Véhicule prototype CLEVER : Corrigé

1- Cinématique

1.1-Taux de rotation de 1 par rapport à 0 et de 2 par rapport à 0

On sait que : $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{DO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ Avec : $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = V.\ \overrightarrow{Y_1}$

Or : $\overrightarrow{V_{O\in 1/0}} = \vec{0}$ car 1 est en rotation par rapport à 0 au tour de l'axe $(O, \overrightarrow{Z_1})$

On a donc : $V.\ \overrightarrow{Y_1} = \vec{0} + -R.\overrightarrow{X_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{V}{R}.\ \overrightarrow{Z_1}}$

On sait que : $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ Avec : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}.\overrightarrow{Y_1}$

Or l'inclinaison de l'habitable β étant constante : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ Donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{V}{R}.\ \overrightarrow{Z_1}}$

Sachant que : $\overrightarrow{Z_1} = \cos\beta\ .\ \overrightarrow{Z_2} - \sin\beta\ .\ \overrightarrow{X_2}$ On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} -\frac{V}{R}\sin\beta \\ 0 \\ \frac{V}{R}\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2}}$

1.2- Matrice d'inertie de 1 en D et de 2 en G_2

L'essieu étant symétrique par rapport au plan $(D, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ on a : $\boldsymbol{\overline{\overline{J_D(1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{R_1}}$

L'habitacle étant symétrique par rapport au plan $(G_2, \overrightarrow{Y_2}, \overrightarrow{Z_2})$ on a : $\boldsymbol{\overline{\overline{J_{G2}(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2}}$

1.3- Accélération du centre d'inertie de l'habitacle G_2

Par composition des vitesses : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{G2\in 1/0}}$

Or on a entre 2 et 1 une liaison pivot de paramètre β avec $\dot{\beta} = 0$. Donc le mouvement de 2 par rapport à 1 est nul. Par conséquent : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/1}} = \vec{0}$. Donc : $\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G2\in 1/0}}$

D'autre part : $\overrightarrow{V_{G2\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}} + \overrightarrow{G_2D} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ avec : $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = V.\ \overrightarrow{Y_1}$

et : $\overrightarrow{G_2D} = \overrightarrow{G_2E} + \overrightarrow{ED} = -h_2.\overrightarrow{Z_2} - d_2.\overrightarrow{Y_1} - k.\overrightarrow{Z_1}$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = V.\ \overrightarrow{Y_1} + \begin{pmatrix} h_2.\sin\beta \\ -d_2 \\ -(k + h_2.\cos\beta) \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V}{R} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -d_2.\frac{V}{R} \\ (R + h_2.\sin\beta).\frac{V}{R} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Ensuite par dérivation vectorielle : $\overrightarrow{a_{G2\in 2/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G2\in 1/0}}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}$

$$\overrightarrow{a_{G2\in 2/0}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V}{R} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} -d_2.\frac{V}{R} \\ (R + h_2.\sin\beta).\frac{V}{R} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Soit finalement

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_{G2\in 2/0}} = \begin{pmatrix} -(R + h_2.\sin\beta).\frac{V^2}{R^2} \\ -d_2.\frac{V^2}{R^2} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}}$$

3- Cinétique de l'habitacle 2

2.1- Moment cinétique en D de l'habitacle 2

G_2 étant le centre de gravité de 2 on a :

$$\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = \overline{\overline{J_{G2}(2)}}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2} . \begin{pmatrix} -\frac{V}{R}\sin\beta \\ 0 \\ \frac{V}{R}\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} -A_2.\frac{V}{R}.\sin\beta \\ -D_2.\frac{V}{R}.\cos\beta \\ C_2.\frac{V}{R}.\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2}$$

Puis par la relation de Varignon appliquée au moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_D(2/0)} = \overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} + \overrightarrow{DG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}} = \begin{pmatrix} -A_2.\frac{V}{R}.\sin\beta \\ -D_2.\frac{V}{R}.\cos\beta \\ C_2.\frac{V}{R}.\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} -k.\sin\beta \\ d_2 \\ h_2+k.\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2} \wedge m_2. \begin{pmatrix} -d_2.\frac{V}{R}.\cos\beta \\ (R+h_2.\sin\beta).\frac{V}{R} \\ -d_2.\frac{V}{R}.\sin\beta \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_D(2/0)} = \begin{pmatrix} -(A_2+m_2.d_2^2).\frac{V}{R}.\sin\beta - m_2.(R+h_2.\sin\beta).(h_2+k.\cos\beta).\frac{V}{R} \\ -D_2.\frac{V}{R}.\cos\beta - m_2.d_2.(h_2.\cos\beta+k).\frac{V}{R} \\ (C_2+m_2.d_2^2).\frac{V}{R}.\cos\beta - m_2.k.(R+h_2.\sin\beta).\sin\beta.\frac{V}{R} \end{pmatrix}_{R_2}}$$

2.2- Moment dynamique en D de l'habitacle 2 projeté sur $\overrightarrow{Y_1}$

En partant de $\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}$

G_2 étant le centre de gravité du solide 2 : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1}}$

1[ière] Méthode par la relation de Bour : $\overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}}{dt}\right)_{R_2}\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}$

Sachant que l'angle β est constant on a par le résultat précédent : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}}{dt}\right)_{R_2} = \vec{0}$

D'autre part : $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_1}\wedge\overrightarrow{\Omega_{2/0}}.\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = \overrightarrow{Y_1}\wedge\frac{V}{R}.\overrightarrow{Z_1}.\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = \frac{V}{R}.\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}$

Sachant $\overrightarrow{X_1} = \cos\beta.\overrightarrow{X_2} + \sin\beta.\overrightarrow{Z_2}$ on a par le résultat précédent :

$$\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)} = -A_2.\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta + C_2.\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = (C_2-A_2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta$$

Soit finalement : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = (C_2-A_2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta}$

2[ième] Méthode : Sachant que : $\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\left(\frac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}$

On obtient : $\overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\left(\frac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}$

Or $\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_2}$ et l'angle β est constant, on donc par le résultat précédent : $\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} = 0$

D'autre part $\left(\frac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{Y_1} = \frac{V}{R}.\overrightarrow{Z_1}\wedge\overrightarrow{Y_1} = -\frac{V}{R}.\overrightarrow{X_1} = -\frac{V}{R}.(\cos\beta.\overrightarrow{X_2} + \sin\beta.\overrightarrow{Z_2})$

Donc par le résultat précédent : $\overrightarrow{\sigma_{G2}(2/0)}.\left(\frac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = -A_2.\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta + C_2.\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta$

Soit finalement : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = (C_2 - A_2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta}$ **(a)**

Enfin par la relation de Varignon : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{\delta_{G2}(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{DG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1}}$ **(b)**

Or : $\overrightarrow{DG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{a_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}}\wedge\overrightarrow{Y_1}.\overrightarrow{DG_2}$

Par le résultat de la question 1.3 on a : $\overrightarrow{DG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = -m_2.(R - h_2.\sin\beta).\frac{V^2}{R^2}.\overrightarrow{Z_1}.\overrightarrow{DG_2}$

Ayant : $\overrightarrow{DG_2} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG_2} = d_2.\overrightarrow{Y_1} + k.\overrightarrow{Z_1} + h_2.\overrightarrow{Z_2}$ on a : $\overrightarrow{Z_1}.\overrightarrow{DG_2} = k + h_2.\cos\beta$

On obtient donc : $\mathbf{\overrightarrow{DG_2}\wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = -m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta).\frac{V^2}{R^2}}$ **(c)**

Par conséquent on obtient finalement par les relation (a) , (b) et (c) :

$$\mathbf{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta)\,].\frac{V^2}{R^2}}$$

En partant de $\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}$

$\mathbf{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} + m_2.\overrightarrow{V_{D/R0}}}\wedge\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1}$

D étant fixe dans 1 : $\overrightarrow{V_{D/R0}} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}}$ On a donc par permutation circulaire :

$m_2.\overrightarrow{V_{D/R0}}\wedge\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = m_2.\overrightarrow{V_{D\in 1/0}}\wedge\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = m_2.\overrightarrow{Y_1}\wedge\overrightarrow{V_{D\in 1/0}}.\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}$

Or : $\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = V.\overrightarrow{Y_1}$ Donc : $\overrightarrow{Y_1}\wedge\overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = \overrightarrow{0}$ D'où finalement : $m_2.\overrightarrow{V_{D/R0}}\wedge\overrightarrow{V_{G2\in 2/0}}.\overrightarrow{Y_1} = 0$

On a donc : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1}}$

1ière Méthode par la relation de Bour : $\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}$

D'une part par permutation circulaire du produit mixte :

$\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_1}\wedge\overrightarrow{\Omega_{2/0}}.\overrightarrow{\sigma_D(2/0)} = \overrightarrow{Y_1}\wedge\frac{V}{R}.\overrightarrow{Z_1}.\overrightarrow{\sigma_D(2/0)} = \frac{V}{R}.\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}$

Avec : $\overrightarrow{X_1} = \cos\beta.\overrightarrow{X_2} + \sin\beta.\overrightarrow{Z_2}$ on a par le résultat précédent :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = -(A_2 + m_2.d_2^2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta - m_2.(R + h_2.\sin\beta).(h_2 + k.\cos\beta).\cos\beta.\frac{V^2}{R^2}$$
$$+ (C_2 + m_2.d_2^2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta - m_2.k.(R + h_2.\sin\beta).\sin\beta.\sin\beta.\frac{V^2}{R^2}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = (C_2 + m_2.d_2^2 - A_2 - m_2.d_2^2).\frac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta$$
$$- m_2.(R + h_2.\sin\beta).(h_2.\cos\beta + k.\cos^2.\beta + k.\sin^2.\beta).\frac{V^2}{R^2}$$

Soit : $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta)\,].\frac{V^2}{R^2}$

Sachant que l'angle β est constant on a par le résultat précédent : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}}{dt}\right)_{R_2} = \overrightarrow{0}$

D'où finalement : $\mathbf{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta)\,].\frac{V^2}{R^2}}$

2ième Méthode : Sachant que : $\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}$

On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}}$

D'autre part $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Y_1} = \dfrac{V}{R}.\overrightarrow{Z_1} \wedge \overrightarrow{Y_1} = -\dfrac{V}{R}.\overrightarrow{X_1} = -\dfrac{V}{R}.(\cos\beta.\overrightarrow{X_2} + \sin\beta.\overrightarrow{Z_2})$

Donc par le résultat précédent :

$$\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = (A_2 + m_2.d_2^2).\dfrac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta + m_2.(R + h_2.\sin\beta).(h_2 + k.\cos\beta).\cos\beta.\dfrac{V^2}{R^2}$$
$$- (C_2 + m_2.d_2^2).\dfrac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta + m_2.k.(R + h_2.\sin\beta).\sin\beta.\sin\beta.\dfrac{V^2}{R^2}$$

$$\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = (A_2 + m_2.d_2^2 - C_2 - m_2.d_2^2).\dfrac{V^2}{R^2}.\sin\beta.\cos\beta$$
$$+ m_2.(R + h_2.\sin\beta).(h_2.\cos\beta + k.\cos^2\beta + k.\sin^2\beta).\cos\beta.\dfrac{V^2}{R^2}$$

$$\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = [\,(A_2 - C_2).\sin\beta.\cos\beta + m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta)\,].\dfrac{V^2}{R^2}$$

Or $\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y_2}$ et l'angle β est constant, on donc par le résultat précédent : $\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} = 0$

Ayant : $\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_D(2/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}$

Finalement on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.(R - h_2.\sin\beta).(k + h_2.\cos\beta)\,].\dfrac{V^2}{R^2}}$

2.2- Simplification du moment dynamique en D de l'habitacle 2 projeté sur $\overrightarrow{Y_1}$

Sachant que h_2 est négligeable devant R on a : $R - h_2.\sin\beta \approx R$

On obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.R.(k + h_2.\cos\beta)\,].\dfrac{V^2}{R^2}}$

3- Cinétique de l'essieu motorisé 1

3.1- Moment cinétique en D

Le point D n'étant ni fixe ni centre d'inertie de 1 : $\overrightarrow{\sigma_D(1/0)} = \overline{\overline{J_D(1)}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} + m_1.\overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{V_{D\in 1/0}}$

D'une part : $\overline{\overline{J_D(1)}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{R_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{V}{R} \end{pmatrix}_{R_1} = \dfrac{V}{R}.\begin{pmatrix} 0 \\ -D_1 \\ C_1 \end{pmatrix}_{R_1}$

D'autre part : $m_1.\overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = m_1.\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ h_1 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -m_1.h_1.V \\ 0 \\ m_1.d_1.V \end{pmatrix}_{R_1} = \dfrac{V}{R}.\begin{pmatrix} -m_1.h_1.R \\ 0 \\ m_1.d_1.R \end{pmatrix}_{R_1}$

On a donc finalement : $\boldsymbol{\overrightarrow{\sigma_D(1/0)} = \dfrac{V}{R}.\begin{pmatrix} -m_1.h_1.R \\ -D_1 \\ C_1. + m_1.d_1.R \end{pmatrix}_{R_1}}$

3.2- Moment dynamique en D de l'habitacle 2 projeté sur $\overrightarrow{Y_1}$

Le point D n'étant ni fixe ni centre d'inertie de 1 : $\overrightarrow{\delta_D(1/0)} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}}{dt}\right)_{R_0} + m_1.\ \overrightarrow{V_{D/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G1\in 1/0}}$

<u>D'une part :</u> $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_D(1/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0}$

Or du résultat précédent on a : $\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}.\overrightarrow{Y_1} = -\,D_1.\dfrac{V}{R}$ Donc : $\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}.\overrightarrow{Y_1}}{dt} = 0$

Ayant : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = -\dfrac{V}{R}.\overrightarrow{X_1}$ du résultat précédent on a : $\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{Y_1}}{dt}\right)_{R_0} = m_1.h_1.R.\dfrac{V^2}{R^2}$

Soit : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_D(1/0)}}{dt}\right)_{R_0}.\overrightarrow{Y_1} = -\,m_1.h_1.R.\dfrac{V^2}{R^2}$

<u>D'autre part :</u> $m_1.\ \overrightarrow{V_{D/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G1\in 1/0}}.\overrightarrow{Y_1} = m_1.\overrightarrow{Y_1} \wedge \overrightarrow{V_{D/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G1\in 1/0}}$ Or : $\overrightarrow{V_{D/0}} = \overrightarrow{V_{D\in 1/0}} = V.\overrightarrow{Y_1}$

Donc : $m_1.\ \overrightarrow{V_{D/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G1\in 1/0}}.\overrightarrow{Y_1} = 0$

Finalement on obtient : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_D(1/0)}.\overrightarrow{Y_1} = -\,m_1.h_1.R.\dfrac{V^2}{R^2}}$

4- Application du principe fondamentale de la dynamique

4.1- Théorème du moment dynamique par rapport à l'axe (D, $\overrightarrow{Y_1}$)

<u>On isole le véhicule, les actions extérieures appliquées sur le véhicule sont :</u>

- ☞ Le poids de l'essieu : Une force $\overrightarrow{P_1} = -\,m_1.g.\overrightarrow{Z_1}$ appliquée en G_1
- ☞ Le poids de l'habitacle : Une force $\overrightarrow{P_2} = -\,m_2.g.\overrightarrow{Z_1}$ appliquée en G_2
- ☞ Action du sol sur 1 en A : Une force $\overrightarrow{F_A} = N_A.\overrightarrow{Z_1} - T_A.\overrightarrow{X_1}$ appliquée en A
- ☞ Action du sol sur 1 en B : Une force $\overrightarrow{F_B} = N_B.\overrightarrow{Z_1} - T_B.\overrightarrow{X_1}$ appliquée en B
- ☞ Action du sol sur 2 en C : Une force $\overrightarrow{F_C} = N_C.\overrightarrow{Z_1} - T_C.\overrightarrow{u}$ appliquée en C

<u>Calculons le moment de ces actions par rapport à l'axe (D, $\overrightarrow{Y_1}$)</u>

☞ $\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_1}) = (\overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{P_1})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = [\,(d_1.\overrightarrow{Y_1} + h_1.\overrightarrow{Z_1}) \wedge -\,m_1.g.\overrightarrow{Z_1}\,].\overrightarrow{Y_1} = -\,m_1.g.d_1.\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{Y_1} = \mathbf{0}$

☞ $\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_2}) = (\overrightarrow{DG_2} \wedge \overrightarrow{P_2})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = [\,(d_2.\overrightarrow{Y_1} + k.\overrightarrow{Z_1} + h_2.\overrightarrow{Z_2}) \wedge -\,m_2.g.\overrightarrow{Z_1}\,].\overrightarrow{Y_1}$

$\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_2}) = [\,-\,m_2.g.d_2.\overrightarrow{X_1} - m_2.g.h_2.\overrightarrow{Z_2} \wedge \overrightarrow{Z_1}\,].\overrightarrow{Y_1}$ Or : $\overrightarrow{Z_2} = \cos\beta.\overrightarrow{Z_1} + \sin\beta.\overrightarrow{X_1}$

$\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_2}) = [\,-\,m_2.g.d_2.\overrightarrow{X_1} + m_2.g.h_2.\sin\beta.\overrightarrow{Y_1}\,].\overrightarrow{Y_1} = \mathbf{m_2.g.h_2.\sin\beta}$

☞ $\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_A}) = (\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{F_A})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = \left[-\dfrac{e}{2}.\overrightarrow{X_1} \wedge (N_A.\overrightarrow{Z_1} - T_A.\overrightarrow{X_1})\right].\overrightarrow{Y_1} = \dfrac{e}{2}.N_A.\ \overrightarrow{Y_1}.\overrightarrow{Y_1} = \mathbf{\dfrac{e}{2}.N_A}$

☞ $\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_B}) = (\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{F_B})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = \left[\dfrac{e}{2}.\overrightarrow{X_1} \wedge (N_B.\overrightarrow{Z_1} - T_B.\overrightarrow{X_1})\right].\overrightarrow{Y_1} = -\dfrac{e}{2}.N_B.\ \overrightarrow{Y_1}.\overrightarrow{Y_1} = \mathbf{-\dfrac{e}{2}.N_B}$

☞ $\mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_C}) = (\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{F_B})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = (L.\overrightarrow{Y_1} \wedge \overrightarrow{F_C})\ .\ \overrightarrow{Y_1} = (\overrightarrow{Y_1} \wedge L.\overrightarrow{Y_1})\ .\ \overrightarrow{F_C} = \overrightarrow{0}.\ \overrightarrow{F_C} = \mathbf{0}$

<u>L'application du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe (D, $\overrightarrow{Y_1}$) donne :</u>

$$\overrightarrow{\delta_D(1/0)}.\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{\delta_D(2/0)}.\overrightarrow{Y_1} = \mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{P_2}) + \mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_A}) + \mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_B}) + \mathcal{M}_{DY1}(\overrightarrow{F_C})$$

$$-\,m_1.h_1.R.\frac{V^2}{R^2} - [\,(C_2 - A_2).\sin\beta.\cos\beta - m_2.R.(k + h_2.\cos\beta)\,].\frac{V^2}{R^2} = 0 + m_2.g.h_2.\sin\beta + \frac{e}{2}.N_A - \frac{e}{2}.N_B + 0$$

Donc: $$\mathbf{\frac{e}{2}.(N_B - N_A) - m_2.g.h_2.\sin\beta = \left[m_1.h_1 + m_2.(k + h_2.\cos\beta + \frac{C_2 - A_2}{R}.\sin\beta.\cos\beta) \right].\frac{V^2}{R}}$$

4.2- Expression de l'accélération transversale en fonction de l'inclinaison β

Si les composantes normales N_A et N_B sur l'essieu arrières sont identiques alors $N_B - N_A = 0$.

De l'expression précédente on en déduit :

$$m_2.g.h_2.\sin\beta = \left[m_1.h_1 + m_2.(k + h_2.\cos\beta + \frac{C_2 - A_2}{R}.\sin\beta.\cos\beta) \right].\frac{V^2}{R}$$

D'où l'accélération transversale : $$\mathbf{\frac{V^2}{R} = \frac{-m_2.g.h_2.\sin\beta}{m_1.h_1 + m_2.(k + h_2.\cos\beta) + \frac{C_2 - A_2}{R}.\sin\beta.\cos\beta}}$$

4.3- Vitesses et inclinaisons

a- Pour une vitesse de 50 km/h dans un virage de rayon 80 m l'accélération transversale est de :

$\frac{V^2}{R} = \frac{(50/3,6)^2}{80} = 2,41\ m.s^{-2}$ Soit par lecture sur le graphique une inclinaison de : $\mathbf{\beta = 34,5°}$

b- Par lecture sur le graphique pour une inclinaison $\beta = 45°$ on une accélération de : $\frac{V^2}{R} = 3,17\ m.s^{-2}$

Soit dans un virage de rayon R = 80 m une vitesse de : $\mathbf{V = \sqrt{3,17 \times 80} = 15,9\ m.s^{-1} = 57,3\ km/h}$