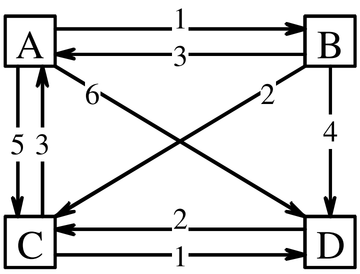
Algorithme du plus court chemin de Floyd-Warshall

Description du problème

On a un graphe pondéré, de N sommets, dont les arêtes sont les couts (distances) qui permettent d'aller d'un sommet S1 à un autre sommet S2. Ce cout peut être noté : $C_{S1 \to S2}$. On peut avoir un graphe non orienté : $C_{S1 \to S2} = C_{S2 \to S1}$ ou non orienté : $C_{S1 \to S2} \neq C_{S2 \to S1}$

Ce graphe peut par exemple être décrit par un dictionnaire de dictionnaires dont les clés (S1) sont les sommets du graphe et les valeurs, des dictionnaires dont les clés (S2) sont les sommets voisins du sommet S1 et les valeurs le cout pour aller du sommet S1 au sommet S2 : $C_{S1 \to S2}$.

Exemple on a le graphe ci-dessous :



Ce graphe peut alors est décrit par le dictionnaire :

**Graphe = {'A': {'B': 1, 'C': 5, 'D': 6},
'B': {'A': 3, 'C': 2, 'D': 4},
'C': {'A': 3, 'D':1},
'D': {'C': 2} }**

Objectif du problème

L'objectif est de déterminer le plus faible coût (la plus petite distance) permettant de passer d'un sommet de départ S_D à un sommet d'arrivée S_A . Soit en passant directement du sommet S_D au sommet S_A ; Soit en passant par un répertoire R_k de n_k sommets intermédiaires, cette liste pouvant être tous les sommets restant (sans S_D et S_A) ou une partie uniquement des sommets du graphe.

Il s'agit également de déterminer la liste L_i de ces sommets intermédiaires menant du sommet S_D au sommet S_A avec le plus faible cout (la plus petite distance).

En conclusion on peut dire qu'il s'agit de déterminer :

Le plus court chemin, et sa longueur, du sommet S_{Dep} au sommet S_{Arr}.

Remarque :

Si certains couts sont négatifs et que ces couts négatifs forment de cycles, alors il n'y a pas de solutions car en parcourant ces cycles à l'infini on peut arriver à une longueur du chemin égale à $-\infty$.

Pour éviter cela nous interdirons de passer 2 fois par un même sommet. Donc la longueur n_i de la liste L_i des sommets permettant d'aller d'un sommet S_{Dep} à un sommet S_{Arr} est limitée à N−2 : $n_i \leq N-2$.

Algorithme naïf

Une solution peut-être de calculer le cout de tous les chemins possibles pour aller du sommet S_{Dep} au sommet S_{Arr}. Or le nombre de chemins reliant deux sommets donnés d'un graphe complet à N sommets est de : $\sum_{k=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-k)!}$ Ce qui implique une complexité trop importante pour résoudre le problème avec un grand nombre de sommets.

Cette complexité étant liée à la taille des différents répertoires R de sommets intermédiaires qui peuvent être utilisés pour aller de S_{Dep} à S_{Arr}. Et donc à la taille N du graphe puisque que les répertoires intermédiaires R peuvent avoir une taille pouvant aller jusqu'à N−2 sommets.

Algorithme de programmation dynamique

L'idée est de se dire que pour aller d'un sommet S_{Dep} à un sommet S_{Arr} en passant par les sommets d'un répertoire R de n_R sommets, on va rechercher les plus courts chemins allant des N sommets S_{Dep} aux N sommets S_i du graphe en passant par les sommets d'un répertoire $(R-S_i)$ de n_{R-1} sommets.

Puis on retiendra à chaque fois la longueur minimale de ces chemins + la longueur minimale permettant d'aller des sommets S_i au sommet S_{Arr}. On commence avec un répertoire R vide puis on ajoute un à un au répertoire R les N sommets intermédiaires S_i du graphe. En calculant à chaque fois toutes les longueurs minimales des chemins entre les différents sommets du graphe en passant par les sommets du répertoire R des sommets intermédiaires.

On a N fois N^2 longueurs minimales à calculer (car on doit faire tous les couples (S_{Dep},S_{Arr}) du graphe). La complexité d'un tel algorithme est en N^3 au lieu d'être de l'ordre de N! .

Donc si on note $(L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$ la longueur minimale du sommet S_{Dep} au sommet S_{Arr} en passant par les sommets du répertoire R des sommets intermédiaires, alors on a :

∀ les sommets S_{Dep}, S_{Arr} et S_i du graphe : $(L_{min})^{R+S_i}_{S_{Dep}\to S_{Arr}} = \min\left((L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_{Arr}} , (L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_i} + (L_{min})^{R}_{S_i\to S_{Arr}} \right)$

Pour obtenir la longueur minimale du sommet S_{Dep} au sommet S_{Arr} il suffit alors de retenir la longueur $(L_{min})^{R_T}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$ où R_T est un répertoire incluant tous les sommets du graphe.

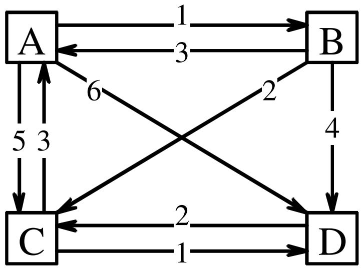
Pour obtenir le chemin il faut en plus de calculer la longueur minimale $(L_{min})^{R+S_i}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$ retenir le sommet suivant le sommet S_a (noté $(S_{suiv})^{R+S_i}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$) pour obtenir le chemin de longueur minimale.

Si : $(L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_{Arr}} \leq (L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_i} + (L_{min})^{R}_{S_i\to S_{Arr}}$ **alors :** $(S_{suiv})^{R+S_i}_{S_{Dep}\to S_{Arr}} = (S_{suiv})^{R}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$

Sinon : $(L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_i} + (L_{min})^{R}_{S_i\to S_{Arr}} < (L_{min})^{R}_{S_{Dep}\to S_{Arr}}$ **alors :** $(S_{suiv})^{R+S_i}_{S_a\to S_b} = (S_{suiv})^{R}_{S_{Dep}\to S_i}$

Pour obtenir le chemin minimal permettant d'obtenir la longueur minimale du sommet S_{Dep} au sommet S_{Arr} il suffit alors de faire la liste des sommets suivants jusqu'à arriver au sommet S_{Arr}.

Exemple on a le graphe ci-dessous :



R = ∅	A	B	C	D
A	0 A	1 B	5 C	6 D
B	3 A	0 B	2 C	4 D
C	3 A	∞ B	0 C	1 D
D	∞ A	∞ B	2 C	0 D

+A

(A)	A	B	C	D
A	0 A	1 B	5 C	6 D
B	3 A	0 B	2 C	4 D
C	3 A	4 A	0 C	1 D
D	∞ A	∞ B	2 C	0 D

+B

(A,B)	A	B	C	D
A	0 A	1 B	3 B	5 B
B	3 A	0 B	2 C	4 D
C	3 A	4 A	0 C	1 D
D	∞ A	∞ B	2 C	0 D

+C

(A,B,C)	A	B	C	D
A	0 A	1 B	3 B	4 B
B	3 A	0 B	2 C	3 C
C	3 A	4 A	0 C	1 D
D	5 C	6 C	2 C	0 D

+D

(A,B,C,D)	A	B	C	D
A	0 A	1 B	3 B	4 B
B	3 A	0 B	2 C	3 C
C	3 A	4 A	0 C	1 D
D	5 C	6 C	2 C	0 D

Exemples de résultats :

Longueur minimale et chemin du sommet A au sommet D : **4** **[A, B, C, D]**

Longueur minimale et chemin du sommet D au sommet B : **6** **[D, C, A, B]**