Ouvre barrière Sinusmatic - Corrigé

1- Etude cinématique

1- Etude théorique

1.1- Relations entre les paramètres α, φ, θ et y

On a quatre paramètres pour ce mécanisme. Or son degré de mobilité est de un donc on a un seul paramètre indépendant. Il existe donc trois relations scalaires entre ces paramètres.

Ces trois relations scalaires sont obtenues par projection sur les axes du repère ($\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1}$) de la relation vectorielle de fermeture géométrique du cycle 1-2-3-4-1 : $\mathbf{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}}$

Soit : $\mathbf{-\,d_2.\overrightarrow{Y_1} + 2.a.\overrightarrow{Z_1} + d_2.\overrightarrow{Y_1} + 2.a.\overrightarrow{Z_1} + y.\overrightarrow{Y_3} - a.\overrightarrow{Y_4} - a.\overrightarrow{Z_4} = \vec{0}}$

Etant donné le paramétrage adopté : $\overrightarrow{Y_3} = \cos\theta.\overrightarrow{Y_2} + \sin\theta.\overrightarrow{Z_2}$

$\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{Y_1}$ et : $\overrightarrow{Z_2} = \cos\alpha.\overrightarrow{Z_1} + \sin\alpha.\overrightarrow{X_1}$

$\overrightarrow{Z_4} = \overrightarrow{Z_1}$ et : $\overrightarrow{Y_4} = \cos\varphi.\overrightarrow{Y_1} - \sin\varphi.\overrightarrow{X_1}$

On en déduit de l'équation vectorielle de fermeture géométrique que :

$$2.a.\overrightarrow{Z_1} + y.\cos\theta.\overrightarrow{Y_1} + y.\sin\theta.\cos\alpha.\overrightarrow{Z_1} + y.\sin\theta.\sin\alpha.\overrightarrow{X_1} - a.\cos\varphi.\overrightarrow{Y_1} + a.\sin\varphi.\overrightarrow{X_1} - a.\overrightarrow{Z_1} = \vec{0}$$

La projection sur les axes $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}$ et $\overrightarrow{Z_1}$ de cette équation vectorielle donne les trois équations :

$y.\sin\theta.\sin\alpha + a.\sin\varphi = 0$ $\quad$ $\mathbf{y.\sin\theta.\sin\alpha = -\,a.\sin\varphi}$ **(a)**

$y.\cos\theta - a.\cos\varphi = 0$ $\quad$ Soit : $\mathbf{y.\cos\theta = a.\cos\varphi}$ **(b)**

$2.a + y.\sin\theta.\cos\alpha - a = 0$ $\quad$ $\mathbf{y.\sin\theta.\cos\alpha = -\,a}$ **(c)**

☞ Par l'addition des 3 équations élevées au carré : $(a)^2 + (b)^2 + (c)^2$ on a : $\mathbf{y = a.\sqrt{2}}$ **(d)**

☞ Par division de la première équation par la dernière : (a) / (c) on a : $\mathbf{\tan\alpha = \sin\varphi}$ **(e)**

☞ Par substitution de y par $a.\sqrt{2}$ dans l'équation (b) on obtient : $\mathbf{\cos\theta = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}}$ **(f)**

1.2- Relations entre les dérivées des paramètres α, φ, θ et y

Par dérivation de la relation (e) par rapport au temps on obtient : $\dot{\alpha}.(1 + \tan^2\alpha) = \dot{\varphi}.\cos\varphi$

D'où : $\dot{\alpha} = \dot{\varphi}\dfrac{\cos\varphi}{1 + \tan^2\alpha}$ Or : $\tan\alpha = \sin\varphi$ On en déduit : $\mathbf{\dot{\alpha} = \dot{\varphi}\,.\,\dfrac{\cos\varphi}{1 + \sin^2\varphi}}$ **(g)**

Par dérivation de la relation (f) par rapport au temps on obtient : $-\,\dot{\theta}.\sin\theta = -\,\dot{\varphi}.\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$

D'où : $\theta = \dot{\varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}\,.\,\sin\theta}$ Soit : $\dot{\theta} = \dot{\varphi}\,.\,\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2.(1 - \cos^2\theta)}}$ Or : $\cos\theta = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}$

Donc : $-\,2.\cos^2\theta = -\cos^2\varphi = -\,1 + \sin^2\varphi$ D'où on en déduit : $\mathbf{\dot{\theta} = \dot{\varphi}\,.\,\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}}$ **(h)**

Par dérivation de la relation (g) par rapport au temps (φ étant constant) on obtient :

$$\ddot{\alpha} = \dot{\varphi}\,.\,\frac{-\,\dot{\varphi}.\sin\varphi.(1 + \sin^2\varphi) - 2.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin\varphi.\cos\varphi}{(1 + \sin^2\varphi)^2} = -\,\dot{\varphi}^2.\frac{\sin\varphi.(1 + \sin^2\varphi + 2.\cos^2\varphi)}{(1 + \sin^2\varphi)}$$

Soit finalement (car $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$) : $\boxed{\ddot{\alpha} = -\dot{\varphi}^2 . \dfrac{\sin\varphi.(2+\cos^2\varphi)}{(1+\sin^2\varphi)^2}}$ **(i)**

Par dérivation de la relation (h) par rapport au temps (φ étant constant) on obtient :

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi} . \frac{\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sqrt{1+\sin^2\varphi} - \dfrac{2.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin\varphi}{2.\sqrt{1+\sin^2\varphi}}.\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \dot{\varphi}^2 . \frac{\dot{\varphi}.\cos\varphi.(1+\sin^2\varphi) - \dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin^2\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

Donc : $\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 . \dfrac{\cos\varphi.(1+\sin^2\varphi - \sin^2\varphi)}{(1+\sin^2\varphi)^{3/2}}$ Soit finalement : $\boxed{\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 . \dfrac{\cos\varphi}{(1+\sin^2\varphi)^{3/2}}}$ **(j)**

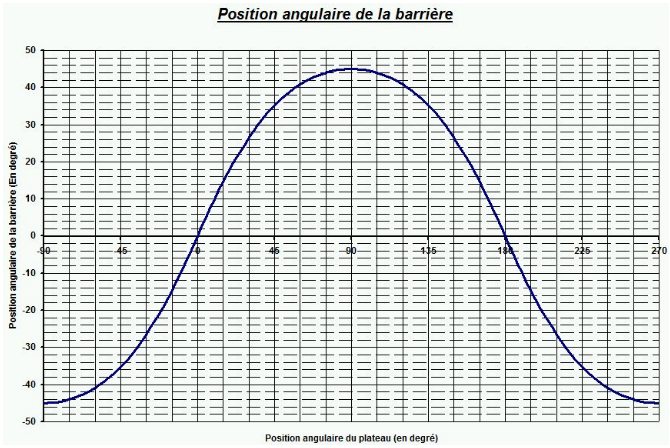
Applications numériques (Non demandé)

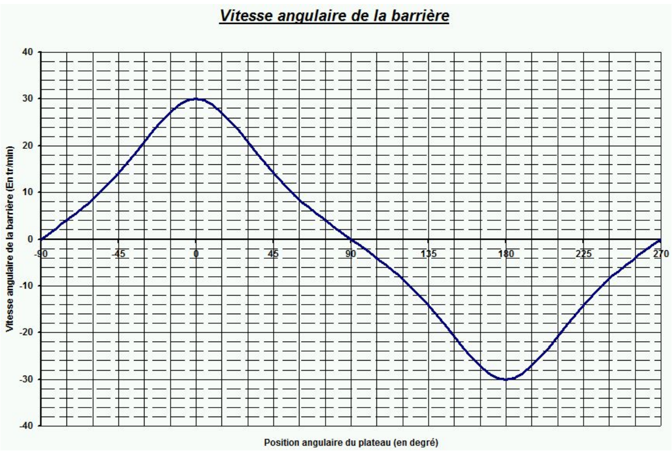
Pour la position, la vitesse et l'accélération de la barrière 2 (α, $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$) on obtient

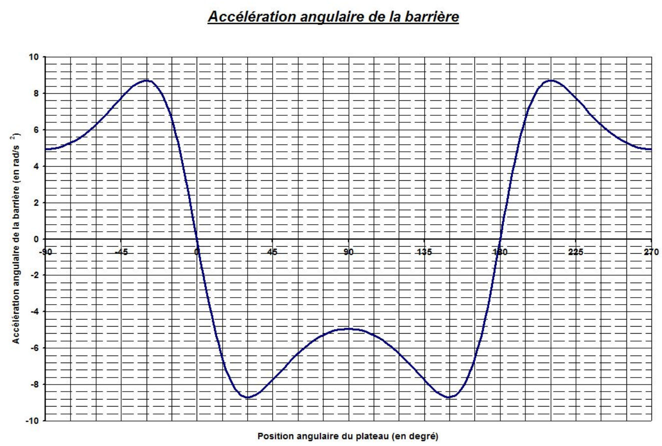
$$\mathbf{\alpha = Arctan\ (\sin\varphi)} \qquad \dot{\alpha} = \dot{\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{1+\sin^2\varphi}$$

$$\ddot{\alpha} = -\dot{\varphi}^2 . \frac{\sin\varphi.(2+\cos^2\varphi)}{(1+\sin^2\varphi)^2}$$

Avec $\dot{\varphi} = \dfrac{2.\pi.30}{60} = \pi$ rad/s permettent à l'aide d'un tableur d'obtenir les courbes suivantes :







1.3- Vecteurs vitesse des centres d'inertie

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{G_2B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

Or le point B de 2 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \vec{0}$

On a donc : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} = \left(\dfrac{\ell}{2.\sqrt{2}}.\overrightarrow{X_2} - y_{G2}.\overrightarrow{Y_2} - \dfrac{\ell}{2.\sqrt{2}}.\overrightarrow{Z_2}\right) \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_2}$

Soit finalement : $\boxed{\overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} = \dfrac{\ell}{2.\sqrt{2}}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{X_2} + \dfrac{\ell}{2.\sqrt{2}}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{Z_2}}$

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/1}} + \overrightarrow{G_3B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$

Puis par composition des vitesses : $\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{G_3B} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}})$

Or le point B de 2 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \vec{0}$

Et B est le centre de la liaison pivot entre 3 et 2. Donc : $\overrightarrow{V_{B\in 3/2}} = \vec{0}$

On a donc : $\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}} = -\,y_{G3}.\overrightarrow{Y_3} \wedge (\dot{\theta}.\overrightarrow{X_3} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{Y_2})$

Soit finalement : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}} = y_{G3}.(\dot{\theta}.\overrightarrow{Z_3} - \dot{\alpha}.\sin\theta.\overrightarrow{X_3})}$

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G4\in 4/1}} = \overrightarrow{V_{O\in 4/1}} + \overrightarrow{G_4O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/1}}$

Or le point O de 4 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{O\in 4/1}} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{V_{G4\in 4/1}} = -\,(y_{G4}.\overrightarrow{Y_4} + z_{G4}.\overrightarrow{Z_4}) \wedge \dot{\varphi}.\ \overrightarrow{Z_4}$

D'où : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{G4\in 4/1}} = -\,y_{G4}.\dot{\varphi}.\overrightarrow{X_4}}$

Du résultat précédent on a donc : $\overrightarrow{V_{G4\in 4/1}}.\overrightarrow{Z_1} = -\,y_{G4}.\dot{\varphi}.\ \overrightarrow{X_4}.\overrightarrow{Z_1}$ Or : $\overrightarrow{Z_1} = \overrightarrow{Z_4}$

On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{G4\in 4/1}}.\overrightarrow{Z_1} = 0}$

Du résultat précédent on a aussi : $\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}}.\overrightarrow{Z_1} = y_{G3}.(\dot{\theta}.\overrightarrow{Z_3}.\overrightarrow{Z_1} - \dot{\alpha}.\sin\theta.\overrightarrow{X_3}.\overrightarrow{Z_1})$

Or : $\overrightarrow{Z_3} = \cos\theta.\overrightarrow{Z_2} - \sin\theta.\overrightarrow{Y_2}$ $\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{Y_1}$ $\overrightarrow{Z_2} = \cos\alpha.\overrightarrow{Z_1} + \sin\alpha.\overrightarrow{Y_1}$

Et : $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{X_2}$ $\overrightarrow{X_2} = \cos\alpha.\overrightarrow{X_1} - \sin\alpha.\overrightarrow{Z_1}$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}}.\overrightarrow{Z_1} = y_{G3}.(\dot{\theta}.\cos\theta.\cos\alpha - \dot{\alpha}.\sin\theta.\sin\alpha)$

Par dérivation temporelle de l'équation (d) : $y = a.\sqrt{2} \Rightarrow \dot{y} = 0$ Et donc par dérivation temporelle de l'équation (c) : $y.\sin\theta.\cos\alpha = -\,a \Rightarrow \dot{\theta}.\cos\theta.\cos\alpha - \dot{\alpha}.\sin\theta.\sin\alpha = 0$

On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{V_{G3\in 3/1}}.\overrightarrow{Z_1} = 0}$

2- Analyse du mécanisme

2.1- Hyperstatisme du mécanisme

Le mécanisme a un degré de mobilité de : **M = 1**, Un nombre cyclomatique **γ = 1** et trois liaisons pivot et une pivot glissant donc un nombre d'inconnues cinématiques : $\mathbf{I_C = 3\times 1 + 2 = 5}$.

D'où le degré d'hyperstatisme du mécanisme : **H = 6×1 + 1 – 5 = 2**

2.2- Analyse de l'hyperstatisme

Par la fermeture cinématique du cycle 1-2-3-4-1 on a :

$$C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} + O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$$

Par transport au point B on obtient :

$$B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} + B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$$

Puis projection dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3}.\cos\theta & V_{34}^{Y_3}.\cos\theta \\ \omega_{34}^{Y_3}.\sin\theta & V_{34}^{Y_3}.\sin\theta \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$$

On a une équation triviale de la projection du moment sur $\overrightarrow{X_2}$ et une combinaison linéaire entre les deux équations de projection du moment sur $\overrightarrow{Y_2}$: $\mathbf{V_{34}^{Y_3}.\cos\theta = 0}$ et sur $\overrightarrow{Z_2}$: $\mathbf{V_{34}^{Y_3}.\sin\theta = 0}$

En ajoutant à la liaison de centre A deux rotations d'axe $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$ on obtient le torseur :

$$\underset{A}{}\begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} = \underset{B}{}\begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y.\omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & -y.\omega_{34}^{X_3} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} = \underset{B}{}\begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y.\omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3}.\cos\theta - \omega_{34}^{Z_3}.\sin\theta & V_{34}^{Y_3}.\cos\theta - V_{34}^{Z_3}.\sin\theta \\ \omega_{34}^{Y_3}.\sin\theta + \omega_{34}^{Z_3}.\cos\theta & V_{34}^{Y_3}.\sin\theta + V_{34}^{Z_3}.\cos\theta \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

On a alors la fermeture cinématique :

$$\underset{B}{}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + \underset{B}{}\begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + \underset{B}{}\begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y.\omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3}.\cos\theta - \omega_{34}^{Z_3}.\sin\theta & V_{34}^{Y_3}.\cos\theta - V_{34}^{Z_3}.\sin\theta \\ \omega_{34}^{Y_3}.\sin\theta + \omega_{34}^{Z_3}.\cos\theta & V_{34}^{Y_3}.\sin\theta + V_{34}^{Z_3}.\cos\theta \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + \underset{B}{}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$$

Les trois équations de la projection du moment deviennent alors : $\left|\begin{array}{c} y.\omega_{34}^{Z_3} = 0 \\ V_{34}^{Y_3}.\cos\theta - V_{34}^{Z_3}.\sin\theta = 0 \\ V_{34}^{Y_3}.\sin\theta + V_{34}^{Z_3}.\cos\theta = 0 \end{array}\right.$ qui sont trois équations indépendantes. Donc le système est isostatique car les équations de la résultante le sont également.

Ainsi en modifiant la liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{Y_3})$ par une liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \overrightarrow{Y_3})$ de torseur cinématique : $\underset{A}{}\begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ le système devient isostatique.

2.3- Hypothèses sur le torseur sthénique en A

Ajouter deux inconnues cinématiques pour la résultante en projection sur les axes $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$ de la liaison de centre A revient à annuler deux inconnues sthéniques pour le moment en projection sur les mêmes axes $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$.

Donc pour faire une étude dynamique complète, (détermination de toutes les inconnues des actions de liaison) on peut garder la liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{Y_3})$ et faire l'hypothèse que les projections des moments en A sur les axes $(A, \overrightarrow{X_3})$ et $(A, \overrightarrow{Z_3})$ de la liaison de entre 3 et 4 sont nuls.