

DS N°4 Sujet A **PSI 2024 - 2025** **Corrigé**
Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles (D'après CCP-PSI-2015)

II.2.1 Mesure de l'écart entre les performances géométriques souhaitées et simulées

Question 1.

En s'appuyant sur la figure 5, la fermeture géométrique donne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

D'où, en tenant compte du paramétrage du sujet : $L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3 - L_2 \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$

Or on a pour $i=1,2,3$: $\vec{x}_i = \cos(\theta_i) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_i) \cdot \vec{y}_0$

D'où par projection : $\text{sur } \vec{x}_0 : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) - L_2 \cdot \cos(\theta_2) = 0$ (1.1)

$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) - L_2 \cdot \sin(\theta_2) = 0$ (1.2)

Pour obtenir la relation demandée, il faut isoler θ_2 puis le faire « disparaître » :

(a) : $L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) = L_2 \cdot \cos(\theta_2)$

(b) : $0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) = L_2 \cdot \sin(\theta_2)$

Ainsi la somme des carrés des relations (a) et (b) donne :

$$L_2^2 \cdot (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) = (L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2$$

D'où finalement : $L_2 = \sqrt{(L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2}$

Question 2.

$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE}$ avec $\vec{CE} = 2 \cdot \vec{CD} = -2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3$

D'où $\vec{AE} = L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_3) \\ L_1 \cdot \sin(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}_{(B_0)}$

Question 3.

Sur l'intervalle considéré :

- Sur la figure 6. (a) on relève que X_E varie de 100 mm, ce qui est supérieur à 50 mm la valeur exigée pour l'amplitude de déplacement (id 1.2.1.1) ;
- Sur la figure 6. (b) on relève que l'amplitude en Y est $Y_E \text{ max} - Y_E \text{ min} = -100,00 \text{ mm} + 100,25 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$ ce qui est inférieur à 0,5 mm la valeur maximale admissible par l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2) ;
- Sur la figure 7.(b) on relève le taux de variation $-2\% < \frac{dY_E}{dX_E} \leq 2\%$ ce qui vérifie l'exigence de mouvement rectiligne (id 1.2.1.2).

Ainsi le déplacement du point E est compatibles avec les exigences (id 1.2.1.1) et (id 1.2.1.2) sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm].

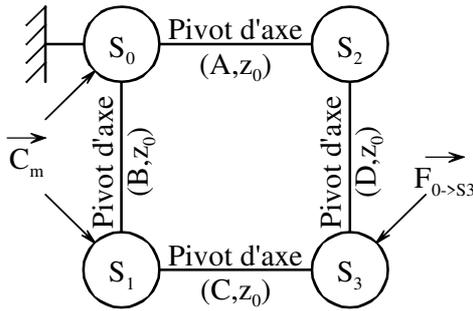
Question 4.

Pour vérifier l'exigence sur l'intervalle [-60 mm, 40 mm], on propose d'exploiter les valeurs visibles sur le zoom donné figure 8(b) pour tracer une courbe avec un tableur. Le coefficient de corrélation de la régression linéaire devra être supérieur à 0,99 pour vérifier l'exigence.

II.2.2 Mesure de l'écart entre les performances statiques souhaitées et simulées

Question 5.

a- Graphe de structure du mécanisme



b- Isolement de S2

Le problème étant plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ avec que des liaisons pivot d'axe \vec{z}_0 , Les actions extérieures appliquées sur S2 sont :

- ☞ Une force $F_{S0 \rightarrow S2}$ appliquée en A
- ☞ Une force $F_{S3 \rightarrow S2}$ appliquée en D

Ces 2 forces sont donc directement opposées. Elles ont donc même support : $(AD) = (D, \vec{x}_2)$.

Donc l'action de S2 sur S3 est une force de support (D, \vec{x}_2) : Un glisseur d'axe (D, \vec{x}_2) .

c- Isolement de S3

Les actions extérieures appliquées sur S3 sont :

- ☞ Une force $F_{S2 \rightarrow S3}$ appliquée en D de support (D, \vec{x}_2) (1 inconnue)
- ☞ Une action de S1 sur S3 due à la liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) (5 inconnues)
- ☞ L'action de l'opérateur sur S3 : Une force $F_{o \rightarrow S3} = F \cdot \vec{x}_0$ appliquée en E (0 inconnue)

Le moment par rapport à l'axe (C, \vec{z}_0) de l'action de S1 sur S3 étant nul, on obtient l'expression de l'action de S2 sur S3 en écrivant **le théorème du moment dynamique au point C projeté sur l'axe \vec{z}_0** .

c- Isolement de $\{S1, S3\}$

Les actions extérieures appliquées sur $\{S1, S3\}$ sont :

- ☞ L'action mécanique du moteur sur S1 : le couple moteur $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$ (1 inconnue)
- ☞ Une action de S0 sur S1 due à la liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) (5 inconnues)
- ☞ L'action de l'opérateur sur S3 : Une force $F_{o \rightarrow S3} = F \cdot \vec{x}_0$ appliquée en E (0 inconnue)
- ☞ Une force $F_{S2 \rightarrow S3}$ appliquée en D de support (D, \vec{x}_2) (0 inconnue)

Le moment par rapport à l'axe (B, \vec{z}_0) de l'action de S0 sur S1 étant nul, on obtient l'expression du couple moteur C_m en écrivant **le théorème du moment dynamique au point B projeté sur l'axe \vec{z}_0** .

Question 6.

L'exigence (id 1.3.2.2) impose d'avoir le ratio couple/effort constant à +/-1%.

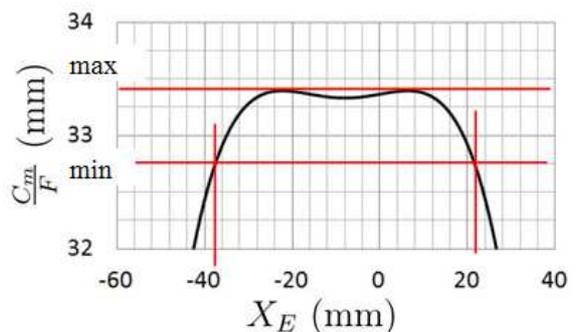
Le zoom de la figure 9(b) donne $\left(\frac{C}{F}\right)_{\max} = 33,4 \text{ mm}$

On doit donc avoir $\left(\frac{C}{F}\right)_{\min} = \left(\frac{C}{F}\right)_{\max} - 2\% = 33,4 \times 0,98 = 32,7 \text{ mm}$.

Cette condition est vérifiée pour X_E dans l'intervalle $[-38 \text{ mm}, +22 \text{ mm}]$ (voir construction sur la figure 9.b ci-contre).

Alors la course est de 60 mm et supérieure aux 50 mm exigés par l'exigence amplitude de déplacement (id 1.2.1.1).

De plus, cet intervalle étant compris dans l'intervalle $[-60 \text{ mm}, +40 \text{ mm}]$, les exigences déjà vérifiées sur cet intervalle restent valables.



III.2 Modélisation de l'interface esclave

Question 7.

a- Etant donné les liaisons pivot d'axe \vec{z}_0 entre les solides S_0, S_1, S_2 et S_3 , et le paramétrage angulaire associé à ces liaisons, on a : $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{01} \cdot \vec{z}_0$, $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_{12} \cdot \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}_{23} \cdot \vec{z}_0$.

Donc par composition des vitesses on a : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = (\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_{01}) \cdot \vec{z}_0$

b- Etant donné les liaisons pivot d'axe \vec{z}_0 entre les solides S_0, S_4, S_5 et S_3 , et le paramétrage angulaire associé à ces liaisons, on a : $\vec{\Omega}_{4/0} = \dot{\theta}_{04} \cdot \vec{y}_0$, $\vec{\Omega}_{5/4} = \dot{\theta}_{45} \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{\Omega}_{3/5} = \dot{\theta}_{53} \cdot \vec{y}_0$.

Donc par composition des vitesses on a : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/5} + \vec{\Omega}_{5/4} + \vec{\Omega}_{4/0} = (\dot{\theta}_{53} + \dot{\theta}_{45} + \dot{\theta}_{04}) \cdot \vec{y}_0$

c- On a donc : $(\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_{01}) \cdot \vec{z}_0 = (\dot{\theta}_{53} + \dot{\theta}_{45} + \dot{\theta}_{04}) \cdot \vec{y}_0$ soit par projection sur \vec{z}_0 de cette équation on obtient : $\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_{01} = 0$. Par conséquent : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0}$.

D'où le mouvement de S_3 par rapport à S_0 est une translation.

Question 8.

a- Etant donné la liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) entre les solides S_2 et S_3 on a :

$$\vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{V}_{C \in 2/0} \quad \text{Soit d'après la relation de Varignon : } \vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{V}_{B \in 2/0} + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

Etant donné la liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) entre les solides S_1 et S_2 on a :

$$\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{B \in 1/0} \quad \text{Soit d'après la relation de Varignon : } \vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

Etant donné la liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) entre les solides S_0 et S_1 on a : $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{0}$

On obtient donc : $\vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = -L_1 \cdot \vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}_{01} \cdot \vec{z}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{12}) \cdot \vec{z}_2$

Donc : $\vec{V}_{C \in 3/0} = \lambda_1 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{y}_2$ Avec : $\lambda_1 = L_1 \cdot \dot{\theta}_{01}$ et : $\lambda_2 = L_2 \cdot (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{12})$

b- Etant donné la liaison pivot d'axe (F, \vec{y}_0) entre les solides S_5 et S_3 on a :

$$\vec{V}_{F \in 3/0} = \vec{V}_{F \in 5/0} \quad \text{Soit d'après la relation de Varignon : } \vec{V}_{F \in 3/0} = \vec{V}_{E \in 5/0} + \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{5/0}$$

Etant donné la liaison pivot d'axe (E, \vec{y}_0) entre les solides S_4 et S_5 on a :

$$\vec{V}_{E \in 5/0} = \vec{V}_{E \in 4/0} \quad \text{Soit d'après la relation de Varignon : } \vec{V}_{E \in 5/0} = \vec{V}_{D \in 4/0} + \vec{ED} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}$$

Etant donné la liaison pivot d'axe (D, \vec{y}_0) entre les solides S_0 et S_4 on a : $\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{0}$

On obtient donc : $\vec{V}_{F \in 3/0} = \vec{ED} \wedge \vec{\Omega}_{4/0} + \vec{FE} \wedge \vec{\Omega}_{5/0} = -L_4 \cdot \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_{04} \cdot \vec{y}_4 - L_5 \cdot \vec{x}_5 \wedge (\dot{\theta}_{04} + \dot{\theta}_{45}) \cdot \vec{y}_5$

Donc : $\vec{V}_{F \in 3/0} = \lambda_4 \cdot \vec{z}_4 + \lambda_5 \cdot \vec{z}_5$ Avec : $\lambda_4 = -L_4 \cdot \dot{\theta}_{04}$ et : $\lambda_5 = -L_5 \cdot (\dot{\theta}_{04} + \dot{\theta}_{45})$

c- On sait que : \vec{y}_1 et \vec{y}_2 sont dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) donc $\vec{V}_{C \in 3/0} \cdot \vec{z}_0 = 0$

De même : \vec{z}_4 et \vec{z}_5 sont dans le plan (\vec{x}_0, \vec{z}_0) donc $\vec{V}_{F \in 3/0} \cdot \vec{y}_0 = 0$

Enfin, sachant que le mouvement de S_3 par rapport à S_0 est une translation on a : $\vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{V}_{F \in 3/0}$

Soit $\vec{V}_{C \in 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{V}_{F \in 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{V}_{C \in 3/0} \cdot \vec{y}_0 = \vec{V}_{F \in 3/0} \cdot \vec{y}_0$. Donc $\vec{V}_{C \in 3/0}$ et $\vec{V}_{F \in 3/0}$ sont colinéaire à \vec{x}_0 .

D'où le mouvement de S_3 par rapport à S_0 est une translation rectiligne de direction \vec{x}_0 .

Question 9.

a- le mouvement de S_3 par rapport à S_0 est une translation rectiligne de direction \vec{x}_0 , le degré de mobilité est de $M = 1$ (Il n'y a pas de mobilité internes)

b- Le degré d'hyperstatisme est donc de :

Par une approche sthénique : $\mathbf{H} = \mathbf{I}_S + \mathbf{M} - 6 \cdot (\mathbf{N}_P - 1) = 6 \times 5 + 1 - 6 \cdot (6 - 1) = 1$

Par une approche cinématique : $\mathbf{H} = 6 \cdot \gamma + \mathbf{M} - \mathbf{I}_C = 6 \times 1 + 1 - 6 \times 1 = 1$

c- La fermeture cinématique du cycle du mécanisme nous donne :

$$\{\mathbf{v}_{3/2}\} + \{\mathbf{v}_{2/1}\} + \{\mathbf{v}_{1/0}\} = \{\mathbf{v}_{3/5}\} + \{\mathbf{v}_{5/4}\} + \{\mathbf{v}_{4/0}\}$$

$$C \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 = F \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{35}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + E \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{54}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + D \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{40}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0$$

Sans même transporter tous ces torseurs en un même point, on obtient les trois équations de la résultante de cette fermeture cinématique :

$$\begin{array}{l} / \vec{x}_0 \\ / \vec{y}_0 \\ / \vec{z}_0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 = 0 \\ \omega_{32}^z + \omega_{21}^z + \omega_{10}^z = 0 \\ \omega_{35}^y + \omega_{54}^y + \omega_{40}^y = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Le degré d'hyperstatisme correspond donc à l'équation triviale} \\ \text{de la projection de l'équation de la résultante sur } \vec{x}_0 \end{array}$$

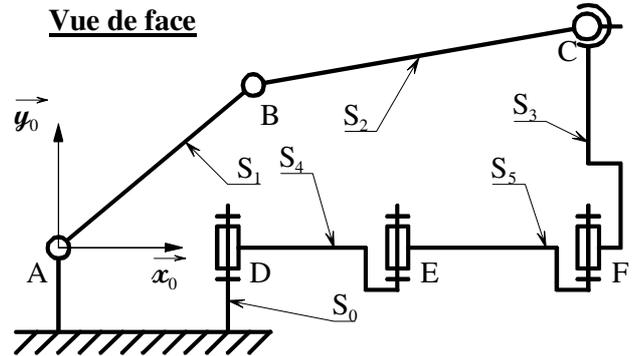
Pour supprimer ce degré d'hyperstatisme il suffit donc d'ajouter à une seule des six liaisons pivot une rotation suivant l'axe \vec{x}_0 .

En le faisant sur la liaison en C on obtient alors le torseur cinématique de cette nouvelle liaison :

$$\{v_{3/2}\} = C \begin{Bmatrix} x \\ \omega_{32}^z & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_3$$

Torseur d'une liaison sphérique à doigt d'axe
(C, \vec{y}_0) : Normale du plan de contact (C, \vec{z}_0) et
 d'axe du doigt (C, \vec{x}_0)

Le schéma cinématique du mécanisme est alors :



Remarque : La fermeture cinématique du cycle écrite en C donne :

$$C \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{32}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + C \begin{Bmatrix} 0 & L_2 \cdot \omega_{21}^z \cdot \sin(\theta_{01} + \theta_{12}) \\ 0 & L_2 \cdot \omega_{21}^z \cdot \cos(\theta_{01} + \theta_{12}) \\ \omega_{21}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + C \begin{Bmatrix} 0 & L_2 \cdot \omega_{10}^z \cdot \sin(\theta_{01} + \theta_{12}) + L_1 \cdot \omega_{10}^z \cdot \sin \theta_{01} \\ 0 & L_2 \cdot \omega_{10}^z \cdot \cos(\theta_{01} + \theta_{12}) + L_1 \cdot \omega_{10}^z \cdot \cos \theta_{01} \\ \omega_{10}^z & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 =$$

$$C \begin{Bmatrix} 0 & d \cdot \omega_{35}^y \\ \omega_{35}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + C \begin{Bmatrix} 0 & d \cdot \omega_{54}^y - L_5 \cdot \omega_{54}^y \cdot \sin(\theta_{04} + \theta_{45}) \\ \omega_{54}^y & 0 \\ 0 & -L_5 \cdot \omega_{54}^y \cdot \cos(\theta_{04} + \theta_{45}) \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0 + C \begin{Bmatrix} 0 & d \cdot \omega_{40}^y - L_5 \cdot \omega_{40}^y \cdot \sin(\theta_{04} + \theta_{45}) - L_5 \cdot \omega_{40}^y \cdot \sin \theta_{04} \\ \omega_{40}^y & 0 \\ 0 & -L_5 \cdot \omega_{40}^y \cdot \cos(\theta_{04} + \theta_{45}) - L_5 \cdot \omega_{40}^y \cdot \cos \theta_{04} \end{Bmatrix} \mathcal{B}_0$$

On retrouve bien une seule équation triviale (Projection de la résultante sur \vec{x}_0)

Question 10.

a- Pour le système S des pièces en mouvement, seuls ne sont pas négligées les inerties du solide S₃ (de masse M₃ et en translation) et des pièces du motoréducteur (d'inertie équivalente I₁ ramenée sur l'axe de sortie (A, \vec{z}_0)). On en déduit l'énergie cinétique du système S :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot V_{C \in S_3/S_0}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \Omega_{1/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot \dot{x}_S^2 + \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \dot{\theta}_{01}^2 \quad \text{Or : } \dot{\theta}_{01} = \alpha \cdot \dot{x}_S$$

Donc :
$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot (M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) \cdot \dot{x}_S^2$$

b- Les actions extérieures s'appliquant sur S sont les actions de liaison avec le bâti et le couple moteur \vec{C}_m appliqué sur le solide S₁. D'autre part les frottements visqueux de l'ensemble des pièces en mouvement se ramènent sur l'axe de sortie du moto réducteur à un coefficient de frottement f.

On a donc :
$$\sum P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \sum P(\text{Int} \rightarrow S/0) = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_{1/0} - f \cdot \dot{\theta}_{01} \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{1/0}$$

Soit : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \dot{\theta}_{01} - f \cdot \dot{\theta}_{01}^2$ Or : $\dot{\theta}_{01} = \alpha \cdot \dot{x}_S$

Donc : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = C_m \cdot \alpha \cdot \dot{x}_S - f \cdot \alpha^2 \cdot \dot{x}_S^2$

c- L'application du théorème de l'énergie cinétique au système S dans son mouvement par rapport à S_0 donne donc : $\frac{d E_C(S/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0)$

Soit : $(M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) \cdot \dot{x}_S \cdot \ddot{x}_S = C_m \cdot \alpha \cdot \dot{x}_S - f \cdot \alpha^2 \cdot \dot{x}_S^2 \iff (M_3 + I_1 \cdot \alpha^2) \cdot \ddot{x}_S + f \cdot \alpha^2 \cdot \dot{x}_S = C_m \cdot \alpha$

On obtient donc : $m_S \cdot \ddot{x}_S + b_S \cdot \dot{x}_S = C_m \cdot \alpha$ Avec : $m_S = M_3 + I_1 \cdot \alpha^2$ et : $b_S = f \cdot \alpha^2$

Question 11.

Les conditions étant nulles l'équation liant les paramètres devient dans le domaine de Laplace :

$$m_S \cdot p^2 \cdot X_S(p) + b_S \cdot p \cdot X_S(p) = C_m(p) \cdot \alpha$$

D'où la fonction de transfert modélisant le comportement dynamique du manipulateur esclave :

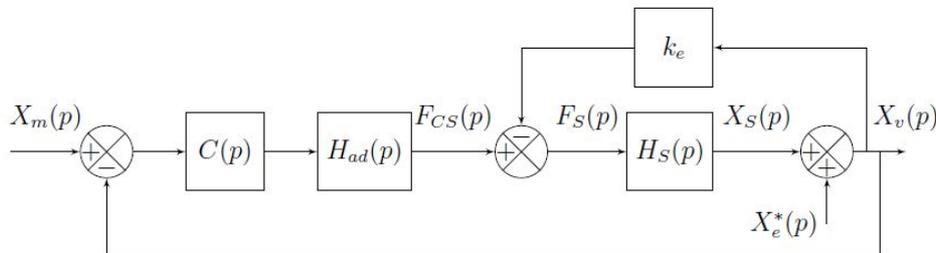
$$H(p) = \frac{X_S(p)}{C_m(p)} = \frac{\alpha}{p \cdot [m_S \cdot p + b_S]} \quad \text{Soit sous sa forme canonique :} \quad H(p) = \frac{\frac{\alpha}{b_S}}{p \cdot \left(1 + \frac{m_S}{b_S} \cdot p\right)}$$

Application numériques : $H(p) = \frac{30}{p \cdot \left(1 + \frac{0,1 + 5,7 \cdot 10^{-5} \cdot 30^2}{30^2 \times 1,6 \cdot 10^{-3}} \cdot p\right)}$ $H(p) = \frac{20,8}{p \cdot (1 + 0,105 \cdot p)} \text{ N}^{-1}$

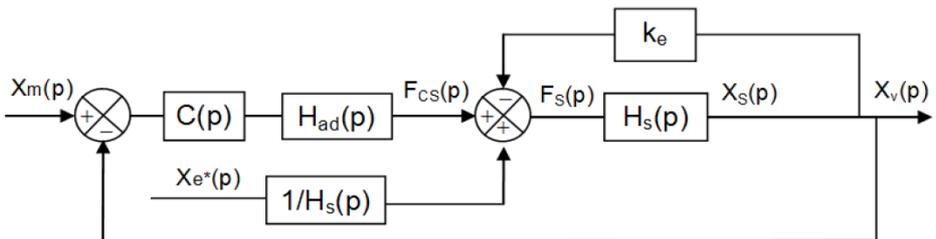
IV.1 Modélisation et étude du système sans correction

Question 12.

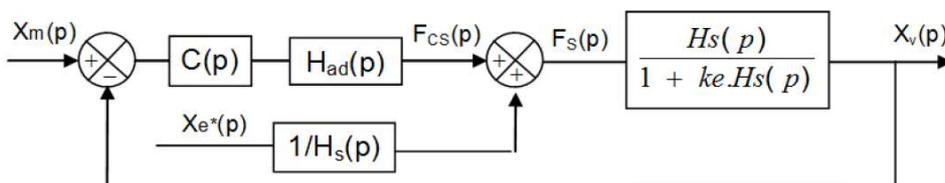
La figure 14 donne le schéma bloc de ci-dessous.



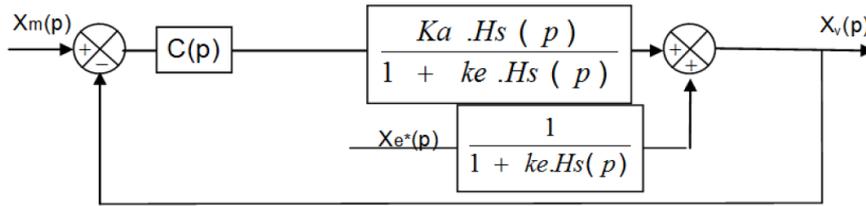
Tout d'abord on décale l'intervention de $X_e(p)$ en amont pour le sortir de la boucle interne.



La FTBF de la boucle interne est alors : $\frac{X_v(p)}{F_{cs}(p)} = \frac{H_s(p)}{1 + k_e \cdot H_s(p)}$, d'où le schéma-bloc suivant.



On décale ensuite l'intervention en aval de la FT calculée pour obtenir le schéma-bloc final identique à la forme demandée.



On obtient donc: $H(p) = \frac{K_a \cdot H_s(p)}{1 + k_e \cdot H_s(p)}$ et: $H_t(p) = \frac{1}{1 + k_e \cdot H_s(p)}$

IV.2 Vérification des exigences sans correction : C(p) = 1

Question 13.

Etant donné le schéma bloc, la fonction de transfert en boucle fermée (sans perturbation) est :

$$F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)} = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

Ayant ici C(p) = 1 et : $H(p) = \frac{1}{m_s \cdot p^2 + b_s \cdot p + k_e}$

On obtient :

$$F_{BF1}(p) = \frac{\frac{1}{m_s \cdot p^2 + b_s \cdot p + k_e}}{1 + \frac{1}{m_s \cdot p^2 + b_s \cdot p + k_e}} = \frac{1}{1 + k_e + b_s \cdot p + m_s \cdot p^2}$$

Soit sous une forme canonique :

$$F_{BF1}(p) = \frac{\frac{1}{1 + k_e}}{1 + \frac{b_s}{1 + k_e} \cdot p + \frac{m_s}{1 + k_e} \cdot p^2}$$

Par identification on a donc :

$$F_{BF1}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Avec :

$$K = \frac{1}{1 + k_e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}} \quad z = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{b_s}{1 + k_e} = \frac{b_s}{2 \cdot \sqrt{m_s \cdot (1 + k_e)}}$$

Applications numérique :

$$K = \frac{1}{1 + 200} = 0,005 \text{ sans unité}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + 200}{0,152}} = 36,4 \text{ rad.s}^{-1} \quad z = \frac{1,426}{2 \cdot \sqrt{0,152 \cdot (1 + 200)}} = 0,13$$

Question 14.

☞ La FTBF ($F_{BF1}(p)$) a un coefficient d'amortissement $z = 0,13 < 1$, donc la réponse indicielle présentera un dépassement transitoire.

L'exigence de stabilité (amortissement) n'est donc pas vérifiée.

☞ L'exigence rapidité impose un temps de réponse à 5% max pour un échelon de 0,1 s. Pour $z = 0,13$ l'abaque du temps de réponse réduit figure 16.a donne $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 20$. Soit $t_{r5\%} = \frac{20}{\omega_0} = \frac{20}{36,4} = 0,55s$.

L'exigence de rapidité n'est donc pas vérifiée.

☞ L'exigence de précision impose une erreur statique maximale relative à un échelon de 1%. La FTBF ($F_{BF1}(p)$) ayant un gain statique K on aura en régime permanent une erreur statique relative de $1 - K$. Avec $K=0,005$ on obtient une erreur de 0,995 bien supérieur à $1\% = 0,01$.

L'exigence de précision n'est donc pas vérifiée.

IV.3 Etude des performances du système avec correction intégrale : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Question 15.

L'analyse fréquentielle de la FTBO (figure 17) Montre que pour un gain $K_i = 100$, La marge de phase est d'environ 90° et la marge de gain d'environ 25 dB. D'autre part, la Réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1$ (figure 18) montre qu'il n'y a pas de dépassement de la valeur finale.

Les exigences de stabilité sont donc vérifiées.

La Réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1$ m (figure 18) montre que pour un gain $K_i = 100$, la valeur finale de la réponse est de $x_S(\infty) = 0,1$ m.

L'exigence de précision (l'erreur statique) est donc vérifiée.

La Réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1$ m (figure 18) montre que pour un gain $K_i = 100$, le temps de réponse à 5% est d'environ : $t_{r5\%} = 6$ s

L'exigence de rapidité n'est donc pas vérifiée.

Question 16.

La marge de gain doit être au minimum de 15 dB. Or pour $K_i = 100$ elle est de 25 dB. La courbe de gain peut donc être remontée de 10 dB au maximum. En remontant cette courbe de gain de 10 dB la marge de phase sera alors d'environ 90° . On peut donc remonter la courbe de gain au maximum de 10 dB.

La valeur $K_{i\max}$ du coefficient K_i qui permet de respecter les marges de stabilité est donc de :

$$K_{i\max} = 100 \times 10^{(10/20)} = 316 \text{ s}^{-1}$$

Question 17.

La Réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1$ m (figure 19) montre que pour un gain $K_i = K_{i\max}$ le temps de réponse à 5% est d'environ : $t_{r5\%} = 2$ s .

L'exigence de rapidité n'étant pas vérifiée avec la valeur maximale du gain permettant de vérifier les marges de stabilité, **ce correcteur intégral ne permet pas de respecter simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité ».**

IV.4 Etude des performances du système avec double correction

Question 18.

Le premier étage du correcteur est un correcteur intégral proportionnel il introduit donc un intégrateur dans la FTBO. **Donc il permet de respecter les exigences de précision du système.**

Question 19.

L'analyse fréquentielle de la boucle ouverte avec $C(p) = C_1(p)$ montre que la marge de phase du système ainsi corrigé est d'environ 90° et la marge de gain d'environ 70 dB.

Les marges de stabilité sont donc vérifiées.

Cependant la marge de phase étant obtenue à une pulsation très faible ($\ll 1 \text{ rad.s}^{-1}$) le critère de rapidité ne sera sans doute pas vérifié.

Question 20.

L'analyse fréquentielle de la boucle ouverte avec $C_2(p) = 1$ montre que pour une pulsation de $\omega_{0dB} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$ la phase de la boucle ouverte est de -185° .

Pour vérifier la marge de phase de 60° il faut donc relever à $\omega_{0dB} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$ la phase de 65° .

Question 21.

Les constantes c , et T de ce deuxième étage sont choisies de manière à ce que la phase maximale φ_M de $C_2(p)$ (premier ordre généralisé) soit obtenue à $\omega_{0dB} = \omega_M = 80 \text{ rad.s}^{-1}$. Donc sachant que cet étage doit relever la phase de $\varphi_M = 65^\circ$ à $\omega_{0dB} = \omega_M = 80 \text{ rad.s}^{-1}$, on en déduit :

$$c = \frac{1 + \sin \varphi_M}{s - \sin \varphi_M} = \frac{1 + \sin 65^\circ}{1 - \sin 65^\circ} = 20 \quad \text{et :} \quad T = \frac{1}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{c}} = \frac{1}{80 \cdot \sqrt{20}} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Question 22.

L'analyse fréquentielle de la boucle ouverte avec $C_2(p) = 1$ montre que **pour une pulsation de $\omega_{0dB} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$ le gain de la boucle ouverte est de -83 dB . Le deuxième étage de correction doit donc relever la courbe de gain de 83 dB** . Or les constantes c , et T de ce deuxième étage sont choisies de manière à ce que la phase maximale de $C_2(p)$ (premier ordre généralisé) soit obtenue à ω_{0dB} . Donc on va choisir K tel que : **$20 \cdot \log K + 10 \cdot \log c = 83 \text{ dB}$** . On en déduit :

$$K = 10^{\frac{83 - 10 \cdot \log c}{20}} = 10^{\frac{83 - 10 \cdot \log 20}{20}} = 3 \text{ } 200 \text{ s}^{-1}$$

Question 23.

L'analyse fréquentielle de la FTBO (figure 21) montre qu'avec ce correcteur à deux étages, la marge de phase est de $M_\varphi = 60^\circ$ et la marge de gain de $M_G = \infty$. D'autre part, la Réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1$ (figure 22) montre qu'il n'y a pas de dépassement de la valeur finale.

Les exigences de stabilité sont donc vérifiées.

La réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1 \text{ m}$ (figure 22) montre qu'avec ce correcteur à deux étages, le temps de réponse à 5% est d'environ : $t_{r5\%} = 0,3 \text{ s} < 0,4 \text{ s}$

L'exigence de rapidité est donc vérifiée.

La réponse à un échelon de consigne $x_m(t) = 0,1 \text{ m}$ (figure 22) montre qu'avec ce correcteur à deux étages, la valeur finale de la réponse est de $x_s(\infty) = 0,1 \text{ m}$.

L'exigences de précision (erreur statique) est donc vérifiées.

Question 24.

L'exigence de précision impose que l'effet d'une perturbation sinusoïdale doit être divisé au minimum par 100. Cela signifie qu'il faut que $\left| \frac{X_S(j.\omega)}{X_e^*(j.\omega)} \right|$ doit être inférieur à $\frac{1}{100}$.

$$\text{Soit en décibel on doit avoir : } 20 \cdot \log \left| \frac{X_S(j.\omega)}{X_e^*(j.\omega)} \right| \leq 20 \cdot \log \left(\frac{1}{100} \right) = -40 \text{ dB}$$

D'autre part la courbe de gain de la réponse fréquentielle à une perturbation sinusoïdale (figure 23) montre que le gain dynamique reste inférieur à -40 dB jusqu'à une pulsation de 5 rad.s^{-1} .

Donc le critère de précision relatif à la perturbation est vérifié jusqu'à une fréquence de :

$$f = \frac{5}{2 \cdot \pi} = 0,8 \text{ Hz}$$

Cela est cohérent car cette perturbation est due à la respiration du patient opéré qui devra avoir une période de respiration supérieure à $T = \frac{1}{f} = 1,25 \text{ s}$