Mandrin anti centrifuge : Corrigé

1.1- Graphe de structure

Degré de mobilité du mécanisme est de : M = 1

Nombre de pièce hors bâti est : $(N_P - 1) = 6 - 1 = 5$

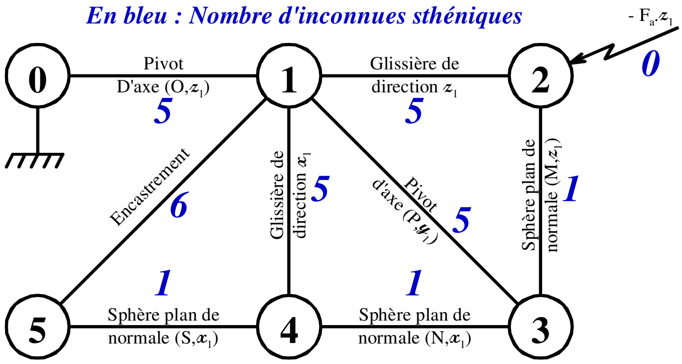
Le Nombre d'inconnues sthéniques :

$$I_S = 6 + 5\times4 + 1\times3 = 29$$

D'où le degré d'hyperstatisme du mécanisme :

$$H = 29 + 1 - 6 \times 5 \qquad \mathbf{H = 0}$$

Il est donc possible de déterminer toutes les actions sthéniques par le PFD.



2- Ordonnancement des isolement

☞ On isole le solide 2 et on applique un TRD en projection sur $\overrightarrow{z_1}$ On en déduit l'action de 2→3.

☞ On isole le solide 3 et on applique un TMD en P en projection sur $\overrightarrow{y_1}$ On en déduit l'action de 3→4.

☞ On isole le solide 4 et on applique un TRD en projection sur $\overrightarrow{x_1}$ On en déduit l'action de 4→5.

3- Géométrie des masses

Etant donné la symétrie du levier 3 par rapport au plan $(P, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{z_3})$ on en déduit la forme de la matrice d'inertie du solide 3 au point P dans le repère $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$:
$$\overline{\overline{\mathbf{I_P(3)}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{-E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-E} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Le levier 3 à une masse m_3 et un centre de gravité G_3 tel que : $\overrightarrow{PG_3} = -e.\overrightarrow{x_1} - d.\overrightarrow{z_1}$

Donc d'après le théorème de Huygens : $\overline{\overline{I_P(3)}} = \overline{\overline{I_{G3}(3)}} + m_3.\begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e.d \\ 0 & e^2+d^2 & 0 \\ -e.d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Donc : $\overline{\overline{I_{G3}(3)}} = \overline{\overline{I_P(3)}} - m_3.\begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e.d \\ 0 & e^2+d^2 & 0 \\ -e.d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Soit : $\overline{\overline{\mathbf{I_{G3}(3)}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A - m_3.d^2} & \mathbf{0} & \mathbf{-E + m_3.e.d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B - m_3.(e^2+d^2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-E + m_3.e.d} & \mathbf{0} & \mathbf{C - m_3.e^2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

4- Application du PFD

On isole le solide 2, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

☞ Action de 1→2 due à la liaison glissière de direction $\overrightarrow{z_1}$

☞ Action de 3→2 due à la liaison sphère plan de normale $(M, \overrightarrow{z_1})$: Force $\overrightarrow{F_{3\to2}} = Z_{32}.\overrightarrow{z_1}$ appliquée en M

☞ Action de l'actionneur sur 2 modélisée par une force de résultante : $\overrightarrow{\mathbf{F_a}} = -\mathbf{F_a}.\overrightarrow{z_1}$ appliquée en O

L'application du TRD en projection sur $\overrightarrow{z_1}$ donne donc : $0 + Z_{32} - F_a = m_2.\overrightarrow{a_{G2\in2/0}}.\overrightarrow{z_1}$

Or le mouvement de 2 par rapport à 0 étant une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$: $m_2.\overrightarrow{a_{G2\in2/0}}.\overrightarrow{z_1} = 0$

On obtient donc : $Z_{32} = F_a$ Soit par le principe des actions mutuelles : $Z_{23} = -F_a$

Donc l'action de 2→3 est une force $\overrightarrow{F_{2\to3}} = -F_a.\overrightarrow{z_1}$ appliquée en M

On isole le solide 3, et lui applique un théorème du moment dynamique en P. Nous allons donc calculer le moment dynamique en P du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0 : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)}$.

Calculs de cinématiques :

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ donc :

$\overrightarrow{V_{P\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{0\in 3/0}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \vec{0} - a.\ \overrightarrow{x_1} \wedge \omega.\ \overrightarrow{z_1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\overrightarrow{V_{P\in 3/0}} = a.\omega.\ \overrightarrow{y_1}}$

$\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{0\in 3/0}} + \overrightarrow{G_3O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \vec{0} - [\,(a-e).\ \overrightarrow{x_1} + d.\ \overrightarrow{z_1}\,] \wedge \omega.\ \overrightarrow{z_1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = (a-e).\omega.\ \overrightarrow{y_1}}$

D'autre part, par dérivation vectorielle on a :

$$\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G3\in 3/0}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} \qquad \text{avec : } \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} = (a-e).\omega.\ \overrightarrow{y_1}$$

Or $\dot{\omega} = 0$. Donc : $\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}} = \vec{0} + \omega.\ \overrightarrow{z_1} \wedge (a-e).\omega.\ \overrightarrow{y_1}$ Soit : $\boldsymbol{\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}} = -(a-e).\omega^2.\ \overrightarrow{x_1}}$

Calculs de cinétique au point P :

On a : $\overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \overline{\overline{I_P(3)}}\,.\overrightarrow{\Omega_{3/0}} + m_3.\ \overrightarrow{PG_3} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 3/0}}$

$$\overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + m_3. \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a.\omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} -E.\omega \\ 0 \\ C.\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{pmatrix} m_3.a.d.\omega \\ 0 \\ -m_3.a.e.\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Soit finalement : $$\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3.a.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}}$$

D'autre part : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)}\ ) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + m_3.\ \overrightarrow{V_{P/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}}$ avec : $\overrightarrow{V_{P/0}} = \overrightarrow{V_{P\in 3/0}}$ car $P \in 3$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + m_3.\ \overrightarrow{V_{P\in 3/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}} \qquad \text{Or : } \overrightarrow{V_{P\in 3/0}} \,//\, \overrightarrow{V_{G3\in 3/0}}$$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_P(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_P(3/0)} \qquad \text{Or : } \overrightarrow{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3.a.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \text{ et : } \dot{\omega} = 0$$

$$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} -(E - m_3.a.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \qquad \text{Soit : } \boldsymbol{\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.a.d).\omega^2\ \overrightarrow{y_1}}$$

Calculs de cinétique au point G_3 :

G_3 étant le centre d'inertie de 3 on a : $\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \overline{\overline{I_{G3}(3)}}\,.\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} A - m_3.d^2 & 0 & -E + m_3.e.d \\ 0 & B - m_3.(e^2 + d^2) & 0 \\ -E + m_3.e.d & 0 & C - m_3.e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3.e.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}}$$

D'autre part : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}$

Ayant : $\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} -(E - m_3.e.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Avec $\dot{\omega} = 0$ on a : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G3}(3/0)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} -(E - m_3.e.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Soit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} = -(E - m_3.e.d).\ \overrightarrow{y_1}}$

Enfin par le théorème de Varigon on a : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \overrightarrow{\delta_{G3}(3/0)} + \overrightarrow{PG_3} \wedge m_3.\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.e.d).\overrightarrow{y_1} + m_3.(-e.\overrightarrow{x_1} - d.\overrightarrow{z_1}) \wedge -(a-e).\omega^2.\overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.e.d).\overrightarrow{y_1} + m_3.(a.d - e.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1}$

Finalement on obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.a.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1}}$

<u>On isole le solide 3</u>, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

☞ Action de 1→3 due à la liaison pivot d'axe $(P, \overrightarrow{y_1})$

☞ Action de 2→3 due à la liaison sphère plan : Force $\overrightarrow{F_{2\to3}} = -F_a.\overrightarrow{z_1}$ appliquée en M

☞ Action de 4→3 due à la liaison sphère plan de normale $(N, \overrightarrow{x_1})$: Force $\overrightarrow{F_{4\to3}} = \mathbf{X_{43}}.\overrightarrow{x_1}$ appliquée en N

L'application du TMD en P en projection sur $\overrightarrow{y_1}$ donne donc :

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)}.\overrightarrow{y_1} = 0 + \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{F_{2\to3}}.\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{F_{4\to3}}.\overrightarrow{y_1}$

$-(E - m_3.a.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{y_1} = -b.\overrightarrow{x_1} \wedge (-F_a.\overrightarrow{z_1}).\overrightarrow{y_1} + (-f.\overrightarrow{x_1} + c.\overrightarrow{z_1}) \wedge \mathbf{X_{43}}.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{y_1}$

$-(E - m_3.a.d).\omega^2 = -b.F_a + c.\mathbf{X_{43}}$ $\qquad X_{43} = \dfrac{b.F_a - (E - m_3.a.d).\omega^2}{c}$

Soit par le principe des actions mutuelles : $\boldsymbol{X_{34} = \dfrac{(E - m_3.a.d).\omega^2 - b.F_a}{c}}$

On isole le solide 4, et lui applique un théorème de la résultante dynamique. Nous allons donc calculer la résultante dynamique du solide 4 dans son mouvement par rapport à 0 : $m_4.\overrightarrow{a_{G4\in 4/0}}$

Le mouvement de 4 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ donc :

$\overrightarrow{V_{G4\in 4/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 4/0}} + \overrightarrow{G_4O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0} - (r.\overrightarrow{x_1} + h.\overrightarrow{z_1}) \wedge \omega.\overrightarrow{z_1} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{V_{G4\in 4/0}} = r.\omega.\overrightarrow{y_1}$

D'autre part per dérivation vectorielle on a :

$\overrightarrow{a_{G4\in 4/0}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G4\in 4/0}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G4\in 4/0}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G4\in 4/0}}$ $\qquad$ avec : $\overrightarrow{V_{G4\in 4/0}} = r.\omega.\overrightarrow{y_1}$

Or $\dot{\omega} = 0$. Donc : $\overrightarrow{a_{G4\in 4/0}} = \vec{0} + \omega.\overrightarrow{z_1} \wedge r.\omega.\overrightarrow{y_1}$ $\qquad$ Soit : $\boldsymbol{m_4.\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}} = -m_4.r.\omega^2.\overrightarrow{x_1}}$

<u>On isole le solide 4</u>, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

☞ Action de 1→4 due à la liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_1}$

☞ Action de 3→4 due à la liaison sphère plan : Force $\overrightarrow{F_{3\to4}} = X_{34}.\overrightarrow{x_1}$ appliquée en N

☞ Action de 5→4 due à la liaison sphère plan de normale $(S, \overrightarrow{x_1})$: Force $\overrightarrow{F_{5\to4}} = F_S.\overrightarrow{x_1}$ appliquée en S

L'application du TRD en P en projection sur $\overrightarrow{x_1}$ donne donc :

$m_4.\overrightarrow{a_{G3\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1} = 0 + \overrightarrow{F_{3\to4}}.\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{F_{5\to4}}.\overrightarrow{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad -m_4.r.\omega^2.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_1} = X_{34}.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_1} + F_S.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_1}$

Soit : $F_S = -X_{34} - m_4.r.\omega^2$ et des résultats précédents : $F_S = \dfrac{b.F_a - (E - m_3.a.d).\omega^2}{c} - m_4.r.\omega^2$

Soit encore : $\boldsymbol{F_S = \dfrac{b}{c}.F_a - \dfrac{(E - m_3.a.d + m_4.r.c).\omega^2}{c}}$

<u>5- Conclusion</u>

Etant donné l'expression de l'effort de serrage : $F_S = \dfrac{b}{c}.F_a - \dfrac{(E - m_3.a.d + m_4.r.c).\omega^2}{c}$, pour que celui-ci augment lorsque ω augmente il faut que : $E - m_3.a.d + m_4.r.c < 0$

On en déduit qu'il faut que : $\boldsymbol{E < m_3.a.d - m_4.r.c}$