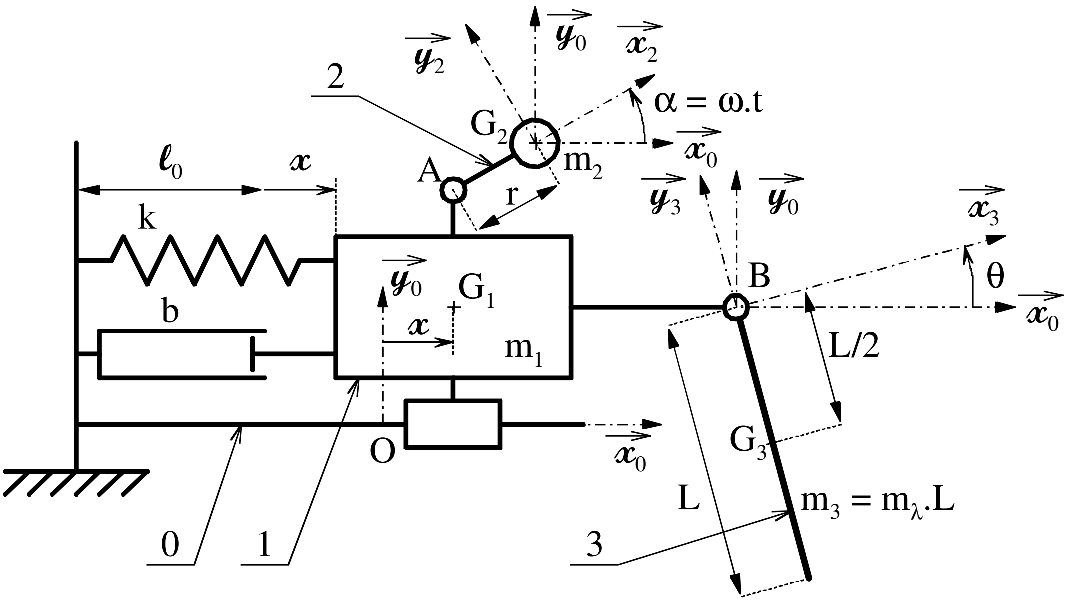
TD* : Chariot Vibrant

Description du système

Mise en situation

Un chariot en liaison glissière d'axe horizontale est soumis à des vibrations dues à un balourd qui est en rotation par rapport à ce chariot. Afin de réduire voir d'annuler ces vibrations on utilise un pendule en liaison pivot d'axe horizontal et perpendiculaire à l'axe de la liaison glissière. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur et la masse du pendule permettant d'annuler ces vibrations.

Modélisation du mécanisme On donne ci-dessous la modélisation du système :



☞ Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ lié au bâti 0 est un repère Galiléen. Le point O est fixe sur 0.

☞ Le chariot 1 de centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = x.\vec{x_0} + h.\vec{y_0}$ (où $h = C^{te}$) et de masse m_1 est en liaison glissière d'axe $(O, \vec{x_0})$ avec le bâti 0.

☞ Le balourd 2 est assimilé à une masse ponctuelle de masse m_2 située en G_2 tel que : $\overrightarrow{AG_2} = r.\vec{x_2}$.
$\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ est le repère lié au solide 2 et A est le centre de la liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_2})$ entre le chariot 1 et le balourd 2.

☞ Le pendule 3 est assimilé à une barre homogène de centre de gravité G_3 de longueur L et de masse linéique m_λ (en $kg.m^{-1}$). La masse du pendule 3 est donc de : $m_3 = m_\lambda.L$. Ce pendule 3 est lié au chariot 1 par une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z_0})$. On pose $\mathcal{R}_3 = (B, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ le repère lié au pendule 3.
B étant situé à l'extrémité de cette barre on a : $\overrightarrow{G_3B} = \frac{L}{2}.\vec{y_3}$.

Hypothèses et paramétrage

☞ x est la position linéaire du chariot 1 par rapport au bâti 0 lié à la liaison glissière d'axe $\vec{x_0}$.

☞ θ est l'angle lié à la liaison pivot d'axe $(B, \vec{z_0})$: $\theta = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_3}})$.

☞ α est l'angle lié à la liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_0})$: $\alpha = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_2}})$. Un moteur permet d'obtenir une vitesse de rotation ω constante de cette liaison pivot. On a : $\alpha = \omega.t$ où $\omega = \dot{\alpha}$ est une constante : $\dot{\omega} = \ddot{\alpha} = 0$

☞ Le stator du moteur (lié à 1) exerce sur le rotor (lié à 2) un couple : $\vec{C_m} = C_m(t).\vec{z_0}$

☞ L'accélération de pesanteur est $\vec{g} = -g.\vec{y_0}$ où $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

☞ Un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient b lient le chariot au bâti. Ce ressort et cet amortisseur exercent donc sur le chariot 1 deux forces : $\vec{F_k} = -k.x(t).\vec{x_0}$ et : $\vec{F_b} = -b.\dot{x}(t).\vec{x_0}$.

☞ Toutes les liaisons sont parfaites.

Travail demandé

A- Stratégie de résolution

1- Réaliser un graphe de structure du mécanisme sur lequel on fera apparaitre les actions autres que les actions transmises par les liaisons.

2- Quel est le degré d'hyperstatisme du mécanisme ? Justifier la réponse. Quel est le degré de mobilité du mécanisme ?

3- Outre les inconnues sthéniques des actions de liaisons, quelles sont les 3 inconnues (2 inconnues cinématiques et 1 inconnue sthénique) de ce système.

4- Proposer deux théorèmes permettant d'établir deux équations différentielles ne faisant intervenir que les deux inconnues cinématiques (et leur dérivées) et les constantes du mécanisme. On précisera les systèmes isolés les théorèmes et leur projection et éventuellement le point où est appliquée le théorème.

B- Mise en place des équations différentielles

5- En appliquant les théorèmes définis dans la stratégie de résolution, écrire les deux équations différentielles permettant de déterminer les inconnues cinématiques.

6- En linéarisant à l'ordre 1 ces équations pour de petits angles θ et en supposant que $\dot{\theta}^2 << \frac{3.g}{2.L}$, montrer qu'on obtient les 2 équations différentielles :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{3.g}{2.L}.\theta(t) = \frac{-3}{2.L}\ddot{x}(t) \quad \text{et :} \quad m_2.r.\omega^2.\cos(\omega.t) + \frac{3.m_3.g}{4}.\theta(t) = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_3}{4}\right).\ddot{x}(t) + b.x(t) + k.x(t)$$

C- Dynamique

7- Justifier que pour annuler les vibrations du chariot (pour avoir $x(t) = 0$ lorsque $t \to +\infty$) on doit avoir : $\theta(t) \to -B.\cos(\omega.t)$ pour $t \to +\infty$ et déterminer la constante B en fonction de m_2. m_3, r, ω et g.

8- A partir de la première équation différentielle, déterminer les expressions de la longueur L et de la masse linéique m_λ du pendule 3 permettant d'annuler les vibrations du chariot 1 tout en ayant une amplitude angulaire du pendule de $15° = \frac{\pi}{12}$ rad.

9- On donne les valeurs suivantes des constantes : **$\omega = 10$ rad.s^{-1}** , **$m_2 = 0{,}01$ kg** , **$r = 0{,}1$ m** et **$g = 10$ m.$^{-2}$**. Le pendule est un cylindre plein de révolution en acier dont la masse volumique est de : $\rho = 7\,800$ kg.m^{-3}. Faire les applications numériques pour vérifier la validité les différentes hypothèses et approximations faites pour résoudre le problème.