.H^2.\theta \right]_0^{2.\pi}.dr$$

$$A = \frac{\rho.\pi.H}{12}.\int_0^R (12.r^3 + 2.r.H^2).dr$$

$$A = \frac{\rho.\pi.H}{12}.[3.r^4 + r^2.H^2]_0^R$$

$$A = \frac{\rho.\pi.R^2.H}{12}.(3.R^2 + H^2)$$

$$C = \int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta).\rho.r.d\theta.dr.dh$$

$$C = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} r^3.dh.d\theta.dr$$

$$C = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} [h.r^3]_{+H/2}^{-H/2}.d\theta.dr$$

$$C = \rho.H.\int_0^R [\theta.r^3]_0^{2.\pi}.dr$$

$$C = \rho.2.\pi.H.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$C = \rho.\pi.H.\frac{R^4}{2}$$

Sachant que la masse d'un cylindre de révolution de rayon R et hauteur H est : $M = \rho.\pi.R^2.H$, on obtient :

$$A = \frac{M.(3R^2 + H^2)}{12} \quad \text{et :} \quad C = \frac{M.R^2}{2}$$

Soit : $$\overline{\overline{\mathbf{I_G(S)}}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{12}}.\begin{pmatrix} \mathbf{3.R^2 + H^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3.R^2 + H^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6.R^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_S}}$$