

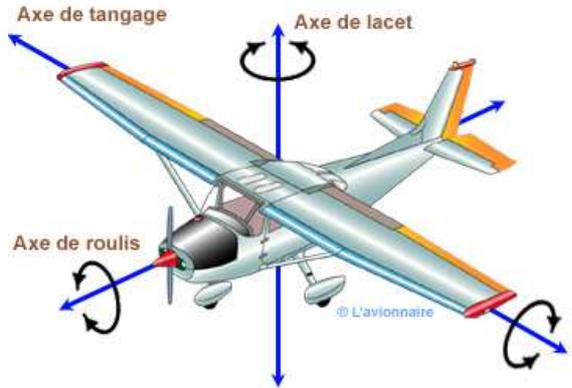
# TP : Gyromètre rotatif

## Présentation

### Mise en situation

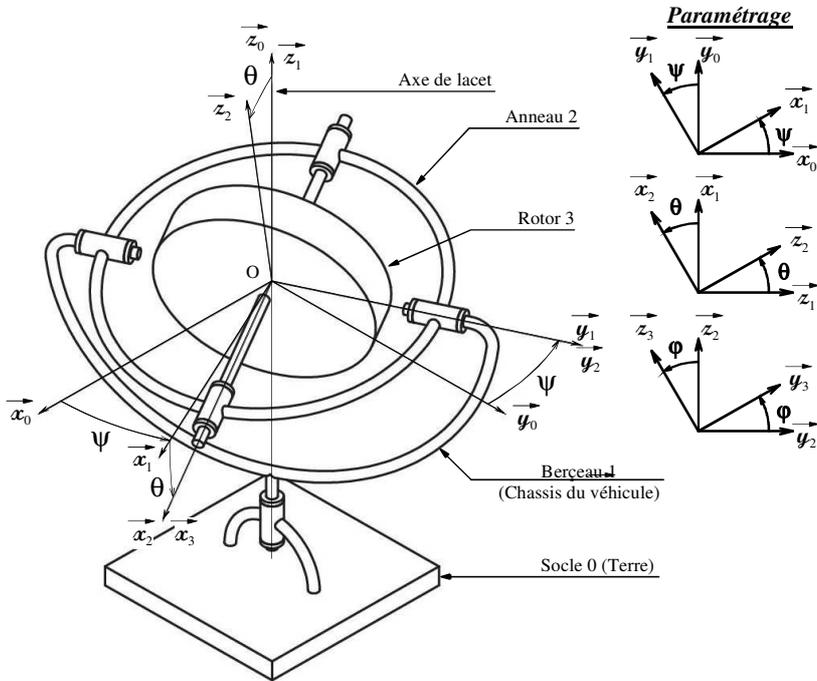
La mesure d'une vitesse de rotation autour d'un axe est souvent nécessaire à la commande des systèmes.

Le gyromètre est un instrument permettant cette mesure, particulièrement dans l'aéronautique, car il permet la mesure d'une vitesse de rotation autour d'un axe non associé à une liaison entre solides. On peut ainsi mesurer les vitesses de rotation d'un avion en lacet roulis et tangage en utilisant trois gyromètres.



Aujourd'hui la miniaturisation des capteurs gyrométriques conduit à l'utilisation de gyromètres vibratoire. Cependant nous nous proposons ici d'étudier un gyromètre rotatif.

### Description du système étudié



Dans ce TP, nous nous proposons d'étudier le gyromètre permettant de mesurer la vitesse de rotation de l'avion autour de son axe de lacet. Le système étudié est composé de 4 solides : Le socle 0 (fixé sur la terre) le berceau 1 (fixé sur la carlingue de l'avion), l'anneau 2 et le rotor 3. A chaque solide  $i$  on lie un repère :  $\mathcal{R}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ .

Le rotor 3 et l'anneau 2 sont des pièces de révolution d'axes  $(O, \vec{z}_2)$  et  $(O, \vec{x}_3)$ . Remarque : L'anneau 2 n'est pas réellement une pièce de révolution mais son opérateur d'inertie a les mêmes propriétés qu'une pièce de révolution.

Dans le cas général, le point O n'est pas un point fixe par rapport au repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  mais c'est le centre de gravité des solides 2 et 3.

- On suppose que les vitesses de rotation autour des axes de roulis et de tangage sont nulles. D'où la modélisation :
- ☞ Le berceau 1 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0) = (O, \vec{z}_1)$  sur le socle 0.
  - ☞ L'anneau 2 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y}_1) = (O, \vec{y}_2)$  sur le berceau 1.
  - ☞ Le rotor 3 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_2) = (O, \vec{x}_3)$  sur l'anneau 2.

On pose les angles d'Euler :  $\psi$  (angle de précession),  $\theta$  (angle de nutation), et  $\phi$  (angle de rotation propre), les paramètres associés à ces trois liaisons pivot : Voir paramétrage ci-dessus.

Un moteur fait tourner le rotor 3 par rapport à l'anneau 2 à une vitesse constante :  $\dot{\phi} = \omega = C^{te}$

Les liaisons pivot son parfaites sauf la liaison 1-2 qui à un frottement visqueux de coefficient  $b$ . Le moment par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_2)$  de l'action de 1 sur 2 est donc :  $\mathcal{M}_{Oy_2}(1 \rightarrow 2) = -b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2$ .

D'autre part un ressort de torsion  $R$  de raideur  $k$  placé entre 1 et 2 crée un moment par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_2)$ . Ce moment étant nul lorsque  $\theta = 0$  ce moment est de :  $\mathcal{M}_{Oy_2}(R \rightarrow 2) = -k \cdot \theta \cdot \vec{y}_2$ .

## Objectif de l'étude

Le but du TP est de montrer que la mesure de l'angle  $\theta$  entre le berceau 1 et l'anneau 2 permet de mesurer la vitesse de rotation  $\dot{\psi}$  du berceau 1 par rapport au socle 0 en mesurant l'angle  $\theta$  entre le berceau 1 et l'anneau 2. Pour cela on déterminera la fonction de transfert entre  $\dot{\psi}$  et  $\theta$ .

Enfin par identification de cette fonction de transfert par la réponse à un échelon de vitesse  $\dot{\psi}$  (avec une simulation numérique à l'aide du logiciel "Meca3D") nous déterminerons la raideur  $k$  du ressort et le coefficient de frottement visqueux  $b$ .

## 1- Observation

### 1.1- Observation à partir d'une vidéo et de simulations "Meca3D"

Copier le dossier "TP Gyrometre" du dossier de votre classe dans votre propre dossier. Puis lire la vidéo "Tabouret.avi" qui montre une expérience destinée à mettre en évidence le couple gyroscopique.

### 1.2- Simulation avec le logiciel « Meca 3D »

Ouvrir avec Solidworks le fichier assemblage « Gyromètre.SLDASM ».

Lancer une étude dynamique (Clic droit sur « Analyse » puis choisir « calcul mécanique ») sans modifier les paramètres prédéfinis.

Visualiser le mouvement ainsi obtenu. Puis reprendre quatre fois la même simulation en entrant cette fois une vitesse de rotation du berceau par rapport au socle de  $-20$ ,  $-10$ ,  $10$  et  $20$  tr/min.

### 1.3- Conclusion

Au vu des résultats des simulations faites avec « Méca 3D », dire quelle relation on peut à priori établir en  $\dot{\psi}$  et  $\theta$ .

***A priori l'angle de nutation  $\theta$  est proportionnel à la vitesse de rotation autour de l'axe de précession  $\dot{\psi}$ .***

## 2- Mise en équation

### 2.1- Géométrie des masses

2.1.1- Donner la forme dans les repères  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  des matrices d'inertie  $\overline{\overline{I_{0(2)}}}$  de l'anneau 2 et  $\overline{\overline{I_{0(3)}}}$  du rotor 3 au point O centre du rotor et de l'anneau.

$$\overline{\overline{I_{0(2)}}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\overline{I_{0(3)}}} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$

2.1.2- Justifier que la matrice  $\overline{\overline{I_{0(3)}}}$  à la même expression dans les repères  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ .

***Le rotor 3 est une pièce de révolution d'axe  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ , or le passage du repère  $\mathcal{R}_2$  au repère  $\mathcal{R}_3$  se fait par une rotation autour cet axe. Donc la matrice d'inertie du rotor à la même expression dans les repères  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ .***

**2.1.3-** Ouvrir dans Solidworks les pièces rotor 3 et anneau 2 et donner en  $\text{kg.m}^2$  les valeurs numériques de  $A_2$ ,  $A_3$ , et  $B_3$ . Attention les axes  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  de la pièce dans Solidworks sont différents des axes  $\vec{x}_3$ ,  $\vec{y}_3$  et  $\vec{z}_3$  ou  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{y}_2$  et  $\vec{z}_2$

$$A_2 = 4,178.10^{-5} \text{ kg.m}^2 \quad A_3 = 5,302.10^{-4} \text{ kg.m}^2 \quad B_3 = 3,168.10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

**2.2- Calculs de cinétique**

**2.2.1-** Donner dans le repère  $\mathcal{R}_2$ , en fonction de  $\omega$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\theta$ , les coordonnées des taux de rotation suivant :  $\overline{\Omega(2/0)}$  et  $\overline{\Omega(3/0)}$ .

$$\overline{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \quad \overline{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} \omega - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

**2.2.2-** Calculer au point O en fonction de  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $\omega$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\theta$ , dans le repère  $\mathcal{R}_2$ , les coordonnées de  $\overline{\sigma_0(3/0)}$  moment cinétique en O du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0.

$$\overline{\sigma_0(3/0)} = \overline{I_{O(3)}} \cdot \overline{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \cdot \begin{pmatrix} \omega - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\overline{\sigma_0(3/0)} = \begin{pmatrix} A_3 \cdot (\omega - \dot{\psi} \sin \theta) \\ B_3 \cdot \dot{\theta} \\ B_3 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

**2.2.3-** Calculer en fonction de  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $\omega$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\theta$  et  $\ddot{\theta}$ , la projection sur l'axe  $\vec{y}_2$  du moment dynamique en O du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0 :  $\overline{\delta_0(3/0)} \cdot \vec{y}_2$ . Rappel :  $\omega = C^{te}$  donc  $\dot{\omega} = 0$

$$\overline{\delta_0(3/0)} = \left( \frac{d \overline{\sigma_0(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left( \frac{d \overline{\sigma_0(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \overline{\Omega_{2/0}} \wedge \overline{\sigma_0(3/0)}$$

$$\overline{\delta_0(3/0)} = \begin{pmatrix} -A_3 \cdot (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cos \theta) \\ B_3 \cdot \ddot{\theta} \\ B_3 \cdot (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \wedge \begin{pmatrix} A_3 \cdot (\omega - \dot{\psi} \sin \theta) \\ B_3 \cdot \dot{\theta} \\ B_3 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\overline{\delta_0(3/0)} \cdot \vec{y}_2 = B_3 \cdot \ddot{\theta} + A_3 \cdot \omega \dot{\psi} \cos \theta + (B_3 - A_3) \cdot \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

**2.2.4-** Linéariser à l'ordre 1 l'expression de  $\overline{\delta_0(3/0)} \cdot \vec{y}_2$  pour des petits angles  $\theta$ .

Si  $\theta$  est petit alors  $\cos \theta \approx 1$  et  $\sin \theta \approx \theta$  on obtient donc :

$$\overline{\delta_0(3/0)} \cdot \vec{y}_2 \approx B_3 \cdot \ddot{\theta} + A_3 \cdot \omega \dot{\psi} + (B_3 - A_3) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \theta$$

2.2.5- Calculer au point O en fonction de  $A_2, C_2, \dot{\psi}, \dot{\theta}$  et  $\theta$ , dans le repère  $\mathcal{R}_2$ , les coordonnées de  $\overline{\sigma_0(2/0)}$  moment cinétique en O du solide 2 dans son mouvement par rapport à 0.

$$\overline{\sigma_0(2/0)} = \overline{I_{O(2)}} \cdot \overline{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\overline{\sigma_0(2/0)} = \begin{pmatrix} -A_2 \cdot \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \cdot \dot{\theta} \\ C_2 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

2.2.6- Calculer en fonction de  $A_2, C_2, \dot{\psi}, \theta$  et  $\ddot{\theta}$ , la projection sur l'axe  $\overline{y_2}$  du moment dynamique en O du solide 2 dans son mouvement par rapport à 0.  $\delta_0(2/0) \cdot \overline{y_2}$ .

$$\delta_0(2/0) = \left( \frac{d \overline{\sigma_0(2/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left( \frac{d \overline{\sigma_0(2/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \overline{\Omega_{2/0}} \wedge \overline{\sigma_0(2/0)}$$

$$\delta_0(2/0) = \begin{pmatrix} -A_2 \cdot (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cos \theta) \\ A_2 \cdot \ddot{\theta} \\ C_2 \cdot (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \wedge \begin{pmatrix} -A_2 \cdot \dot{\psi} \sin \theta \\ A_2 \cdot \dot{\theta} \\ C_2 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

$$\delta_0(2/0) \cdot \overline{y_2} = A_2 \cdot \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

2.2.7- Linéariser à l'ordre 1 l'expression de  $\delta_0(2/0) \cdot \overline{y_2}$  pour des petits angles  $\theta$ .

Si  $\theta$  est petit alors  $\cos \theta \approx 1$  et  $\sin \theta \approx \theta$  on obtient donc :

$$\delta_0(2/0) \cdot \overline{y_2} \approx A_2 \cdot \ddot{\theta} + (C_2 - A_2) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \theta$$

### 2.3- Application du PFD

2.3.1- Isoler le système S constitué de l'anneau 2 et du rotor 3 :  $S = \{2,3\}$  et faire l'inventaire des actions extérieures s'appliquant sur ce système :

- ☞ Action du berceau 1 sur l'anneau 2 due à la liaison pivot d'axe  $(O, \overline{y_2})$
- ☞ Poids de l'anneau 2 : Force  $\overline{P_2}$  appliquée en O
- ☞ Poids du rotor 3 : Force  $\overline{P_3}$  appliquée en O
- ☞ Action du ressort de torsion R sur l'anneau 2

2.3.2- En déduire le théorème à écrire pour établir une équation différentielle ne faisant pas intervenir les inconnues sthéniques des liaisons pivot.

Comme on a une action de liaison pivot d'axe  $(O, \overline{y_2})$  nous allons écrire l'équation du théorème des moments par rapport à l'axe  $(O, \overline{y_2})$ .

**2.3.3-** La vitesse de rotation propre  $\omega = \dot{\phi}$  (de l'ordre de plusieurs milliers de tours par minutes) est importante devant les vitesses de rotation  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\theta}$  des axes de précession et de nutation. En déduire une expression simplifiée de la projection sur l'axe  $\vec{y}_2$  du moment dynamique en O du système S constitué des solides 2 et 3 dans leur mouvement par rapport à 0.

$$\delta_0(\vec{S}/\vec{0}) \cdot \vec{y}_2 = \delta_0(\vec{2}/\vec{0}) \cdot \vec{y}_2 + \delta_0(\vec{3}/\vec{0}) \cdot \vec{y}_2$$

$$\delta_0(\vec{S}/\vec{0}) \cdot \vec{y}_2 = (A_2 + B_3) \cdot \ddot{\theta} + (C_2 - A_2 + B_3 - C_3) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \theta + A_3 \cdot \omega \cdot \dot{\psi}$$

**Sachant que :  $\omega \gg \dot{\psi}$  on a :  $\omega \cdot \dot{\psi} \gg \dot{\psi}^2 \cdot \theta$  on a donc l'expression simplifiée :**

$$\delta_0(\vec{S}/\vec{0}) \cdot \vec{y}_2 \approx (A_2 + B_3) \cdot \ddot{\theta} + A_3 \cdot \omega \cdot \dot{\psi}$$

**2.3.4-** En déduire l'équation différentielle liant les paramètres  $\theta$  et  $\psi$ .

**Le TMD en O en projection sur  $\vec{y}_2$  donne :  $(A_2 + B_3) \cdot \ddot{\theta} + A_3 \cdot \omega \cdot \dot{\psi} = -b \cdot \dot{\theta} - k \cdot \theta$**

$$\text{Soit :} \quad (A_2 + B_3) \cdot \ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} + k \cdot \theta = -A_3 \cdot \omega \cdot \dot{\psi}$$

**2.4- Eléments caractéristiques du capteur gyrométrique**

Le capteur gyrométrique est constitué du gyromètre étudié ci-dessus, d'un potentiomètre rotatif et d'un réducteur à engrenage permettant de transmettre la rotation de l'anneau 2 par rapport au berceau 1 à l'axe de rotation du potentiomètre.

Le potentiomètre est alimenté avec une tension de  $U_0 = 5V$  et a une course électrique  $c_\alpha = 94^\circ$ .

Le réducteur à un rapport de réduction :  $\rho = \frac{d\alpha}{d\theta} = 2$  où  $\alpha$  est l'angle de rotation du potentiomètre. La position des axes du réducteur est initialisée de telle sorte que pour  $\theta = 0$  on a  $\alpha = 47^\circ$ .

**2.4.1-** On note  $\Theta(p)$  et  $Y(p)$  les transformées de Laplace des fonctions  $\theta(t)$  et  $\dot{\psi}(t)$ . Les conditions initiales étant nulles, déterminer l'expression de la fonction de transfert du gyromètre :  $H(p) = \frac{\Theta(p)}{Y(p)}$ . Puis donner les éléments caractéristiques de cette fonction de transfert : Gain statique  $K_H$ , pulsation propre  $\omega_0$  et facteur d'amortissement  $m$ .

**Les conditions initiales étant nulles l'équation différentielle de la question 2.3.4 donne :  $[(A_2 + B_3) \cdot p^2 + b \cdot p + k] \cdot \Theta(p) = -A_3 \cdot \omega \cdot \dot{\Psi}(p)$  Donc :**

$$H_G(p) = \frac{\Theta(p)}{\dot{\Psi}(p)} = \frac{-A_3 \cdot \omega}{(A_2 + B_3) \cdot p^2 + b \cdot p + k} = \frac{-\frac{A_3 \cdot \omega}{k}}{1 + \frac{b}{k} \cdot p + \frac{A_2 + B_3}{k} \cdot p^2}$$

$$K_H = \frac{-A_3 \cdot \omega}{k} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{A_2 + B_3}} \quad \xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{b}{k} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{k \cdot (A_2 + B_3)}}$$

**2.4.2-** Effectuer une simulation numérique à l'aide du logiciel Méca3D avec une vitesse de rotation du berceau par rapport au socle de  $\dot{\psi} = -60^\circ/\text{s}$ . Et déterminer les valeurs numériques (avec les unités SI) des éléments caractéristiques de la fonction de transfert.

$$K_H = \frac{\theta(\infty)}{\dot{\psi}} = \frac{-11,53}{60} = -0,192 \text{ s}$$

$$D\% = \frac{14,19 - 11,53}{11,53} = 0,23 = 23,0\% \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln 0,23)^2}{\pi^2 + (\ln 0,23)^2}} = 0,42$$

$$\frac{T}{2} = 0,0534 \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,0534} = 58,83 \text{ rad.s}^{-1} \quad \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 64,83 \text{ rad.s}^{-1}$$

**2.4.3-** Déterminer le gain  $K_C$  en  $\text{V}/(\text{deg.s}^{-1})$  du capteur gyrométrique ainsi que sa plage de mesure.  $K_C = \frac{u(\infty)}{\dot{\psi}_0}$  où  $u(t)$  est la tension de sortie du potentiomètre et  $\dot{\psi}_0$  est la vitesse de rotation du berceau par rapport au socle ( $\dot{\psi}_0$  est constante). Lire également sur le résultat Méca3D son temps de réponse à 5%.

$$\text{Course du potentiomètre : } c_\alpha = 94^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{Course de l'anneau 2 : } c_2 = \frac{c_\alpha}{\rho} = c_\alpha \cdot \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{94^\circ}{2} = 47^\circ$$

$$\text{Gain du capteur potentiométrique (alimenté en 9 V) : } K_p = \frac{5}{47} \text{ V.deg}^{-1}$$

$$\text{Gain du gyromètre : } K = K_p \cdot K_H = \frac{5}{47} \text{ V.deg}^{-1} \times 0,192 \text{ s}^{-1} = 0,02 \text{ V.s.deg}^{-1} = 0,02 \text{ V}/(\text{deg/s})$$

$$\text{Plage pour la tension 5 v} \quad \Rightarrow \quad \text{Plage de mesure du gyromètre : } \frac{5}{0,02} = 250^\circ/\text{s} = \pm 125 \text{ deg/s}$$

**2.4.4-** Déterminer la raideur  $k$  (en  $\text{N.m.rad}^{-1}$ ) du ressort de torsion ainsi que le coefficient de frottement visqueux  $b$  (en  $\text{N.m.s.rad}^{-1}$ ) de la liaison pivot entre le berceau 1 et l'anneau 2. Puis vérifier vos valeurs numériques dans les paramètres du modèle numérique de Méca3D.

**Raideur du ressort de torsion :**

$$k = \omega_0^2 \cdot (A_2 + B_3) = 64,83^2 \times (4,178 \cdot 10^{-5} + 3,168 \cdot 10^{-4}) = 1,51 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

**Coefficient de frottement visqueux**

$$b = \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot k = \frac{2 \times 0,42}{64,83} \times 1,51 = 0,020 \text{ N.m.rad}^{-1}$$