TD : Vibreur à béton : Corrigé

1- Géométrie des masses

1.1- Masse et Centre de gravité

Le solide 2 est constitué d'un cylindre 2a de masse m_{2a} ; De deux cylindres 2b de masse m_{2b} ; et de deux cylindres 2c de masse m_{2c} . D'où la masse du solide 2 :

$$\mathbf{m_2 = m_{2a} + 2.m_{2b} + 2.m_{2c}} \qquad \text{A.N. :} \qquad \mathbf{m_2 = 1{,}76 + 2\times0{,}441 + 2\times1{,}23 = 5{,}102\ kg}$$

Le solide 2 est constitué d'un cylindre 2a de masse m_{2a} et de centre de gravité A ; De deux cylindres 2b de masse m_{2b} et de centre de gravité (des 2 cylindres) A ; et de deux cylindres 2c de masse m_{2c} et de centre de gravité (des 2 cylindres) C. D'où le centre de gravité du solide 2 est tel que :

$$m_2.\overrightarrow{AG_2} = m_{2a}.\overrightarrow{AA} + 2.m_{2b}.\overrightarrow{AA} + 2.m_{2c}.\overrightarrow{AC} \qquad \text{D'où :} \qquad m_2.\overrightarrow{AG_2} = 2.m_{2c}.\overrightarrow{AC}$$

D'où la position du centre de gravité G_2 du rotor 2 : $\overrightarrow{AG_2} = a\ .\ \overrightarrow{X_2}$ avec :

$$\mathbf{a = \frac{2\ .\ m_{C2}\ .\ e}{m_{2A} + 2.m_{2B} + 2.m_{2C}}} \qquad \textbf{A.N. :} \qquad \mathbf{a = \frac{2\times1{,}23\times20}{5{,}102} = 9{,}64\ mm}$$

1.2- Forme de la matrice d'inertie du solide 2 au point G_2

Le solide 2 a deux plans de symétrie : $(G_2, \overrightarrow{X_2}.\overrightarrow{Y_2})$ et $(G_2.\overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Z_2})$ Donc dans le repère R_2 la matrice du solide 2 est diagonale :

$$\overline{\overline{\mathbf{J_{G2}(2)}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_2} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}}$$

1.3- Valeur numériques de la matrice d'inertie du solide 2 au point G_2

On a : $\overrightarrow{AC} = 20.\overrightarrow{X_2}$ et : $\overrightarrow{AG_2} = 9{,}64.\overrightarrow{X_2}$ Donc : $\overrightarrow{CG_2} = 10{,}36.\overrightarrow{X_2}$

A étant le centre de gravité de l'ensemble constitué du cylindre 2a et des deux cylindre 2b, par le théorème de Huygens on en déduit :

$$J_{G2}(2a+2\times2b) = J_A(2a+2\times2b) + (m_{2a} + 2.m_{2b}).\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}64^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}64^2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit : $$J_{G2}(2a+2\times2b) = \begin{pmatrix} 7\,500 & 0 & 0 \\ 0 & 7\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 890 \end{pmatrix}_{R_2} + (1{,}76 + 2\times0{,}441).\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}64^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}64^2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit encore : $$\mathbf{J_{G2}(2a+2\times2b)} = \begin{pmatrix} \mathbf{7\,500} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7\,746} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1\,136} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}} \mathbf{kg.mm^2}$$

C étant le centre de gravité de l'ensemble constitué des deux cylindre 2c, par le théorème de Huygens on en déduit :

$$J_{G2}(2\times2c) = J_C(2\times2c) + 2.m_{2c}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}36^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}36^2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit : $$J_{G2}(2\times2c) = \begin{pmatrix} 43\,020 & 0 & 0 \\ 0 & 43\,020 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,070 \end{pmatrix}_{R_2} + 2\times1{,}23.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}36^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}36^2 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit encore : $$\mathbf{J_{G2}(2\times2c)} = \begin{pmatrix} \mathbf{43\,020} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{43\,284} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3\,334} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}} \mathbf{kg.mm^2}$$

D'où la matrice du solide 2 au point G_2 : $\mathbf{J_{G2}(2) = J_{G2}(2a+2\times2b) + J_{G2}(2\times2c)}$

$$\mathbf{J_{G2}(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{7\,500} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7\,746} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1\,136} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}} + \begin{pmatrix} \mathbf{43\,020} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{43\,284} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3\,334} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{50\,520} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{51\,030} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4\,470} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_2}} \mathbf{kg.mm^2}$$

2- Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

2.1- Torseur cinétique du rotor 2

Par composition des vitesses : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{G2\in 1/0}}$ Avec : $\overrightarrow{V_{G2\in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1}$

Or : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ avec $\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/1)} = a.\overrightarrow{X_2}\wedge \omega.\overrightarrow{Z_2} = a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$

et : $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \vec{0}$ car A est le centre de la liaison pivot entre 2 et 1.

Par conséquent : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$

D'autre part : $\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = \overline{\overline{J_{G2}(2)}}\ .\ \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2.\omega \end{pmatrix}_{R_2} = C_2.\omega.\overrightarrow{Z_2}$

D'où le torseur cinétique du rotor 2 dans son mouvement par rapport au socle 0 :

$$\{\mathcal{C}(2/0)\} = {}_{G_2}\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{m_2.\dot{x}.\overrightarrow{X_1} + m_2.a.\omega.\overrightarrow{Y_2}} \\ \\ \mathbf{C_2.\omega.\overrightarrow{Z_2}} \end{array} \right\}$$

2.2- Energie cinétique du system S = {1,2}

Le plateau 1 étant en mouvement de translation rectiligne par rapport au socle 0. L'énergie cinétique du plateau 1 dans son mouvement par rapport au socle 0 a pour expression :

$E_C(1/0) = \frac{1}{2}.m_1.\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}}^2$ Avec : $\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1}$ Donc : $\mathbf{E_C(1/0) = \frac{1}{2} m_1 . \dot{x}^2}$

Le rotor ayant G_2 pour centre de gravité on a : $E_C(2/0) = \frac{1}{2}.m_2.\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{\Omega(2/0)}$

Or : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$, $\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = C_2.\omega.\overrightarrow{Z_2}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega.\overrightarrow{Z_2}$

Donc : $E_C(2/0) = \frac{1}{2}.m_2.(\dot{x}^2 + a^2.\omega^2 + 2.\dot{x}.a.\omega.\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{Y_2}) + \frac{1}{2}.C_2.\omega^2$

Or : $\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{Y_2} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ Donc : $\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{Y_2} = -\sin\alpha$

On en déduit : $\mathbf{E_C(2/0) = \frac{1}{2}.m_2.(\dot{x}^2 + a^2.\omega^2 - 2.\dot{x}.a.\omega.\sin\alpha) + \frac{1}{2}.C_2.\omega^2}$

Sachant que S={1,2} : $E_C(S/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0)$ et étant donné les résultats précédents, on a :

$$\mathbf{E_C(S/0) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2).\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.m_2.(a^2.\omega^2 - 2.\dot{x}.a.\omega.\sin\alpha) + \frac{1}{2}.C_2.\omega^2}$$

2.3- Théorème de l'énergie cinétique

☞ L'action intérieure du moteur est un vecteur couple $\overrightarrow{C_m} = C_m.\overrightarrow{Z_2}$ appliqué sur le rotor 2 qui est en rotation de vecteur $\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \omega.\overrightarrow{Z_2}$. D'où la puissance de ce couple par rapport à 0. $\mathbf{P(\overrightarrow{C_m},0) = C_m.\omega}$

☞ L'action du ressort est une force $\overrightarrow{F_k} = -k.x.\overrightarrow{X_1}$ appliquée sur 1 en translation par rapport au socle 0 de vecteur : $\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X1}$. D'où la puissance de cette action rapport à 0. $\mathbf{P(\overrightarrow{F_k},0) = -k.x.\dot{x}}$

☞ L'action de l'amortisseur est une force $\overrightarrow{F_b} = -b.\dot{x}.\overrightarrow{X_1}$ appliquée sur 1 en translation par rapport au socle 0 de vecteur : $\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X1}$. D'où la puissance de cette action rapport à 0. $\mathbf{P(\overrightarrow{F_b},0) = -b.\dot{x}^2}$

☞ Le poids de 1 est une force $\overrightarrow{P_1} = -m_1.g.\overrightarrow{Y_1}$ appliquée sur 1 en translation par rapport au socle 0 de vecteur: $\overrightarrow{V_{G1\in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X1}$. D'où la puissance de cette action rapport à 0. $\mathbf{P(\overrightarrow{P_1},0) = 0}$

☞ Le poids de 2 est une force $\overrightarrow{P_2} = -m_2.g.\overrightarrow{Y_1}$ appliquée en G_2 centre de gravité du rotor 2. Dont le vecteur vitesse est $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$. D'où la puissance de cette action rapport à 0.

$P(\overrightarrow{P_2},0) = -m_2.g.\overrightarrow{Y_1}.(\dot{x}.\overrightarrow{X_1} + a.\omega.\overrightarrow{Y_2})$ Avec : $\overrightarrow{Y_1}.\overrightarrow{Y_2} = \cos\alpha$

On en déduit : $P(\overrightarrow{P_2},0) = -m_2.g.a.\omega.\cos\alpha$

L'application du théorème de l'énergie cinétique permet donc de dire que :

$$\frac{d\,E_C(1+2/0)}{dt} = P(\overrightarrow{C_m},0) + P(\overrightarrow{F_k},0) + P(\overrightarrow{F_b},0) + P(\overrightarrow{P_1},0) + P(\overrightarrow{P_2},0)$$

Soit après calcul :

$$C_m = \dot{x}.\frac{k.x + b.\dot{x} + (m_1+m_2).\ddot{x}}{\omega} + m_2.g.a.\cos\alpha - m_2.a.(\ddot{x}.\sin\alpha + \dot{x}.\omega.\cos\alpha)$$

3- Principe fondamental de la dynamique

3.1- Torseur dynamique du plateau 1

Le plateau 1 étant en mouvement de translation par rapport au socle 0. Le torseur dynamique du plateau 1 dans son mouvement par rapport au socle 0 a un moment dynamique en G_1 nul. D'autre part ce mouvement de translation étant rectiligne horizontal de paramètre x : $\overrightarrow{\Gamma_{G\in 1/0}} = \ddot{x}.\overrightarrow{X_1}$

D'où la résultante dynamique de 1 dans son mouvement par rapport à 0 : $\overrightarrow{R_D(1/0)} = m_1.\ddot{x}.\overrightarrow{X_1}$

On sait que : $\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}}{dt}\right)_{R_0}$ Sachant que : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$

On a: $\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}} = \left(\frac{d\,\dot{x}.\overrightarrow{X_1}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + \left(\frac{d\,a.\omega.\overrightarrow{Y_2}}{dt}\right)_{R_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$

Soit : $\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}} = \ddot{x}.\overrightarrow{X_1} + \vec{0} \wedge \dot{x}.\overrightarrow{X_1} + \vec{0} + \omega.\overrightarrow{Z_2} \wedge a.\omega.\overrightarrow{Y_2}$ Donc : $\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}} = \ddot{x}.\overrightarrow{X_1} - a.\omega^2.\overrightarrow{X_2}$

D'où la résultante dynamique de 2 dans son mouvement / 0 : $\overrightarrow{R_D(2/0)} = m_2.(\ddot{x}.\overrightarrow{X_1} - a.\omega^2.\overrightarrow{X_2})$

On en déduit la résultante dynamique de S dans son mouvement par rapport à 0 :

$\overrightarrow{R_D(S/0)} = \overrightarrow{R_D(1/0)} + \overrightarrow{R_D(2/0)}$

$$\overrightarrow{R_D(S/0)} = (m_1+m_2).\ddot{x}.\overrightarrow{X_1} - m_2.a.\omega^2.\overrightarrow{X_2}$$

Isolons le plateau 1 avec le rotor 2. Les actions extérieures sont :

☞ Une action de 0 sur 1 due à la liaison glissière d'axe $\overrightarrow{X_1}$

☞ Les poids du plateau 1 et du rotor 2

☞ L'action du ressort sur le plateau

☞ L'action de l'amortisseur sur le plateau

Projection des résultantes de ces actions

☞ La projection sur $\overrightarrow{X_1}$ de la résultante de l'action de 0 sur 1 est nulle car elle est due à une liaison glissière d'axe $\overrightarrow{X_1}$.

☞ Les projections sur $\overrightarrow{X_1}$ des poids du plateau et du rotor sont nulles car ces poids sont modélisable par des forces de direction $\overrightarrow{Y_1}$

☞ La projection sur $\overrightarrow{X_1}$ de l'action du ressort sur le plateau est égal à $-k.x$ car cette action est modélisable par une force horizontale $\overrightarrow{F_k} = -k.x.\overrightarrow{X_1}$

☞ La projection sur $\overrightarrow{X_1}$ de l'action de l'amortisseur sur le plateau est égal à $-b.\dot{x}$ car cette action est modélisable par une force horizontale $\overrightarrow{F_b} = -b.\dot{x}.\overrightarrow{X_1}$

Projection de résultantes de la résultante dynamique

Etant donné les composantes du torseur dynamique établies à la question 2.4, la projection de la résultante dynamique sur l'axe $\overrightarrow{X_1}$ est de : $(m_1+m_2).\ddot{x} - m_2.a.\omega^2.\cos\alpha$

Application du PFD

L'application du théorème de la résultante en projection sur l'axe $\overrightarrow{X_1}$ donne donc l'équation :

$0 + 0 - k.x - b.\dot{x} = (m_1 + m_2).\ddot{x} - m_2.a.\omega^2.\cos\alpha$ Avec : $\alpha = \omega.t$

On obtient : $$(m_1 + m_2).\ddot{x} + b.\dot{x} + k.x = m_2.a.\omega^2.\cos\omega.t$$

3.2- Expression du couple moteur

Les résultats précédents nous donnent :

- ☞ $C_m = \dot{x}.\dfrac{k.x + b.\dot{x} + (m_1 + m_2).\ddot{x}}{\omega} + m_2.g.a.\cos\alpha - m_2.a.(\ddot{x}.\sin\alpha + \dot{x}.\omega.\cos\alpha)$
- ☞ $(m_1 + m_2).\ddot{x} + b.\dot{x} + k.x = m_2.a.\omega^2.\cos\omega.t$

On en déduit : $C_m = m_2.a.\dot{x}.\omega.\cos\omega.t + m_2.g.a.\cos\alpha - m_2.a.(\ddot{x}.\sin\alpha + \dot{x}.\omega.\cos\alpha)$

Soit après simplification et sachant que $\alpha = \omega.t$: $$C_m = m_2.a.(g.\cos\alpha - \ddot{x}.\sin\alpha)$$

3.3- Fonction de transfert du mécanisme

$$(m_1 + m_2).\ddot{x} + b.\dot{x} + k.x = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (m_1 + m_2).p^2.X(p) + b.p.X(p) + k.X(p) = F(p)$$

On en déduit la fonction de transfert : $$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{b}{k}.p + \frac{m_1 + m_2}{k}.p^2}$$

Fonction de transfert du second ordre de :

- ☞ Gain statique : $K_H = \dfrac{1}{k}$
- ☞ Pulsation propre non amortie : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$
- ☞ Facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{b}{2.\sqrt{k.(m_1 + m_2)}}$

3.4- Fonction de transfert du mécanisme

La fonction $f(t)$ est de la forme : $f(t) = F_0.\cos(\omega.t)$ avec : $F_0 = m_2.a.\omega^2$

Connaissant les caractéristiques de H(p) : K_H, ω_0 et ξ, on en déduit :

$x(t) = X_0.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec : $X_0 = F_0.10^{G_{HdB}(\omega)/20}$ et : $\varphi = \varphi_H(\omega)$

On obtient donc : $\ddot{x}(t) = -X_0.\omega^2.\cos(\omega.t + \varphi)$

On a donc : $C_m(t) = m_2.a.\left[g.\cos(\omega.t) + X_0.\omega^2.\cos(\omega.t + \varphi).\sin(\omega.t)\right]$

Puis finalement la puissance du moteur :

$$P_m(t) = m_2.a.\omega.\left[g.\cos(\omega.t) + X_0.\omega^2.\cos(\omega.t + \varphi).\sin(\omega.t)\right]$$

Soit :

$$P_m(t) = m_2.a.\omega.\left[g.\cos(\omega.t) + m_2.a.\omega^4.10^{G_{HdB}(\omega)/20}.\cos(\omega.t + \varphi_H(\omega)).\sin(\omega.t)\right]$$