Actions de contact ou à distance : Modèle Local

1- Type d'actions

Il existe en mécanique deux types d'actions :

Les actions de contact.

Elles s'exercent entre deux corps uniquement lorsqu'ils sont en contact. Elles s'exercent sur l'ensemble du contact entre les deux surfaces définissant la frontière de ces corps

Les actions à distance.

Elles s'exercent entre deux corps indépendamment de l'existence d'un contact ou non entre ces deux corps. Elles s'exercent sur l'ensemble du volume défini à l'intérieur de la surface définissant la frontière de ces corps.

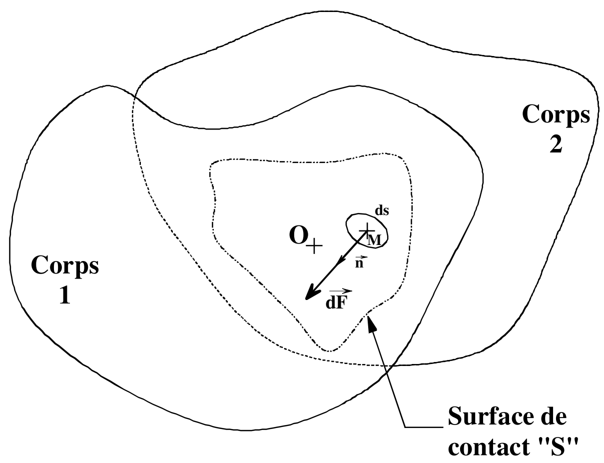
2- Passage du modèle local au modèle global

Le modèle global d'une action mécanique souvent décrit par un torseur se détermine par la résultante de l'ensemble des actions s'exerçant sur la surface de contact (Cas des actions de contact) ou sur le volume (Cas des actions à distance).

2.1- Les actions de contact sans frottement

Dans ce cas on décompose la surface de contact en une infinité de surfaces élémentaires d'aire ds infiniment petites dont la normale est définie par le vecteur $\vec{n}$ et sur laquelle il existe une force élémentaire $\vec{dF}$ appliquée en M centre de la surface infinitésimale d'aire ds.

Si le contact se fait sans frottement ni adhérence (contact parfait) alors cette force $\vec{dF}$ est normale à la surface ds elle est donc définie par :



$$\vec{dF} = \pm\, p.\vec{n}.ds$$

La force élémentaire de 1 sur 2 est orientée de 1 vers 2. Inversement pour l'action de 2 sur 1.

On défini alors p le réel positif comme la pression de contact au point M. cette pression est la même pour le corps 1 que pour le corps 2 (Principe des actions mutuelles).

Pour obtenir le modèle global de cet ensemble d'action élémentaires il faut calculer la résultante de l'ensemble des ces forces $\vec{dF}$ ce qui nous donnera une résultante et un moment en un point et donc un torseur d'action mécanique du corps 2 sur le corps 1.

On a alors :

$$\{T(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{R}_{2/1}} \\ \vec{\mathcal{M}_O(2/1)} \end{Bmatrix}$$ Avec :

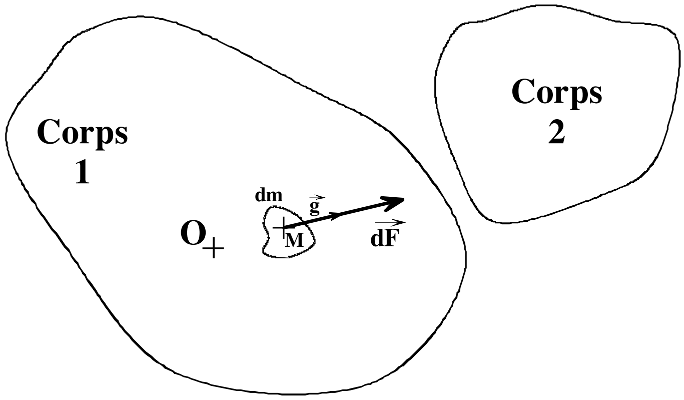
☞ La résultante : $\vec{\mathcal{R}_{2/1}} = \iint_S p.\vec{n}.ds$

☞ Le moment en O : $\vec{\mathcal{M}_O(2/1)} = \iint_S \vec{OM} \wedge p.\vec{n}.ds$

L'intégrale à calculer est une intégrale double elle se calcule donc avec deux paramètres. Cependant dans bien des cas on arrive à se ramener à une intégrale simple

2.2- Les actions à distance.

Dans ce cas on décompose le volume sur lequel s'exerce l'action en une infinité de volumes élémentaires infiniment petits au centre duquel il existe un vecteur $\vec{g}$ correspondant au champ vectoriel défini par la loi physique de l'action mécanique. Ce champ d'action mécanique s'applique sur une quantité dm correspondant à l'action mécanique étudiée



$$\overrightarrow{dF} = \vec{g}.dm$$

Il existe deux types de champ vectoriel conduisant à une action mécanique :

☞ Le champ gravitationnel $\vec{g}$ lié à la gravitation universelle s'appliquant sur une masse dm

☞ Le champ électromagnétique $\vec{E}$ fonction des champs électriques et magnétiques qui s'applique sur une charge électrique dq.

Pour obtenir le modèle global de cet ensemble d'action élémentaires il faut calculer la résultante de l'ensemble des ces forces $\overrightarrow{dF}$ ce qui nous donnera une résultante et un moment en un point et donc un torseur d'action mécanique du corps 2 sur le corps 1.

On a alors :

$$\{T(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(2/1)} \end{array} \right\}_O \quad \text{Avec :}$$

☞ La résultante : $\overrightarrow{\mathcal{R}_{2/1}} = \iiint_V \vec{g}.dm$

☞ Le moment en O : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(2/1)} = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{g}.dm$

L'intégrale à calculer est une intégrale triple elle se calcule donc avec trois paramètres. Cependant dans bien des cas on arrive à se ramener à une intégrale simple

2.3- Modélisation de l'action de pesanteur

Si on choisit comme verticale vers le haut le vecteur $\vec{Z}$, alors l'action du poids est telle que :

$$\{T(Poids)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(Poids)} \end{array} \right\}_O \quad \text{Avec :}$$

☞ $\vec{P} = \left[\iiint_V dm\right].\vec{g} = m.\vec{g} = -m.g.\vec{Z}$

☞ $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(Poids)} = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{g}.dm = g.\left[\iiint_V \overrightarrow{OM}.dm\right] \wedge \vec{Z}$

Le poids d'un corps S de masse m est donc une force $\vec{P} = -m.g.\vec{Z}$ **avec : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$**

Appliquée en G centre de gravité tel que : $\iiint_V \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$

Soit tel que ∀ le point O : $m.\overrightarrow{OG} = \iiint_V \overrightarrow{OM}.dm$

Corps homogènes

Pour un corps homogène de masse volumique ρ et de volume $\mathcal{V}$ sa masse m est de : $m = \rho . \mathcal{V}$

Décomposition en éléments finis

Si un corps S de masse m et de centre de gravité G se décompose en un nombre fini n de corps S_i de masses m_i et de centre de gravité G_i alors ∀ le point O on a :

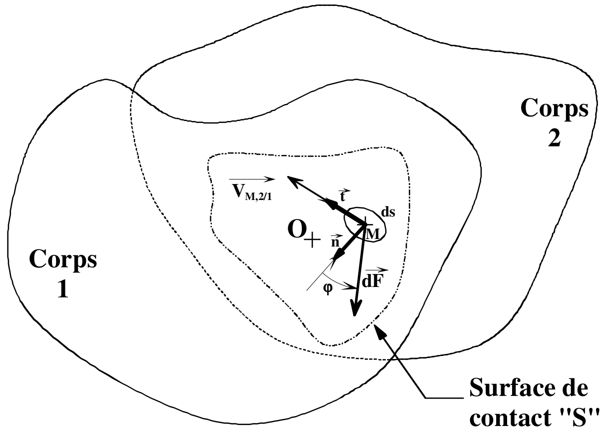
$$m.\overrightarrow{OG} = \sum_{i=0}^{n} m_i.\overrightarrow{OG_i} \qquad \text{soit : } m.x_G = \sum_{i=0}^{n} m_i.x_{Gi} \qquad m.y_G = \sum_{i=0}^{n} m_i.y_{Gi} \qquad m.z_G = \sum_{i=0}^{n} m_i.z_{Gi}$$

2.4- Les actions de contact avec frottement

Si on décompose la surface de contact en une infinité de surfaces élémentaires de centre M d'aire ds infiniment petites dont la normale est définie par le vecteur $\overrightarrow{n}$.

On définit également le vecteur $\overrightarrow{t}$ associé au point M et défini par la vitesse de glissement du point M : $\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}$ tel que :

$\overrightarrow{t}$ est le vecteur unitaire tangentiel à la surface ds (⊥ à $\overrightarrow{n}$) parallèle et dans le même sens que la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}$



Si le contact se fait avec frottement de coefficient μ = tan φ alors cette force $\overrightarrow{dF}$ est définie par :

$$\overrightarrow{dF} = p.(\overrightarrow{n} - \mu.\overrightarrow{t}).ds$$

où p est la pression sur la surface ds de centre M

Pour obtenir le modèle global de cet ensemble d'action élémentaires il faut calculer la résultante de l'ensemble des ces forces $\overrightarrow{dF}$ ce qui nous donnera une résultante et un moment en un point et donc un torseur d'action mécanique du corps 2 sur le corps 1.

On a alors : $\{T(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(2/1)} \end{Bmatrix}$ Avec :

☞ La résultante : $\overrightarrow{\mathcal{R}_{1/2}} = \iint_S p.(\overrightarrow{n} - \mu.\overrightarrow{t}).ds$

☞ Le moment en O : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,1/2}} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge p.(\overrightarrow{n} - \mu.\overrightarrow{t}).ds$