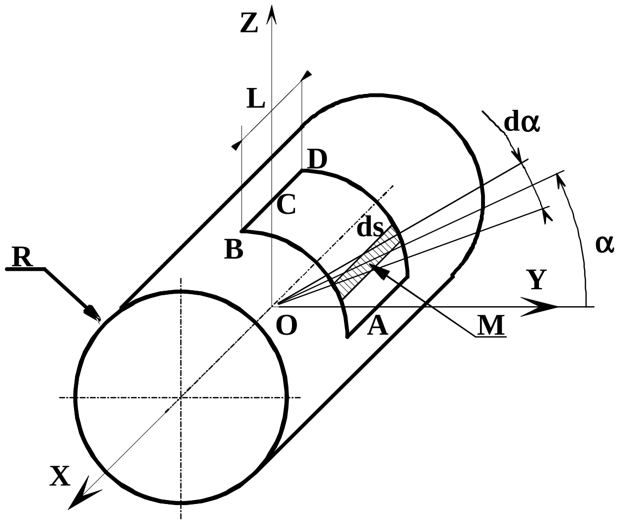
Trappe de réservoir cylindrique

Description



Un réservoir cylindrique de rayon R est rempli d'un liquide de masse volumique ρ. Ce réservoir est tel que son axe $\overrightarrow{X}$ est horizontal.

Le réservoir étant rempli mais pas sous pression, la pression du liquide au sommet (en B C ou D) est nulle. Ce liquide étant au repos la pression en un point M à une altitude z_M (l'altitude du centre O du cylindre étant nulle) est de :

$$p_M = \rho.g.(R - z_M)$$

Pour assurer la maintenance de ce réservoir, on place une trappe de longueur L articulée sur un axe horizontale (A, $\overrightarrow{X}$) tel que : $\overrightarrow{OA} = R.\overrightarrow{Y}$

Et maintenue par trois boulons en B, C et D tels que ces trois points soient alignés horizontalement suivant $\overrightarrow{X}$ et tels que : $\overrightarrow{OC} = R.\overrightarrow{Z}$.

Cette trappe représente donc un quart de cylindre de rayon R et de longueur L.

Le but de notre exercice est de déterminer les forces $\overrightarrow{F}$ exercées sur la trappe par les trois boulons en B, C et D pour la maintenir fermée. Ces forces étant telles que : $\overrightarrow{F} = -F.\overrightarrow{Y}$. Etant donné la symétrie par rapport au plan (O, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$) on admettra que ces trois forces sont équivalentes à une seule force égale à $3\times\overrightarrow{F}$ appliquée en C.

Questions

1- Afin de déterminer l'action du liquide sur la trappe, on décompose la surface de contact entre le liquide et la trappe en une infinité de surfaces élémentaires ds de longueur L et définies par un secteur angulaire dα situé à un angle α avec l'horizontale. Ces surfaces ont pour centre le point M et pour vecteur normal unitaire le vecteur $\overrightarrow{n}$: $\|\overrightarrow{n}\| = 1$ et $\overrightarrow{n}$ orthogonal à la surface ds.

Déterminer en fonction de L, R, α, dα, ρ, et g :

- ☞ La pression sur la surface ds (pression en M situé à l'altitude $z_M = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{Z}$)
- ☞ L'aire de la surface ds
- ☞ Les coordonnées dans la base ($\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$) du vecteur $\overrightarrow{n}$.
- ☞ Les coordonnées dans la base ($\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$) de l'action $\overrightarrow{dF_P}$ du liquide sur la surface ds.

2- Déterminer les coordonnées dans la base ($\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$) de la résultante $\overrightarrow{F_P}$ de l'action du liquide sur la trappe.

3- Déterminer le moment par rapport à l'axe (A, $\overrightarrow{X}$) de l'action du liquide sur la trappe. On remarquera que la normale des surfaces ds passant par le point O, le moment en O des forces $\overrightarrow{dF_P}$ est nul.

4- Déterminer l'action de chaque boulon en B, C et D sachant que : $\rho = 1\,000\ kg/m^{-3}$ R = 1 m et L = 0,5 m. Pour cela on écrire l'équation des moments par rapport à l'axe (A, $\overrightarrow{X}$) appliquée à la trappe.