TD2 : Vibreur à béton

Mise en situation et description

Mise en situation

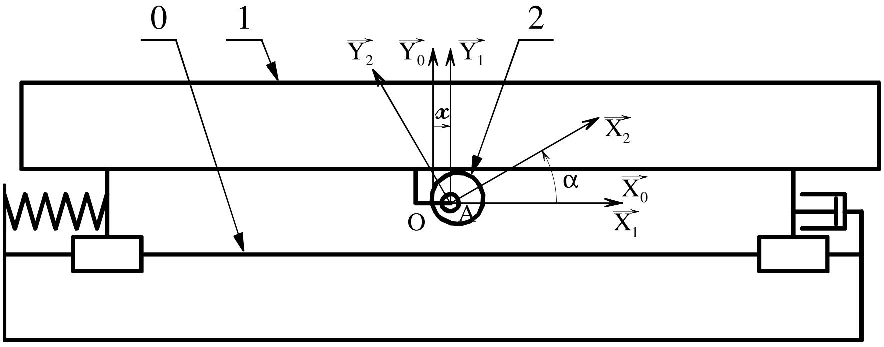
Pour la fabrication de pièces moulées en béton, le moule est posé sur le plateau d'une table vibrante. Les vibrations créées par cette table permettent une meilleure répartition du béton dans la moule et l'évacuation des bulles d'air emprisonnées lors de la coulée du béton.

Modélisation

Pour cela le plateau 1 de la table est lié au socle 0 de la table par des éléments élastiques. Ces éléments élastiques sont modélisés par une série de liaisons glissières d'axes horizontaux ($\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_0}$). Auxquels s'ajoute un ressort de raideur k et un amortisseur créant un frottement visqueux de coefficient b.

Si on appelle x la position de la table 1 par rapport au socle 0 : $\overrightarrow{OA} = x.\overrightarrow{X_1}$, alors :

- ☞ Le ressort exerce une force sur le plateau 1 modélisable par une force horizontale : $\overrightarrow{F_k} = -\,k.x.\overrightarrow{X_1}$
- ☞ L'amortisseur exerce une force sur le plateau 1 modélisable par une force horizontale : $\overrightarrow{F_b} = -\,b.\dot{x}.\overrightarrow{X_1}$



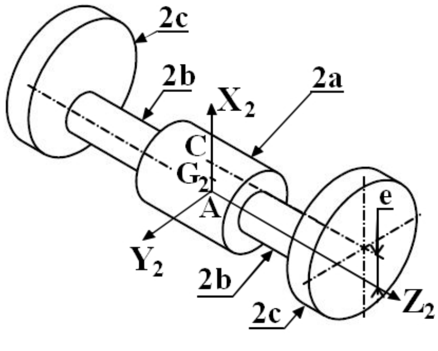
On note :

- ☞ $R_0 = (O,\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0})$ et $R_1 = (A,\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{Y_1},\overrightarrow{Z_1})$ les repères liés au socle 0 et au plateau 1 de la table. Etant donné la liaison glissière on a : $(\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0}) = (\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{Y_1},\overrightarrow{Z_1})$ avec juste : $\overrightarrow{OA} = x.\overrightarrow{X_1}$.
- ☞ $R_2 = (\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{Y_2},\overrightarrow{Z_2})$ le repère lié à ce rotor 2. Ce repère est tel que $\overrightarrow{Z_2} = \overrightarrow{Z_1} = \overrightarrow{Z_0}$. D'autre par on pose α la position angulaire du rotor 2 par rapport au plateau 1 : $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{X_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{Y_2},\overrightarrow{Y_1}})$.

Sous le plateau 1 on trouve en liaison pivot d'axe $(A,\overrightarrow{Z_1}) = (A,\overrightarrow{Z_2})$ un rotor excentrique 2 qui est entrainé en rotation à la vitesse constante : $\dot{\alpha} = \omega = C^{te}$ par un moteur asynchrone.

Le moteur asynchrone crée un couple électromagnétique s'appliquant sur le rotor 2 modélisé par un vecteur couple : $\overrightarrow{C_m} = c_m.\overrightarrow{Z_1}$ et un autre de vecteur $-\,\overrightarrow{C_m}$ s'appliquant sur le plateau 1.

Ce rotor 2 de masse m_2 et de centre de gravité G_2 , est assimilé à un corps homogène de masse volumique ρ qui peut se décomposé en cinq cylindres élémentaires



- ☞ Un cylindre 2a d'axe $(A,\overrightarrow{Z_2})$ et de masse m_{2a}.
- ☞ 2 cylindres 2b d'axe $(A,\overrightarrow{Z_2})$ et de masses m_{2b}.
- ☞ 2 cylindres 2c de masses m_{2c} et d'axe $(C,\overrightarrow{Z_2})$. L'axe $(C,\overrightarrow{Z_2})$ est excentré de e par rapport à l'axe $(A,\overrightarrow{Z_2})$: $\overrightarrow{AC} = e.\overrightarrow{X_2}$

Le centre de gravité G_2 de ce rotor est tel que : $\overrightarrow{AG_2} = a.\overrightarrow{X_2}$.

Objectifs du problème :

☞ Déterminer le couple moteur permettant de maintenir une vitesse de rotation du rotor 2 constante.

☞ Etablir l'équation différentielle en x régissant le mouvement du plateau 1 par rapport au socle 0.

Travail demandé

1- Géométrie des masses

1.1- Déterminer la masse m_2 du rotor 2 ainsi que la position a du centre de gravité G_2 ($\overrightarrow{AG_2} = a.\overrightarrow{X_2}$) en fonction de m_{2a}, m_{2b}, m_{2c} et e, l'excentration des 2 cylindres 2c. Faire l'application numérique pour : $m_{2a} = 1{,}76$ kg, $m_{2b} = 0{,}441$ kg, $m_{2c} = 1{,}23$ kg et e = 20 mm.

1.2- Etant donné la géométrie de ce rotor 2, donner la forme de la matrice d'inertie en G_2 : $I_{G_2}(2)$ exprimée dans le repère R_2. Justifier la réponse.

1.3- On donne (en kg.mm^2) les matrices d'inertie dans le repère R_2 :

☞ Au point A du cylindre 2a avec les 2 cylindres 2b : $J_A(2a+2\times 2b) = \begin{pmatrix} 7\,500 & 0 & 0 \\ 0 & 7\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}}$

☞ Au point C (tel que $\overrightarrow{AC} = e.\overrightarrow{X_2}$) des 2 cylindres 2c : $J_C(2\times 2c) = \begin{pmatrix} 43\,020 & 0 & 0 \\ 0 & 43\,020 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,070 \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}}$

En déduire la matrice d'inertie en G_2 du rotor 2 exprimée dans le repère R_2.

2- Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

2.1- On note A_2, B_2, et C_2 les moments d'inertie du solide 2 par rapport aux axes $(G_2, \overrightarrow{X_2})$, $(G_2, \overrightarrow{Y_2})$ et $(G_2, \overrightarrow{Z_2})$. Donner les éléments de réduction au point G_2 : de $\{\mathcal{C}(2/0)\}$: le torseur cinétique du rotor 2 dans son mouvement par rapport au socle 0. Ces éléments de réduction seront donnés en fonction des constantes du rotor 2, de $\dot{x}$ et ω ainsi que des vecteurs des repères R_1 et R_2.

2.2- En déduire, l'expression de $E_C(S/0)$ l'énergie cinétique du système S = {1,2} (constitué du plateau 1 et du rotor 2) dans son mouvement par rapport au socle 0 en fonction de m_1, m_2, $\dot{x}$, a, ω, α et C_2.

2.3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au plateau 1 avec son rotor 2, déterminer l'équation permettant d'obtenir l'expression du couple moteur C_m appliqué sur le rotor 2 et qui permet de maintenir une vitesse de rotation constante de ce rotor.

3- Théorème de la résultante dynamique

3.1- Déterminer dans le repère R_1, l'expression de la résultante dynamique du système S. Puis en appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{X_1}$ établir l'équation différentielle en x régissant le mouvement du plateau 1 par rapport au socle 0.

3.2- A partir de cette équation et celle établi à la question 2.3, déterminer, en fonction de m_2, g, a, α et $\ddot{x}$, l'expression du couple moteur C_m appliqué sur le rotor 2 et qui permet de maintenir une vitesse de rotation ω constante de ce rotor : $\omega = c^{te}$.

3.3- On pose : $f(t) = m_2.a.\omega^2.\cos \omega.t$. Passer l'équation différentielle obtenue à la question 3.1 dans le domaine de Laplace et en déduire la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{X(p)}{F(p)}$ où F(p) et X(p) sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $x(t)$. Vous donnerez, en fonction de m_1, m_2, b et k, les expressions des éléments caractéristiques de H(p) : Gain statique K_H, pulsation propre ω_0 et facteur d'amortissement ξ.

3.4- Proposer une démarche permettant de calculer, en fonction de K_H, ω_0, ξ, ω, et des constantes du système le couple moteur maximale, puis la puissance maximale du moteur.