

Partie 1 : Stabilité du robot

Question 1

Si le point H_S où le moment de l'action du sol sur le pied existe alors on a :

$$M_{H_S}(\overrightarrow{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}) = \vec{0} = M_{O_S}(\overrightarrow{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}) + \overrightarrow{H_S O_S} \wedge \overrightarrow{R_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}}$$

$$\vec{0} = b. \int_{(M \in \Sigma)} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M). \overrightarrow{z_0}. dy - Y_{H_S}. \overrightarrow{y_0} \wedge b. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). \overrightarrow{z_0}. dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M \in \Sigma)} y. \overrightarrow{y_0} \wedge p(M). \overrightarrow{z_0}. dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} \overrightarrow{y_0} \wedge p(M). \overrightarrow{z_0}. dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). \overrightarrow{x_0}. dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). \overrightarrow{x_0}. dy = \left[\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy \right]. \overrightarrow{x_0}$$

Or $\forall M \in \Sigma, p(M) > 0$ Donc : $\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy > 0$ Donc le point H_S existe bien et on a :

$$Y_{H_S} = \frac{\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy}{\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy}$$

Donc le torseur de l'action du sol sur le pied est bien un glisseur d'axe passant par H_S tel que :

$$\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S}. \overrightarrow{y_0}$$

Question 2

$\forall M \in \Sigma$ on a : $y < Y_{C_S}$ On en déduit que : $\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy < Y_{C_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy$

Soit : $Y_{H_S} = \frac{\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy}{\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy} < Y_{C_S}$ Donc ayant : **$Y_{H_S} < Y_{C_S}$ on a : $M \in [O_S, C_S]$**

Question 3

Par un raisonnement identique au précédent :

Si le point H_S où le moment de l'action du sol sur le pied existe alors on a :

$$M_{H_S}(\overrightarrow{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}) = \vec{0} = M_{O_S}(\overrightarrow{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}) + \overrightarrow{H_S O_S} \wedge \overrightarrow{R_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}}$$

$$\vec{0} = b. \int_{(M \in \Sigma)} \overrightarrow{O_S M} \wedge [p(M). \overrightarrow{z_0} + t(M). \overrightarrow{y_0}]. dy - Y_{H_S}. \overrightarrow{y_0} \wedge b. \int_{(M \in \Sigma)} [p(M). \overrightarrow{z_0} + t(M). \overrightarrow{y_0}]. dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M \in \Sigma)} y. \overrightarrow{y_0} \wedge [p(M). \overrightarrow{z_0} + t(M). \overrightarrow{y_0}]. dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} \overrightarrow{y_0} \wedge [p(M). \overrightarrow{z_0} + t(M). \overrightarrow{y_0}]. dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). \overrightarrow{x_0}. dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). \overrightarrow{x_0}. dy = \left[\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy - Y_{H_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy \right]. \overrightarrow{x_0}$$

Or $\forall M \in \Sigma, p(M) > 0$ Donc : $\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy > 0$ Donc le point H_S existe bien et on a :

$$Y_{H_S} = \frac{\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy}{\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy}$$

Donc le torseur de l'action du sol sur le pied est bien un glisseur d'axe passant par H_S tel que :

$$\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S}. \overrightarrow{y_0}$$

$\forall M \in \Sigma$ on a : $y < Y_{C_S}$ On en déduit que : $\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy < Y_{C_S}. \int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy$

Soit : $Y_{H_S} = \frac{\int_{(M \in \Sigma)} y.p(M). dy}{\int_{(M \in \Sigma)} p(M). dy} < Y_{C_S}$ Donc ayant : **$Y_{H_S} < Y_{C_S}$ on a : $M \in [O_S, C_S]$**

Question 4

Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système {1 + 2} sont :

- ☞ Le poids : Une force de résultante : $\vec{P} = -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G
- ☞ L'action du sol sur le pied : Une force de résultante $\vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}$ appliquée en H_S

On note $\vec{a}_{G \in 1/\text{Sol}}$ le vecteur accélération du centre d'inertie G de l'ensemble {1 + 2}. L'application du théorème de la résultante dynamique s'écrit donc :

$$m_1 \cdot \vec{a}_{G \in 1/\text{Sol}} = \vec{P} + \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \Leftrightarrow m_1 \cdot \frac{d^2 \vec{Y}_G}{dt^2} \cdot \vec{y}_0 = -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 + N_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} \cdot \vec{z}_0 + T_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} \cdot \vec{y}_0 \quad (a)$$

D'autre part le non basculement du robot se traduit par le fait que le torse reste en mouvement de translation par rapport au sol. Donc cela se traduit par le fait que le moment dynamique au centre d'inertie G de l'ensemble {1 + 2} dans son mouvement par rapport au sol est nul. Soit, par application du théorème du moment dynamique au centre d'inertie G de {1 + 2} :

$$\vec{0} = \vec{GG} \wedge \vec{P} + \vec{GH}_S \wedge \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} = \vec{0} + [\vec{GO}_S \wedge \vec{O}_S \vec{H}_S] \wedge \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \\ [-y_G(t) \cdot \vec{y}_0 + z_G \cdot \vec{z}_0 + Y_{H_S} \cdot \vec{y}_0] \wedge [N_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} \cdot \vec{z}_0 + T_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} \cdot \vec{y}_0] = \vec{0} \quad (b)$$

- On obtient donc :
- ☞ Par projection de (a) sur $\vec{y}_0$: $T_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} = m_1 \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$
 - ☞ Par projection de (a) sur $\vec{z}_0$: $N_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} - m_1 \cdot g = 0$
 - ☞ Par projection de (b) sur $\vec{x}_0$: $(Y_{H_S} - y_G(t)) \cdot N_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} + z_G \cdot T_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}} = 0$

De ces équations on en déduit que la condition de non basculement s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$

D'autre part la condition de non glissement du pied sur le sol s'écrit : $|T_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}}| \leq \mu \cdot |N_{\text{Sol} \rightarrow \text{pied}}|$

Soit d'après les deux premières équations précédentes : $m_1 \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \leq \mu \cdot m_1 \cdot g$

D'où la condition de non glissement du pied sur le sol : $\mu \geq \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$

Question 5

La condition de non basculement s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$ Or : $-\frac{\text{foulée}}{4} \leq Y_G \leq \frac{\text{foulée}}{4}$

D'où la condition de non basculement s'écrit : $-\frac{\text{foulée}}{4} - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \leq Y_{H_S} \leq \frac{\text{foulée}}{4} - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$

Sachant que : $0 \leq Y_{H_S} \leq L$, le non basculement induit : $-\frac{\text{foulée}}{4} - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \leq 0$ (tjrs vérifié)

$$\text{Et aussi : } L \leq \frac{\text{foulée}}{4} - \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \Leftrightarrow \text{foulée} \geq 4 \cdot \left[L + \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \right]$$

$$\text{Or } 4 \cdot \left[L + \frac{z_G}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \right] = 4 \times \left[300 + \frac{1\,050}{9,81} \times 1,39 \right] = 1\,790 \text{ mm}$$

Donc la condition de non basculement s'écrit : **foulée $\geq 1,79$ m**

Or le cahier des charges impose une foulée maximale de 1,5 mm.

Donc la condition de non basculement n'est pas compatible avec le cahier des charges qui exige une accélération de $1,39 \text{ m.s}^{-2}$ et une foulée inférieure à 1,5 mm

Question 6

La condition de non glissement s'écrit : $\mu \geq \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 Y_G}{dt^2} \leq \mu \cdot g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ m.s}^{-2}$

Cela n'est pas compatible avec le cahier des charges qui exige une accélération de $1,39 \text{ m.s}^{-2}$.

Partie 2 : Stabilité du robot

Question 7

L'équation différentielle du mouvement ne fera pas intervenir les inconnues de l'action de la hanche sur le tronc qui est due à une liaison pivot d'axe ($O_T, \vec{x}_0$).

Nous allons donc appliquer un théorème du moment dynamique en O_T projeté sur $\vec{x}_0$.

Question 8

Calculons le moment dynamique du tronc dans son mouvement par rapport à 0

G_T étant le centre d'inertie du tronc 1 :

$$\vec{\sigma}_{O_T}(1/0) = I_{O_T}(1) \cdot \vec{\Omega}_{1/0} + m_1 \cdot \vec{O_T G_T} \wedge \vec{V}_{O_T \in 1/0} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} + m_1 \cdot \vec{Z_G} \cdot \vec{z}_1 \wedge v \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{\sigma}_{O_T}(1/0) = A_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 - m_1 \cdot Z_G \cdot v \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{x}_1 = [A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot Z_G \cdot v \cdot \cos(\alpha)] \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\delta}_{O_T}(1/0) = \left(\frac{d \vec{\sigma}_{O_T}(1/0)}{dt} \right)_{B_0} + m_1 \cdot \vec{V}_{O_T/0} \wedge \vec{V}_{G_T \in 1/0} =$$

Or O_T étant le centre de la liaison pivot entre 0 et 1 : $\vec{V}_{G_T \in 1/0} = \vec{V}_{O_T \in 1/0} + \vec{G_T O_T} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

On en déduit : $\vec{V}_{G_T \in 1/0} = v \cdot \vec{y}_0 - Z_G \cdot \vec{z}_1 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_0$ avec : $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$

Soit : $\vec{V}_{G_T \in 1/0} = v \cdot \vec{y}_0 - Z_G \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$

Donc : $m_1 \cdot \vec{V}_{O_T/0} \wedge \vec{V}_{G_T \in 1/0} = m_1 \cdot v \cdot \vec{y}_0 \wedge (v \cdot \vec{y}_0 - Z_G \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1) = -m_1 \cdot Z_G \cdot v \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{x}_0$

On en déduit : $\vec{\delta}_{O_T}(1/0) = [A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha) + m_1 \cdot Z_G \cdot v \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha)] \cdot \vec{x}_0 - m_1 \cdot Z_G \cdot v \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{x}_0$

Soit finalement : $\vec{\delta}_{O_T}(1/0) = [A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha)] \cdot \vec{x}_0$

Les actions extérieures s'appliquant sur le tronc sont :

☞ Le poids du tronc modélisé par le torseur : $\{\mathcal{J}_{\text{pes} \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_T}$

☞ L'action de la hanche sur le tronc de torseur : $\{\mathcal{J}_{\text{han} \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{h1} & 0 \\ Y_{h1} & M_{h1} \\ Z_{h1} & N_{h1} \end{Bmatrix}_{O_T} B_0$

☞ Le couple de redressement de torseur : $\{\mathcal{J}_{\text{mot} \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$

Donc le théorème du moment dynamique en O_T appliqué au tronc en projection sur $\vec{x}_0$ donne :

$$\begin{aligned} \vec{O_T G_T} \wedge -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_0 + 0 + C_R &= \vec{\delta}_{O_T}(1/0) \cdot \vec{x}_0 \Leftrightarrow -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_0 \cdot Z_G \cdot \vec{z}_1 + C_R = \vec{\delta}_{O_T}(1/0) \cdot \vec{x}_0 \\ -m_1 \cdot g \cdot Z_G \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{z}_1 + C_R &= A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow m_1 \cdot g \cdot Z_G \cdot \sin(\alpha) + C_R = A_1 \cdot \dot{\alpha} - m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Soit finalement : $A_1 \cdot \ddot{\alpha} = C_R + m_1 \cdot g \cdot Z_G \cdot \sin \alpha + m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v} \cdot \cos \alpha$

Question 9

Remarque : Avec l'équation précédente linéarisée ($\cos \alpha \approx 1$ et $\sin \alpha \approx \alpha$) et sachant que l'on a :

$C_R = \frac{C_m}{r} - \frac{J_m}{r^2} \cdot \ddot{\alpha}$. On retrouve l'équation différentielle donnée dans l'énoncé :

$$J_{\text{eq}} \cdot \ddot{\alpha}(t) = m_1 \cdot g \cdot Z_G \cdot \alpha(t) + m_1 \cdot Z_G \cdot \dot{v}(t) + \frac{C_m(t)}{r} \quad \text{Avec } J_{\text{eq}} = A_1 + \frac{J_m}{r^2} \quad \text{Et : } \dot{v}(t) = \gamma(t)$$

Les conditions d'Heaviside étant vérifiées cette équation dans le domaine de Laplace donne :

$$\alpha(p) = \frac{1}{J_{eq} p^2} \left[m_1 \cdot g \cdot Z_G \cdot \alpha(p) + m_1 \cdot Z_G \cdot \Gamma(p) + \frac{1}{r} \cdot C_m(p) \right]$$

D'autre part les autres équations différentielles passées dans le domaine de Laplace donnent :

$$I(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} (U_C(p) - E(p)) \quad \text{et : } C_m(p) = k_c \cdot I(p) \Rightarrow C_m(p) = k_c \cdot \frac{1}{R + L \cdot p} (U_C(p) - E(p))$$

$$E(p) = k_e \cdot \omega_m(p) \quad \text{Et enfin : } r = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\omega_m(t)} \quad \text{Donc : } \omega_m(p) = \frac{1}{r} \cdot p \cdot \alpha(p)$$

$$\text{Or d'après le schéma bloc : } \alpha(p) = \frac{B_7}{p^2} \cdot [B_2 \cdot \alpha(p) + B_1 \cdot \Gamma(p) + B_3 \cdot C_m(p)]$$

$$C_m(p) = B_5 \cdot H_1(p) \cdot (U_C(p) - E(p))$$

$$\text{Et enfin : } E(p) = B_6 \cdot \omega_m(p) \quad \omega_m(p) = B_4 \cdot p \cdot \alpha(p)$$

On en déduit :

$B_1 = m_1 \cdot Z_G$	$B_2 = m_1 \cdot g \cdot Z_G$	$B_3 = \frac{1}{r}$	$B_4 = \frac{1}{r}$
$B_5 = k_c$	$B_6 = k_e$	$B_7 = \frac{1}{J_{eq}}$	$H_1(p) = \frac{1}{R + L \cdot p}$

Question 10

A partir du schéma bloc et en appliquant la formule de Black on obtient :

$$H_{dyn}(p) = \frac{\frac{B_3 \cdot B_7}{p^2}}{1 - \frac{B_2 \cdot B_7}{p^2}} \quad \text{Soit : } H_{dyn}(p) = \frac{B_3 \cdot B_7}{-B_2 \cdot B_7 + p^2}$$

$$\text{Ou encore : } H_{dyn}(p) = \frac{\frac{1}{r \cdot J_{eq}}}{-\frac{m_1 \cdot g \cdot Z_G}{J_{eq}} + p^2} \quad \text{Soit : } H_{dyn}(p) = \frac{1}{-r \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G + r \cdot J_{eq} \cdot p^2}$$

Question 11

A partir du schéma bloc et en appliquant la formule de Black on obtient :

$$F(p) = \frac{B_5 \cdot H_1(p) \cdot H_{dyn}(p)}{1 + B_4 \cdot B_5 \cdot B_6 \cdot H_1(p) \cdot H_{dyn}(p) \cdot p} = \frac{B_5 \cdot \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot \frac{B_3 \cdot B_7}{-B_2 \cdot B_7 + p^2}}{1 + B_4 \cdot B_5 \cdot B_6 \cdot \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot \frac{B_3 \cdot B_7}{-B_2 \cdot B_7 + p^2} \cdot p}$$

$$\text{Soit : } F(p) = \frac{B_3 \cdot B_5 \cdot B_7}{-R \cdot B_2 \cdot B_7 + (B_3 \cdot B_4 \cdot B_5 \cdot B_6 \cdot B_7 - L \cdot B_2 \cdot B_7) \cdot p + R \cdot p^2 + L \cdot p^3}$$

$$\text{Ou encore : } F(p) = \frac{\frac{k_c}{r \cdot J_{eq}}}{-\frac{R \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G}{J_{eq}} + \left(\frac{k_c \cdot k_e}{r^2 \cdot J_{eq}} - \frac{L \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G}{J_{eq}} \right) \cdot p + R \cdot p^2 + L \cdot p^3}$$

$$\text{Soit sous forme canonique : } F(p) = \frac{-\frac{k_c}{r \cdot R \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G}}{1 + \frac{r^2 \cdot L \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G - k_c \cdot k_e}{r^2 \cdot R \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G} \cdot p - \frac{J_{eq}}{m_1 \cdot g \cdot Z_G} \cdot p^2 - \frac{L \cdot J_{eq}}{R \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G} \cdot p^3}$$

Il s'agit d'une fonction de transfert : **D'ordre 3** **de Classe 0** De gain statique $-\frac{k_c}{r \cdot R \cdot m_1 \cdot g \cdot Z_G}$

Question 12

Etant donné l'approximation on a :
$$F(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (-1 + \tau_1 p)} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p} = H_A(p) \cdot H_B(p)$$

Avec : $H_B(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}$ et : $H_A(p) = \frac{-K}{1 - \tau_1^2 p^2}$ Soit : $H_A(j\omega) = \frac{-K}{1 + \tau_1^2 \omega^2} \Rightarrow (\text{réel} < 0)$

Le gain de $H_A(p)$ est donc de : $G_{dBA}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)$

Deux asymptotes à la courbe de gain de pentes 0 dB/dec et -40 dB/dec se coupant à $\frac{1}{\tau_1^2}$

Et sa phase de : $\varphi_A(\omega) = -180^\circ$ Phase constante de -180°

Quant à $H_B(p)$, il s'agit d'un premier ordre dont la phase est de -45° à la pulsation $\frac{1}{\tau_2}$

A la pulsation de coupure $\frac{1}{\tau_2}$ La phase de $F(p)$ est donc de $-180^\circ - 45^\circ = -225^\circ$

Soit par lecture graphique : $\frac{1}{\tau_2} = 10^3$ Soit : $\tau_2 = 10^{-3} \text{ s}$

D'autre part les asymptotes à la courbe de pentes 0 dB/dec et -40 dB/dec se coupent à la pulsation de coupure de 1 rad/s égale à $\frac{1}{\tau_1^2}$. Donc : $\tau_1 = 1 \text{ s}$

Enfin l'asymptote de pente 0 dB/dec a pour ordonnée -37 dB.

Donc le gain statique -K est tel que $20 \log K = -37 \text{ dB}$ Soit : $K = 10^{-\frac{37}{20}} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad.V}^{-1}$

Question 13

On a $\tau_2 \ll \tau_1$ donc pour des pulsations petites devant $\frac{1}{\tau_2}$ la fonction $H_B(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}$ est négligeable (Gain dynamique égal à 0 dB et phase égale à 0°). Or la bande passante visée pour la FTBO est bien petite devant $\frac{1}{\tau_2}$: $\omega_{BP} = 50 \text{ rad.s}^{-1} \ll 10^3 \text{ rad.s}^{-1} = \frac{1}{\tau_2}$.

On peut donc faire l'approximation :
$$F(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (-1 + \tau_1 p)}$$

Question 14

Les pôles de cette FTBO sont : $-\frac{1}{\tau_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$. Deux pôles réels dont un est positif. La FTBO est donc instable et par conséquent la FTBF est également instable.

Question 15

a) Notons $H_{BONC}(p)$ cette FTBO non corrigée. On a alors :
$$H_{BONC}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p) \cdot H_{ci}(p)}$$

$$H_{BONC}(p) = \frac{\frac{K}{(1 + \tau_1 p) \cdot (-1 + \tau_1 p)}}{1 + \frac{K \cdot K_1 \cdot (1 + T \cdot p)}{(1 + \tau_1 p) \cdot (-1 + \tau_1 p)}} \Rightarrow H_{BONC}(p) = \frac{K}{K \cdot K_1 - 1 + K \cdot K_1 \cdot T \cdot p + \tau_1^2 \cdot p^2}$$

b) Le premier coefficient : τ_1^2 est positif tout comme le second : $K \cdot K_1 \cdot T$. Donc pour que cette nouvelle FTBO soit stable il faut que le troisième $K \cdot K_1 - 1$ soit également positif.

Soit : $K \cdot K_1 - 1 > 0 \Leftrightarrow K_1 > \frac{1}{K}$ A.N. $K_1 > 71 \text{ V.rad}^{-1}$

Question 16

La FTBO sous sa forme canonique s'écrit :
$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{\frac{K}{K.K_1 - 1}}{1 + \frac{K.K_1.T}{K.K_1 - 1} \cdot p + \frac{\tau_1^2}{K.K_1 - 1} \cdot p^2}$$

D'où La pulsation propre et le facteur d'amortissement de cette FTBO :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1} \quad \text{Et :} \quad \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1} \cdot \frac{K.K_1.T}{K.K_1 - 1} \Rightarrow \xi = \frac{K.K_1.T}{2.\tau_1.\sqrt{K.K_1 - 1}}$$

Par conséquent : $\xi = 1,7 \Leftrightarrow \frac{K.K_1.T}{2.\tau_1.\sqrt{K.K_1 - 1}} = 1,7 \Leftrightarrow \frac{3,4.\tau_1}{K.T} = \frac{K_1}{\sqrt{K.K_1 - 1}}$

Sachant que $T = \tau_1 = 1 \text{ s}$ et $K = 0,014 \text{ rad.V}^{-1}$ $\xi = 1,7 \Leftrightarrow \frac{K_1}{\sqrt{K.K_1 - 1}} = 243$

$$\xi = 1,7 \Leftrightarrow K_1^2 - 243^2 \times 0,014.K_1 + 59\,049 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K_1 = 79 \text{ V.rad}^{-1}} \text{ ou } \mathbf{K_1 = 745 \text{ V.rad}^{-1}}$$

Ces deux valeurs sont compatibles avec la stabilité de la FTBO car $K_1 > 71 \text{ V.rad}^{-1}$.

Pour ces deux valeurs de K_1 on alors les valeurs numériques de la FTBO :

	$K_1 = 79 \text{ V.rad}^{-1}$	$K_1 = 745 \text{ V.rad}^{-1}$
$\omega_0 = \frac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1}$	0,33 rad.s⁻¹	3,1 rad.s⁻¹
$K_{\text{BO}} = \frac{K}{K.K_1 - 1}$	0,132 rad.V⁻¹	1,5.10⁻³ rad.V⁻¹

Question 17

Il s'agit d'un correcteur à avance de phase. Aussi appelé proportionnel dérivé filtré.

Question 18

La phase de la FTBO non corrigée pour une pulsation $\omega > \omega_0$ est de :

$$\varphi_{\text{BONC}}(\omega) = -180^\circ - \arctan\left(\frac{2.\xi.\omega.\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{Soit pour : } \omega = \omega_{\text{BP}} = 50 \text{ rad.s}^{-1} \quad \varphi_{\text{BONC}}(\omega) = -168,4^\circ$$

Donc pour une marge de phase de $M_\varphi = 50^\circ$, il faut que la phase du correcteur à la pulsation $\omega_{\text{BP}} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ soit telle que : $50^\circ = 180^\circ - 168,4^\circ + \varphi_{\text{Cor}}(\omega_{\text{BP}}) \Rightarrow \varphi_{\text{Cor}}(\omega_{\text{BP}}) = 38,4^\circ = \varphi_m$

On en déduit donc : $\mathbf{a = \frac{1 + \sin 38,4}{1 - \sin 38,4} = 4,3}$ et : $\mathbf{T = \frac{1}{\omega_{\text{BP}} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{50 \cdot \sqrt{4,3}} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ s}}$

Question 19

Le gain dynamique de la FTBO non corrigé à ω_{BP} est de :

$$G_{\text{dBONC}}(\omega_{\text{BP}}) = 20.\log K_{\text{BO}} - 10.\log\left(\left(1 - \frac{\omega_{\text{BP}}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2 \cdot \frac{\omega_{\text{BP}}^2}{\omega_0^2}\right) = -108,3 \text{ dB}$$

Donc pour vérifier le critère de bande passante il faut : $20.\log K_P + 10.\log a = +108,3$

Soit : $\mathbf{K_P = 10^{\frac{108,3 - 10.\log a}{20}}}$ $\mathbf{K = 10^{\frac{108,3 - 10.\log 4,3}{20}} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ V.rad}^{-1}}$

Question 20

Sur la première phase on a une accélération (La perturbation est donc non nulle) qui crée une erreur de $2,4 \cdot 10^{-3}$ deg. Ensuite, à vitesse constante (perturbation nulle) l'erreur diminue fortement pour devenir nulle.

On voit sur cette réponse temporelle que :

☞ Quelque soit la perturbation **l'erreur est au maximum de $2,8 \cdot 10^{-3}$ deg** donc très inférieure à $0,5^\circ$.

Le critère de précision est donc vérifié

☞ **Le dépassement maximal de la valeur finale est d'environ $0,4 \cdot 10^{-3}$ deg** donc très inférieure à 1° .

Le critère de dépassement est donc vérifié.

☞ **Le temps de réponse à 5% est d'environ 35 ms** donc très inférieur à 0,2 s.

Le critère de temps de réponse est donc vérifié.

Par dimensionnement le correcteur vérifie les critères de bande passante et de marge de phase.

Donc ce correcteur permet bien de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges

Partie 3 : Alternier les phases d'appui sur les deux pied (marche du robot)

Question 21

A la vitesse de $5 \text{ km.h}^{-1} = 1,39 \text{ m.s}^{-1}$ pour une foulée de 1,5 m, la durée d'un cycle de marche est de : $\frac{1,5}{1,39} = 1,08 \text{ s}$.

Cela est cohérent avec le cahier des charges qui stipule que la période d'un cycle de marche ne peut pas être inférieure à 1 s.

Question 22

a) La fermeture géométrique du cycle s'écrit : $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} + \vec{EO} = \vec{0}$

Soit : $-h \cdot \vec{z_0} - r \cdot \vec{y_1} + \ell \cdot \vec{z_4} + d' \cdot \vec{y_0} + \lambda \cdot \vec{z_0} = \vec{0}$

Avec : $\vec{y_1} = \cos \alpha \cdot \vec{y_0} + \sin \alpha \cdot \vec{z_0}$ et : $\vec{z_4} = -\sin \beta \cdot \vec{y_0} + \cos \beta \cdot \vec{z_0}$

On obtient donc : ☞ En projection sur $\vec{y_0}$: $\ell \cdot \sin \beta = d' - r \cdot \cos \alpha$ (a)

☞ En projection sur $\vec{z_0}$: $\ell \cdot \cos \beta = (h - \lambda) + r \cdot \cos \alpha$ (b)

La combinaison de ces deux équations ((a)² + (b)²) donne alors l'équation :

$$\ell^2 = (h - \lambda)^2 + d'^2 + r^2 + 2 \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot (h - \lambda) - 2 \cdot r \cdot d' \cdot \cos \alpha$$

Equation de la forme : **$x^2 + b \cdot x + c = 0$** Avec : **$x = h - \lambda$**
 $b = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha$
 $c = d'^2 + r^2 - \ell^2 - 2 \cdot r \cdot d' \cdot \cos \alpha$

b) On a $-45^\circ < \alpha < 62^\circ$

Déterminons la valeur de x pour les deux valeurs extrêmes de α .

Pour $\alpha = -45^\circ$ $b = -124,5 \text{ mm}$ et : $c = -111\,200 \text{ mm}^2$

D'où l'équation : $x^2 - 124,5 \cdot x - 111\,200 = 0 \Leftrightarrow x = 401,5 \text{ mm}$ ou $x = -276,9 \text{ mm}$

On ne retient bien sûr que la solution : $x = 401,5 \text{ mm}$

Pour $\alpha = 62^\circ$ $b = 155,4 \text{ mm}$ et : $c = -109\,600 \text{ mm}^2$

D'où l'équation : $x^2 - 155,4 \cdot x - 109\,600 = 0 \Leftrightarrow x = 262,4 \text{ mm}$ ou $x = -417,8 \text{ mm}$

On ne retient bien sûr que la solution : $x = 262,4 \text{ mm}$

On en déduit la course du chariot nécessaire au débattement angulaire :

$$\Delta C = 401,5 - 262,4 = 139,1 \text{ mm}$$

Question 23

Poulie motrice et poulie réceptrice ayant le même diamètre nominal, la roue en entrée de l'engrenage conique tourne à la même vitesse que l'arbre de sortie du moto réducteur.

De même les deux roues de l'engrenage conique ayant le même nombre dents, la vis tourne à la même vitesse que la roue en entrée de l'engrenage conique et donc à la même vitesse que l'arbre de sortie du moto réducteur.

La vitesse de rotation de la vis 5 est donc de : $\frac{2 \cdot 200 \times 2 \cdot \pi}{6} \cdot 0 = 230,4 \text{ rad.s}^{-1}$

La vitesse nominale du chariot est alors de : $\frac{230,4 \cdot P_v}{2 \cdot \pi} = 36,67 \cdot P_v$

Or pour que le pied puisse parcourir le débattement angulaire imposé par le cahier des charges en moins de 0,8 s il faut une vitesse de $\frac{\Delta C}{0,8} = 174 \text{ mm.s}^{-1}$

On doit donc avoir : $36,67 \cdot P_v \geq 174$ Soit : $P_v \geq 4,75 \text{ mm}$

Question 24

Pour avoir uniquement un mouvement de tangage du pied, il faut déplacer les points B et B' par rapport au tibia à la même vitesse et dans le même sens.

Pour avoir uniquement un mouvement de roulis du pied, il faut déplacer les points B et B' par rapport au tibia à la même vitesse et en sens opposés.

Donc pour obtenir un mouvement du pied uniquement :

☞ En tangage il faut : $\omega_{50}^Z = \omega_{5'0}^Z$

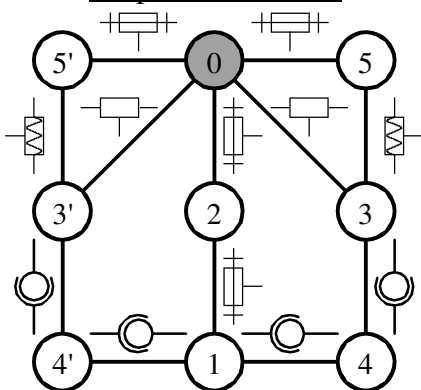
☞ En roulis il faut : $\omega_{50}^Z = -\omega_{5'0}^Z$

Question 25

Le mécanisme d'articulation de la cheville à 4 mobilités : $M = 4$

- ☞ Deux mobilités utiles correspondant aux mouvements de roulis et de tangage du pied par rapport au tibia.
- ☞ Deux mobilités internes correspondant à la rotation des deux biellettes droite et gauche autour de leur axe (CB) et (C'B')

Graphes de structure



On a pour ce mécanisme de $N_P = 9$ pièces et $N_L = 12$ liaisons :

- ☞ 4 liaisons pivot
- ☞ 2 liaisons glissière
- ☞ 2 liaisons hélicoïdales
- ☞ 4 liaisons rotule

Le mécanisme a donc

- ☞ Un nombre cyclomatique de : $\gamma = 12 - 9 + 1 = 4$
- ☞ Un nombre d'inconnues cinématique : $I_C = 8 \times 1 + 4 \times 3 = 20$
- ☞ Un nombre d'inconnues sthéniques : $I_S = 8 \times 5 + 4 \times 3 = 52$

On en déduit le degré d'hyperstatisme du mécanisme :

$$H = 6 \cdot \gamma + M - I_C = 6 \times 4 + 4 - 20 \quad \text{ou :} \quad H = 52 + 4 - 6 \cdot (9 - 1) \quad \text{Soit :} \quad H = 8$$

Question 26

a) L'analyse cinématique du cycle 0-5-3-0 donne : $\{\mathbf{v}_{0/3}\} + \{\mathbf{v}_{3/5}\} + \{\mathbf{v}_{5/0}\} = \{0\}$

$$D \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{D03}^z \end{Bmatrix} R_0 + E \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{35}^z & \frac{P_V \cdot \omega_{35}^z}{2 \cdot \pi} \end{Bmatrix} R_0 + O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{50}^z & 0 \end{Bmatrix} R_0 = \{0\}$$

Sachant que $\overrightarrow{DE} = d \cdot \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{DO} = d \cdot \overrightarrow{y_0} + \lambda \cdot \overrightarrow{z_0}$ en transportant les torseurs en D on obtient :

$$D \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{D03}^z \end{Bmatrix} R_0 + D \begin{Bmatrix} 0 & d \cdot \omega_{35}^z \\ 0 & 0 \\ \omega_{35}^z & \frac{P_V \cdot \omega_{35}^z}{2 \cdot \pi} \end{Bmatrix} R_0 + D \begin{Bmatrix} 0 & d \cdot \omega_{50}^z \\ 0 & 0 \\ \omega_{50}^z & 0 \end{Bmatrix} R_0 = \{0\}$$

Cette fermeture cinématique nous donne donc par projection sur les axes $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ équations de la résultante : } \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{35}^z + \omega_{50}^z = 0 \end{array} \right. \quad 3 \text{ équations du moment : } \left\{ \begin{array}{l} d \cdot \omega_{35}^z + d \cdot \omega_{50}^z = 0 \\ 0 = 0 \\ V_{50}^z \frac{P_V \cdot \omega_{35}^z}{2 \cdot \pi} \end{array} \right. \end{array}$$

On a donc 3 équations triviales (résultante sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ et moment sur $\overrightarrow{y_0}$) et une combinaison linéaire entre l'équation de la résultante sur $\overrightarrow{z_0}$ et du moment sur $\overrightarrow{x_0}$. D'où le degré d'hyperstatisme de 4 du cycle 0-3-5-0.

Pour rendre ce cycle isostatique il faut donc ajouter à la liaison de centre D les 3 rotations sur $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ et une translation sur $\overrightarrow{y_0}$.

Le torseur de cette liaison devient alors :

$$D \begin{Bmatrix} \omega_{03}^x & 0 \\ \omega_{03}^y & V_{D03}^y \\ \omega_{03}^z & V_{D03}^z \end{Bmatrix} R_0$$

On obtient alors une liaison ponctuelle de normale $(D, \overrightarrow{x_0})$.

Remarque : Ce n'est pas une bonne solution technologique. Car la liaison vis-écrou va devoir supporter un moment radial trop important. On préférera sans doute soit un modèle hyperstatique avec un réglage du positionnement et de l'orientation de la glissière sur le tibia. Soit un système avec un écrou flottant en liaison cardan (rotule à doigt) sur le chariot et une vis en liaison rotule sur le tibia.

b) Cette modification du cycle 0-3-5-0 réduit le degré d'hyperstatisme du mécanisme d'un degré 4. Une modification du même type sur l'autre cycle 0-3'-5'-0 permettra également de réduire l'hyperstatisme du mécanisme d'un degré 4.

On aura donc réduit le degré d'hyperstatisme du mécanisme d'un degré 8 qui au départ était de 8, donc on aura rendu le mécanisme isostatique.