

Question 6

Le point G_3 étant le centre d'inertie du solide 3 :
$$\delta(\overrightarrow{G_3,3/0}) = \left. \frac{d \sigma(\overrightarrow{G_3,3/0})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

Donc par la relation de Bour :
$$\delta(\overrightarrow{G_3,3/0}) = \left. \frac{d \sigma(\overrightarrow{G_3,3/0})}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \sigma(\overrightarrow{G_3,3/0})$$

On obtient finalement :
$$\delta(\overrightarrow{G_3,3/0}) = A_3 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{z_2} + B_3 \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot \overrightarrow{y_2} - B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$$

Question 7

On isole le système S = {1,2,3} et on lui applique un théorème du moment dynamique en G_3 .

Les actions de pesanteur étant négligées les actions extérieures se limitent à l'action de 0 sur 1.

D'autre part le stabilisateur 1 étant encasté sur 0 et l'inertie de 2 étant négligée on a :

$$\delta(\overrightarrow{G_3,1/0}) = \delta(\overrightarrow{G_3,2/0}) = \vec{0} \quad \text{Soit :} \quad \delta(\overrightarrow{G_3,S/0}) = \delta(\overrightarrow{G_3,3/0})$$

Par application du TMD en G_3 on a donc :
$$\delta(\overrightarrow{G_3,3/0}) = L_{01} \cdot \overrightarrow{x_1} + M_{01} \cdot \overrightarrow{y_1} + N_{01} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

Donc en projetant $\delta(\overrightarrow{G_3,3/0})$ dans la base \mathcal{B}_1 on obtient :

$$L_{01} = - B_3 \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot \sin \theta_2 - B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$M_{01} = B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_2 - B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$N_{01} = A_3 \cdot \ddot{\theta}_2$$

Question 8

On isole à nouveau le système S = {1,2,3} mais cette fois on tient compte de l'effort du cœur sur le stabilisateur 1 de résultante $\overrightarrow{R_{C \rightarrow 1}} = f_c \cdot \overrightarrow{y_1}$ au point P.

En faisant d'autre part l'hypothèse d'une rotation de la toupie 3 constante : $\dot{\theta}_3 = \omega_3 = C^{te}$ soit $\ddot{\theta}_3 = 0$, on obtient par application du TMD en G_3 projeté sur $\overrightarrow{x_1}$:
$$\delta(\overrightarrow{G_3,3/0}) \cdot \overrightarrow{x_1} = L_{01} + \overrightarrow{G_3P} \wedge f_c \cdot \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\Leftrightarrow - B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2 = L_{01} + f_c \cdot \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_1} \cdot (\overrightarrow{G_3O_0} + \overrightarrow{O_0P})$$

$$\Leftrightarrow - K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2 = L_{01} - f_c \cdot \overrightarrow{z_1} \cdot (-L_{G_3} \cdot \overrightarrow{z_1} - H_{G_3} \cdot \overrightarrow{y_1} + L \cdot \overrightarrow{z_1})$$

$$\Leftrightarrow L_{01} = - K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2 + f_c \cdot (L - L_{G_3})$$

Donc pour compenser l'effort cardiaque f_c (c'est à dire garantir $L_{01} = 0$) il faut avoir :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{f_c(t) \cdot (L - L_{G_3})}{K_3 \cdot \cos \theta_2(t)}$$

Question 9

Sachant que : $\overrightarrow{G_3P} \wedge f_c \cdot \overrightarrow{y_1} = (-L_{G_3} \cdot \overrightarrow{z_1} - H_{G_3} \cdot \overrightarrow{y_1} + L \cdot \overrightarrow{z_1}) \wedge f_c \cdot \overrightarrow{y_1}$

on a : $\overrightarrow{G_3P} \wedge f_c \cdot \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{G_3P} \wedge f_c \cdot \overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$

Donc l'application du TMD en en G_3 projeté sur $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$ avec $\dot{\theta}_3 = \omega_3 = C^{te}$ nous donne :

$$N_{01} = A_3 \cdot \ddot{\theta}_2$$

$$\text{et :} \quad M_{01} = - B_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 = - K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2$$

Pour $\omega_3 \gg \dot{\theta}_2$ il sera facile de considérer $A_3 \cdot \ddot{\theta}_2 \ll K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2$ et donc N_{01} faible

En revanche, pour considérer M_{01} faible il faut que $K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 \ll K_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2$.

Donc pour considérer M_{01} faible il faut que θ_2 reste faible : $\theta_2 \ll 1$ rad.

C'est ce qui est précisé dans l'énoncé après la question 10.

D'autre part en prenant ω_3 très important, on peut réduire $\dot{\theta}_2$ pour compenser l'effort cardiaque et donc on réduira θ_2 .

Question 10

La période de l'effort cardiaque est de $T_c = \frac{1}{f_c} = 1/1,5 = 0,66$ s Soit une demi période de $\frac{T_c}{2} = 0,33$ s. D'autre part la figure 7 nous montre un temps de réponse de l'ordre de 0,01 s. Donc le temps de réponse à 5 % de $\omega_2(t)$ est très inférieur à la demi période de l'effort perturbateur $f_c(t)$.

La réponse de l'étrier peut donc être considérée comme suffisamment réactive : $H_2(p) = C^{te}$

Enfin la figure 2 nous montre que la valeur finale pour un échelon de consigne de 2 000 deg.s⁻¹ est de 2 000 deg.s⁻¹. Donc le gain de $H_2(p)$ est de 1.

On peut donc considérer que : $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)} = K_2 = 1$

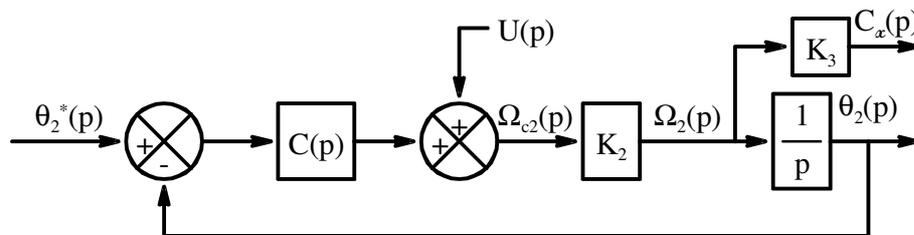
II-B – Correction de la chaine d'asservissement de l'étrier

Question 11

Par lecture du schéma bloc de la figure 8 en considérant $\theta_2^*(p) = 0$ et $H_2(p) = K_2$ on a :

$\theta_2(p) = \frac{K_2}{p} \cdot [U(p) + C(p) \cdot (-\theta_2(p))]$ On en déduit : $H_{\theta_2}(p) = \frac{\theta_2(p)}{U(p)} = \frac{K_2}{p + K_2 \cdot C(p)}$

Remarque : On peut aussi partir du schéma bloc équivalent suivant :



Par la relation de Black on a alors : $\frac{\theta_2(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_2}{p}}{1 + C(p) \cdot \frac{K_2}{p}} = \frac{K_2}{p + K_2 \cdot C(p)}$

Par le Théorème de la valeur finale on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot U(p) \cdot H_{\theta_2}(p)$

Soit pour un échelon unitaire de $u(t)$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K_2}{p + K_2 \cdot C(p)} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{K_2}{p + K_2 \cdot C(p)}$

Pour une correction proportionnelle : $C(p) = K_{10}$ on a :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{K_2}{p + K_2 \cdot K_{10}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \frac{1}{K_{10}}$

Pour une correction proportionnelle intégrale : $C(p) = K_{10} + \frac{K_{11}}{p} = \frac{K_{11} + K_{10} \cdot p}{p}$ on a :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{K_2}{p + K_2 \cdot \frac{K_{11} + K_{10} \cdot p}{p}} = \frac{K_2 \cdot p}{p^2 + K_2 \cdot (K_{11} + K_{10} \cdot p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = 0$

La correction proportionnelle, ne permet d'obtenir pour un échelon unitaire de tension $u(t)$ une valeur finale de $\theta_2(t) = 0$ qui est la condition pour ne pas avoir de problème de dérive de l'étrier. **D'où la pertinence de la correction proportionnelle intégrale qui permet d'annuler la dérive de l'étrier.**

Remarque : Le schéma bloc ci-dessus nous montre que la FTBO a un intégrateur mais en aval de $U(p)$ donc pour $\theta_2^*(p) = 0$ la valeur finale de $\theta_2(t)$ ne sera ma nulle. En revanche la correction proportionnelle intégrale introduit un intégrateur en amont de $U(p)$ ce qui permet d'annuler la dérive de l'étrier.

Question 12

Du schéma bloc précédent avec $C(p) = \frac{K_{11} + K_{10} \cdot p}{p}$ en appliquant la formule de Black on a :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_2(p)}{U(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{K_2}{p} \cdot \frac{K_{11} + K_{10} \cdot p}{p}} = \frac{K_2 \cdot p^2}{p^2 + K_2 \cdot K_{10} \cdot p + K_2 \cdot K_{11}}$$

Soit sous forme canonique :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_2(p)}{U(p)} = \frac{\frac{p^2}{K_{11}}}{1 + \frac{K_{10}}{K_{11}} \cdot p + \frac{1}{K_2 \cdot K_{11}} \cdot p^2}$$

Question 13

De l'expression précédente on a : $\omega_m = \sqrt{K_2 \cdot K_{11}}$ $\xi_m = \frac{\omega_m}{2} \cdot \frac{K_{10}}{K_{11}} = \frac{K_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{K_2}{K_{11}}}$

On en déduit : $K_{11} = \frac{\omega_m^2}{K_2}$ $K_{10} = 2 \cdot \xi_m \cdot \sqrt{\frac{K_{11}}{K_2}} = 2 \cdot \xi_m \cdot \omega_m$

Sachant que $K_2 = 1$ et que $H_m(p)$ est choisi tel que : $\omega_m = 2,45 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\xi_m = 0,37$

On choisi les gains K_{10} et K_{11} tel que : $K_{11} = 2,45^2 = 6,00 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
 $K_{10} = 2 \times 0,37 \times 2,45 = 1,81 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$

II-C – Comportement dynamique du stabilisateur

Question 14

Etant donné la liaison pivot d'axe (O_0, \vec{x}_0) , pour obtenir cette loi de mouvement il faut écrire pour le système $S = \{1,2,3\}$ un **Théorème du Moment Dynamique en O_0 en projection sur $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$** .

Les actions mécaniques, les actions mécaniques extérieures appliquées sur S sont :

- ☞ L'action de 0 sur 1 : $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = - (k \cdot \theta_1 + f \cdot \dot{\theta}_1)$
- ☞ L'action du cœur sur le stabilisateur : $\vec{M}(O_0, c \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_1 = O_0 \vec{P} \wedge f_c \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 = - L \cdot f_c(t)$
- ☞ L'action de la pesanteur sur 1 (négligée devant les effets dynamiques)
- ☞ L'action de la pesanteur sur 2 (négligée devant les effets dynamiques)

Ce théorème nous donne : $\delta(\vec{O}_0, S/\dot{0}) \cdot \vec{x}_0 = - (k \cdot \theta_1 + f \cdot \dot{\theta}_1) - L \cdot f_c(t)$ (a)

Question 15

Etant donné la matrice d'inertie du stabilisateur 1, A_1 est le moment d'inertie du solide 1 par rapport à l'axe (G_1, \vec{x}_1) . D'où par le théorème de Huygens sachant que $O_0 G_1 = L_{G_1} \cdot \vec{z}_1$ on obtient le moment d'inertie du solide 1 par rapport à l'axe $(O_0, \vec{x}_1) = (O_0, \vec{x}_0)$: $J_1 = A_1 + m_1 \cdot L_{G_1}^2$.

Le solide 1 étant en rotation d'axe fixe (O_0, \vec{x}_0) par rapport au bâti 0, on obtient :

$$\delta(\vec{O}_0, 1/\dot{0}) \cdot \vec{x}_0 = (A_1 + m_1 \cdot L_{G_1}^2) \cdot \ddot{\theta}_1$$

Question 16

Le point G_3 appartient aux axes des liaisons pivot de 3 par rapport à 2 et de 2 par rapport à 1, on a donc : $\vec{V}(G_3, 3/0) = \vec{V}(G_3, 2/0) = \vec{V}(G_3, 1/0)$.

Or par la relation de Varignon $\vec{V}(G_3, 1/0) = \vec{V}(O_0, 1/0) = G_3 O_0 \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

Avec $\vec{V}(O_0, 1/0) = \vec{0}$ car O_0 appartient à la liaison pivot entre 1 et 0. On en déduit :

$$\vec{V}(G_3, 3/0) = - (L_{G_3} \cdot \vec{z}_1 + H_{G_3} \cdot \vec{y}_1) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{V}(G_3, 3/0) = H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 - L_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$$

Puis par dérivation vectorielle :
$$\overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) = \left. \frac{d \overline{\mathbf{V}}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

et par la relation de Bour
$$\overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) = \left. \frac{d \overline{\mathbf{V}}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \overline{\Omega}_{1/0} \wedge \overline{\mathbf{V}}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)$$

Soit :
$$\overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) = H_{G_3} \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \overline{\mathbf{z}}_1 - L_{G_3} \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \overline{\mathbf{y}}_1 + \dot{\theta}_1 \cdot \overline{\mathbf{x}}_1 \wedge (H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \overline{\mathbf{z}}_1 - L_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \overline{\mathbf{y}}_1)$$

Et donc finalement :
$$\overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) = - (L_{G_3} \cdot \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \overline{\mathbf{y}}_1 + (H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 - L_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \overline{\mathbf{z}}_1$$

Question 17

Par la relation de Varignon on a : $\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = \delta(\overline{\mathbf{G}}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 + G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0$

Par permutation circulaire : $G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1 \wedge G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \cdot m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)$

Donc : $G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1 \wedge (L_{G_3} \cdot \overline{\mathbf{z}}_1 + H_{G_3} \cdot \overline{\mathbf{y}}_1) \cdot m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)$

$G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_1 = (-L_{G_3} \cdot \overline{\mathbf{y}}_1 + H_{G_3} \cdot \overline{\mathbf{z}}_1) \cdot m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0)$

Avec : $\overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) = - (L_{G_3} \cdot \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \overline{\mathbf{y}}_1 + (H_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1 - L_{G_3} \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \overline{\mathbf{z}}_1$ et $\overline{\mathbf{x}}_1 = \overline{\mathbf{x}}_0$

On obtient : $G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = G_3 \overline{\mathbf{O}}_0 \wedge m_3 \cdot \overline{\Gamma}(\mathbf{G}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_1 = m_3 \cdot (L_{G_3}^2 + H_{G_3}^2) \cdot \ddot{\theta}_1$

Enfin ayant : $\delta(\overline{\mathbf{G}}_3, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = A_3 \cdot \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ on obtient finalement :

$$\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, \mathbf{3}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = [A_3 + m_3 \cdot (L_{G_3}^2 + H_{G_3}^2)] \cdot \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$$

Question 18

L'inertie de l'étrier 2 étant négligée on a : $\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, \mathbf{2}/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 \approx 0$ Donc en considérant $S = \{1, 2, 3\}$

On a : $\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, S/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = \delta(\overline{\mathbf{O}}_0, 1/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 + \delta(\overline{\mathbf{O}}_0, 3/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0$ Soit des résultats aux question 15 et 17 :

$$\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, S/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = (A_1 + m_1 \cdot L_{G_1}^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + [A_3 + m_3 \cdot (L_{G_3}^2 + H_{G_3}^2)] \cdot \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$$

$$\delta(\overline{\mathbf{O}}_0, S/0) \cdot \overline{\mathbf{x}}_0 = [A_1 + A_3 + m_1 \cdot L_{G_1}^2 + m_3 \cdot (L_{G_3}^2 + H_{G_3}^2)] \cdot \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$$

L'équation (a) obtenue à la question 14 nous donne alors la loi de mouvement :

$$J_x \cdot \ddot{\theta}_1(t) + f \cdot \dot{\theta}_1(t) + k \cdot \theta_1(t) = c_x(t) - L \cdot f_c(t) \quad \text{avec : } J_x = A_1 + A_3 + m_1 \cdot L_{G_1}^2 + m_3 \cdot (L_{G_3}^2 + H_{G_3}^2)$$

Question 19

Pour des conditions initiales nulles, cette loi de mouvement passée dans le domaine de Laplace nous donne : $\Theta_1(p) \cdot (J_x \cdot p^2 + f \cdot p + k) = C_x(p) - L \cdot F_c(p)$

D'autre part l'équation : $\mathbf{y}(t) = L \cdot \theta_1(t)$ donne : $Y(p) = L \cdot \Theta_1(p)$

On obtient alors :
$$Y(p) = \frac{L}{k + f \cdot p + J_x \cdot p^2} \cdot C_x(p) - L \cdot F_c(p)$$

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit les fonctions de transfert :

$$H_{\text{pert}}(p) = L \quad \text{et :} \quad H_1(p) = \frac{L}{k + f \cdot p + J_x \cdot p^2}$$

Question 20

La fonction de transfert $H_1(p)$ écrite sous sa forme canonique donne alors :

$$H_1(p) = \frac{\frac{L}{k}}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_x}{k} \cdot p^2}$$

C'est une fonction de transfert du second ordre dont les éléments caractéristiques sont :

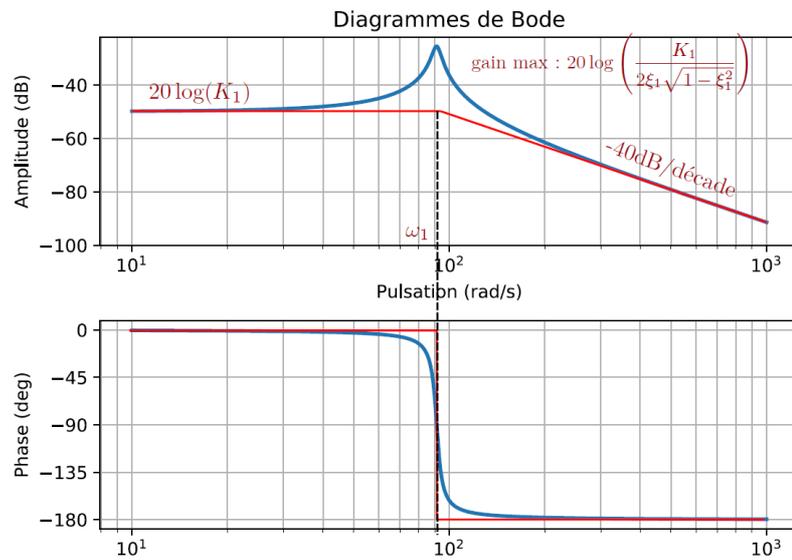
☞ De gain statique : $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ rad.N}^{-1}$

☞ De pulsation propre : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91 \text{ rad.s}^{-1}$

☞ De facteur d'amortissement : $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{J_x} \cdot \frac{f}{k}} = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{k \cdot J_x}} = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,031$

La perturbation $F_c(p)$ étant fréquentielle, on choisit de commenter la réponse fréquentielle de cette fonction de transfert. Le diagramme de Bode de cette fonction de transfert du second ordre présente une résonance car $\left(\xi_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ à la pulsation $\omega_r = \omega_1 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi_1^2} = 91 \text{ rad.s}^{-1}$ avec un gain maximal de :

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \cdot \log\left(\frac{K_1}{2 \cdot \xi_1 \cdot \sqrt{1 - \xi_1^2}}\right) = -25,5 \text{ dB.}$$



III-A – Réglage de la loi de commande – Valeur maximale de K_p

Question 21

A partir du schéma bloc de la figure 11 on a par la formule de Black :

$$H_{Bo}(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_p}{p} \cdot \frac{H_m(p) \cdot K_3 \cdot p \cdot H_1(p)}{1 + H_m(p) \cdot K_3 \cdot p \cdot H_1(p) \cdot K_V}$$

Question 22

N'ayant pas la valeur de K_3 il n'est pas possible de vérifier que la FTBO est une fonction de transfert dont tous les pôles sont à partie réelle négative. Et donc de vérifier que cette FTBO est stable.

Supposons que c'est le cas. Alors on peut appliquer le critère du revers qui nous permet de dire que la FTBF est stable si le gain dynamique de la FTBO (en décibel) est négatif à la pulsation ω_{-180° où la phase de cette FTBO est de -180° .

Par lecture sur la figure 12 on obtient : $\omega_{-180^\circ} \approx 130 \text{ rad.s}^{-1}$. A cette pulsation on lit que pour $K_p = 1$ on a un gain de la FTBO de -64 dB . Donc le gain sera négatif à la condition que $20 \cdot \log K_p < 64 \text{ dB}$.

Donc la valeur maximale du gain K_p assurant la stabilité de la FTBF est de :

$$K_{p,max} = 10^{64/20} = 1 \text{ 600 rad.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Remarque : L'unité de K_p est déduite du fait que de la figure 8 on en déduit que $U(pp)$ est une grandeur physique en rad.s^{-1} .

III-B – Réglage de la loi de commande – Vérification de la valeur de K_p

Question 23

Le cahier des charges (diagramme d'exigences de la figure 3) impose un déplacement maximal de 2 mm avec un effort cardiaque de 5 N. Soit un gain maximal de : $G_{max} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot m \cdot N^{-1}$.

Question 24

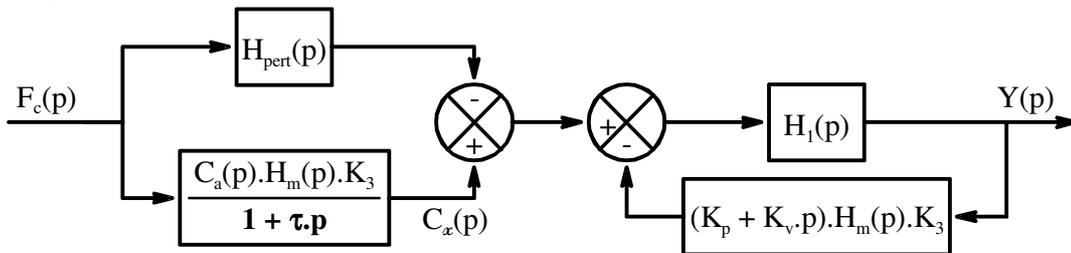
La figure 13 nous montre alors qu'il est nécessaire pour avoir $\left| \frac{Y(j.\omega)}{F_c(j.\omega)} \right| \leq G_{max}$ d'avoir un gain K_p supérieur à $2\,800 \text{ rad} \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$. Il faut donc un gain minimal pour K_p de : **$K_{p,min} = 2\,800 \text{ rad} \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$**

Cette valeur minimale est en contradiction avec la valeur maximale conditionnant la stabilité de la FTBF. En effet : $K_{p,min} > K_{p,max}$.

III-C – Amélioration des performances par compensation de l'effort cardiaque.

Question 25

Sur la figure 15, en déplaçant le comparateur de gauche à droite du comparateur de droite on obtient le schéma bloc équivalent ci-dessous :



On obtient ainsi par application de la formule de black à la boucle de droite :

$$H_{F_c}^{est}(p) = \frac{Y(p)}{F_c(p)} = \left[\frac{C_a(p) \cdot H_m(p) \cdot K_3}{1 + \tau \cdot p} - H_{pert}(p) \right] \cdot \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot (K_p + K_v \cdot p) \cdot H_m(p) \cdot K_3}$$

Ou : **$H_{F_c}^{est}(p) = \frac{Y(p)}{F_c(p)} = \frac{[C_a(p) \cdot H_m(p) \cdot K_3 - H_{pert}(p) \cdot (1 + \tau \cdot p)] \cdot H_1(p)}{(1 + \tau \cdot p) + H_1(p) \cdot (K_p + K_v \cdot p) \cdot H_m(p) \cdot K_3 \cdot (1 + \tau \cdot p)}$**

Question 26

Pour rejeter la perturbation $F_c(p)$ il est nécessaire que $H_{F_c}^{est}(p) = 0$. On en déduit qu'il faut :

$$C_a(p) \cdot H_m(p) \cdot K_3 - H_{pert}(p) \cdot (1 + \tau \cdot p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_a(p) = \frac{H_{pert}(p) \cdot (1 + \tau \cdot p)}{H_m(p) \cdot K_3}$$

Avec la forme approchée de $H_m(p) = \frac{p^2}{p^2 + 2 \cdot \xi_m \cdot \omega_m \cdot p + \omega_m^2}$ Et sachant que $H_{pert}(p) = L$ On obtient :

$$C_a(p) = \frac{L \cdot (1 + \tau \cdot p) \cdot (p^2 + 2 \cdot \xi_m \cdot \omega_m \cdot p + \omega_m^2)}{K_3 \cdot p^2}$$

Question 27

Le degré du polynôme du numérateur est plus élevé que celui du polynôme du dénominateur. Ce correcteur ne respecte donc pas le principe de causalité.

On en déduit qu'il sera difficile de le réaliser et que si on y parvient numériquement il amplifiera le gain aux hautes fréquences. Et donc augmentera le bruit. La seule solution est alors de lui adjoindre un filtre passe bas, pour réduire le bruit et le conformer au principe de causalité.

Question 28

Dans le diagramme d'exigence de la figure 3 il est précisé que la pulsation de l'effort cardiaque sinusoïdal $f_c(t) = F \cdot \sin(\omega \cdot t)$ est comprise dans l'intervalle $[6,3 \text{ rad.s}^{-1} ; 23 \text{ rad.s}^{-1}]$. Or sur le diagramme de Bode de $C_a(p)$ de la figure 16 on voit que sur cet intervalle la phase ne varie que de -15° à 0° et le gain que de 4 à 6 dB.

Donc sur l'intervalle $[6,3 \text{ rad.s}^{-1} ; 23 \text{ rad.s}^{-1}]$ qui correspond à notre domaine d'utilisation, le correcteur $C_a(p)$ peut être assimilé à un gain pur :

$$C_a(p) = K_a = 10^{5/20} = 1,8 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$$

Question 29

On voit sur la figure 17 qu'en boucle ouverte ou en boucle fermée sans anticipation dans l'intervalle $[6,3 \text{ rad.s}^{-1} ; 23 \text{ rad.s}^{-1}]$ le gain $\left| \frac{Y(j.\omega)}{F_c(j.\omega)} \right|$ est sensiblement le même et est constant à -60 dB .

En boucle fermée avec anticipation le gain $\left| \frac{Y(j.\omega)}{F_c(j.\omega)} \right|$ varie dans l'intervalle $[6,3 \text{ rad.s}^{-1} ; 23 \text{ rad.s}^{-1}]$ de -67 dB à -70 dB . L'anticipation permet donc de réduire le gain de -7 à -10 dB soit une atténuation de l'amplitude de $y(t)$ multipliée par un facteur variant de $10^{-7/20} = 0,45$ à $10^{-10/20} = 0,32$.

La figure 18 montre que pour une période $T_c = 1 \text{ s}$ de la perturbation cardiaque soit une pulsation $\omega_c = \frac{2.\pi}{T_c} = 6,3 \text{ rad.s}^{-1}$ l'amplitude des de $y(t)$ est de $\pm 2 \text{ mm}$ ce qui respecte juste le cahier des charges.

Cependant à cette pulsation l'atténuation est maximale (-10 dB : facteur 0,32). Ce qui signifie que pour des pulsations plus élevées (23 rad.s^{-1}) où l'atténuation est moindre (-7 dB : facteur 0,45) l'amplitude sera probablement plus élevée : $\pm 2 \times \frac{0,45}{0,32} \approx 2,8 \text{ mm}$. Ainsi le cahier des charges ne sera pas respecté.