Frotteur du métro VAL : Corrigé

1ière partie : Effort élémentaire

1- La force infinitésimale de contact du rail 0 sur le patin 1 s'exerçant sur la surface élémentaire ds est due à la pression de contact p. Et ce contact se fait avec un coefficient de frottement μ. Ona donc :

$d\overrightarrow{F_{0/1}} = p.ds.(\overrightarrow{n} + \mu.\overrightarrow{t})$ où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{t}$ sont les vecteurs normal et tangentiel à la surface ds.

Or la surface ds a une aire : $ds = \ell.dx$, un vecteur normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{Y}$ et étant donné le sens du glissement du patin 1 sur le rail 0 un vecteur tangentiel $\overrightarrow{t} = -\overrightarrow{X}$.

On a donc : $d\overrightarrow{F_{0/1}} = p.\ell.dx.(\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X})$ Sachant que : $p = a.x + b$ On obtient :

$$\mathbf{d\overrightarrow{F_{0/1}} = \ell \,.\, (a.x + b) \,.\, (\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X}) \,.\, dx}$$

2ième partie : Détermination de la constante b

2- La résultante de l'action du rail 0 sur le patin 1 est somme sur toute la surface de contact des forces infinitésimale $d\overrightarrow{F_{0/1}}$ de contact du rail 0 sur le patin 1. On a donc : $\overrightarrow{F_{0/1}} = \iint_S d\overrightarrow{F_{0/1}}$

Pour faire la somme sur toute la surface on fait varier x de $-\frac{d}{2}$ à $\frac{d}{2}$.

On en déduit : $\overrightarrow{F_{0/1}} = \int_{-d/2}^{d/2} \ell \,.\, (a.x + b) \,.\, (\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X}) \,.\, dx$

$$\overrightarrow{F_{0/1}} = \ell \,.\, (\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X}) \,.\int_{-d/2}^{d/2} (a.x + b) \,.\, dx = \ell \,.\, (\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X}) \,.\left[\frac{a.x^2}{2} + b.x\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$\overrightarrow{F_{0/1}} = \ell \,.\, (\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X})\left(\frac{a.d^2}{8} + \frac{b.d}{2} - \frac{a.d^2}{8} + \frac{b.d}{2}\right)$$

Donc : $\mathbf{\overrightarrow{F_{0/1}} = b.\ell.d.(\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X})}$

3- Si on isole le patin 1 il est soumis à deux actions : L'action du rail 0 et du sabot 10 dont les résultantes s'expriment dans la base $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$: $\overrightarrow{F_{0/1}} = b.\ell.d.(\overrightarrow{Y} - \mu.\overrightarrow{X})$

et : $\overrightarrow{F_{10/1}} = X_{10/1}.\overrightarrow{X} + Y_{10/1}.\overrightarrow{Y}$

L'équation de la résultante liée à l'équilibre du patin 1 : $\overrightarrow{F_{0/1}} + \overrightarrow{F_{10/1}} = \overrightarrow{0}$ en projection sur l'axe $\overrightarrow{Y}$ donne donc : $b.\ell.d. + Y_{10/1} = 0$

On a donc : $\mathbf{b = -\dfrac{Y_{10/1}}{\ell.d}}$

4- Sachant que : $Y_{10/1} = -106$ N   l = 80 mm = 0,08 m   et :   d = 150 mm = 0,15 m

On obtient : $\mathbf{b = \dfrac{106}{0{,}08 \times 0{,}15} = 8\,833\ Pa}$

3ième partie : Détermination de la constante a

5- Le moment en E de l'action du rail 0 sur le patin 1 est somme sur toute la surface de contact des moments en E des forces infinitésimale $d\overrightarrow{F_{0/1}}$ de contact du rail 0 sur le patin 1.

On a donc : $\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \iint_S \overrightarrow{EM} \wedge d\overrightarrow{F_{0/1}}$ avec : $\overrightarrow{EM} = x.\overrightarrow{X} - h.\overrightarrow{Y}$

Pour faire la somme sur toute la surface on fait varier x de $-\frac{d}{2}$ à $\frac{d}{2}$.

On en déduit : $\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \int_{-d/2}^{d/2} [\,x.\overrightarrow{X} - h.\overrightarrow{Y}\,] \wedge [\,\ell\,.\,(a.x + b)\,.\,(\overrightarrow{Y} - \mu.\,\overrightarrow{X})\,.\,dx\,]$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \ell\,.\,\overrightarrow{Z}\,.\int_{-d/2}^{d/2} (a.x + b)\,.\,(x - \mu.h)\,.\,dx$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \ell\,.\,\overrightarrow{Z}\,.\int_{-d/2}^{d/2} \left(a.x^2 + (b - a.\mu.h).x - b.\mu.h \right).dx$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \ell\,.\,\overrightarrow{Z}\,.\left[\frac{a.x^3}{3} + (b - a.\mu.h).\frac{x^2}{2} - b.\mu.h.x \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \ell\,.\,\overrightarrow{Z}\,.\left[\frac{a.d^3}{24} + (b - a.\mu.h).\frac{d^2}{8} - b.\mu.h.\frac{d}{2} + \frac{a.d^3}{24} - (b - a.\mu.h).\frac{d^2}{8} - b.\mu.h.\frac{d}{2} \right]$$

On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \ell\,.\left(\frac{a.d3}{12} - b.\mu.h.d \right).\,\overrightarrow{Z}}$

6- Si on isole le patin 1 il est soumis à deux actions : L'action du rail 0 et du sabot 10. Or le moment en E de l'action du sabot 10 est nul car cette action est due à une liaison pivot d'axe (E, $\overrightarrow{Z}$). $\overrightarrow{\mathcal{M}_E(10/1)} = \overrightarrow{0}$

L'équation des moment en E liée à l'équilibre du patin 1 : $\overrightarrow{\mathcal{M}_E(10/1)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_E(0/1)} = \overrightarrow{0}$ en projection sur l'axe $\overrightarrow{Z}$ donne donc : $\ell\,.\left(\frac{a.d3}{12} - b.\mu.h.d \right) = 0$

On en déduit : $\boldsymbol{a = \frac{12.\mu.b.h}{d^2}}$

Sachant que : $\mu = 0{,}2$ b = 8 833 Pa h = 55 mm = 0,055 m et : d = 150 mm = 0,15 m

On obtient : $\boldsymbol{a = \frac{12 \times 0{,}2 \times 8\,833 \times 0{,}055}{0{,}15^2} = 51\,820\ Pa.m^{-1}}$

<u>4^{ième} partie : Détermination de la pression de contact et de la puissance calorifique à dissiper</u>

7- Sachant que la pression de contact est donnée en fonction de x par l'expression : p = a.x + b

☞ La pression maximale est obtenue pour $x = \frac{d}{2}$ = 75 mm = 0,075 m

Donc : $\boldsymbol{p_{Max}}$ **= 51 820 x 0,075 + 8 833 = 12 720 Pa = 0,01272 MPa.**

Ces pressions de contact étant bien inférieures à la pression de matage qui est de 2 MPa, il n'y a aucun risque de matage.

8- Si il y a arc-boutement du patin sur le rail, le patin va basculer sur l'avant, et donc se soulever sur sa partie arrière. **Le résultat du calcul de la pression de contact minimale sera donc négatif.**

☞ La pression minimale est obtenue pour $x = -\frac{d}{2}$ = – 75 mm = – 0,075 m

Donc : $\boldsymbol{p_{min}}$ **= 51 820 x (– 0,075) + 8 833 = 4 946 Pa = 0,004946 MPa.**

Etant donné le résultat positif obtenu à la pression de contact minimale. **On en déduit qu'il n'y a pas de risque d'arc-boutement du patin 1 sur le rail 0.**