

Trappe de réservoir cylindrique : Corrigé

1- Effort élémentaire

☞ L'angle α est défini par l'angle entre $\overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{OM}$. On a donc : $\overrightarrow{OM} = R.(\cos \alpha . \overrightarrow{Y} + \sin \alpha . \overrightarrow{Z})$

Soit : $z_M = \overrightarrow{OM} . \overrightarrow{Z} = R . \sin \alpha$ D'où la pression en M : $p_M = \rho . g . R . (1 - \sin \alpha)$

☞ La surface ds est un secteur angulaire du cylindre d'angle $d\alpha$ et de longueur L :

On en déduit l'aire de cette surface : $ds = L . R . d\alpha$

☞ Le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à la surface ds est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On en déduit : $\overrightarrow{n} = \cos \alpha . \overrightarrow{Y} + \sin \alpha . \overrightarrow{Z}$

☞ La force élémentaire de pression s'appliquant sur la surface ds est donc telle que :

$$d\overrightarrow{F_P} = p_M . ds . \overrightarrow{n} \quad \text{Soit :} \quad d\overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . (1 - \sin \alpha) . (\cos \alpha . \overrightarrow{Y} + \sin \alpha . \overrightarrow{Z}) . d\alpha$$

2- Force de pression

Cette action est la somme vectorielle de tous les forces élémentaires de pression $d\overrightarrow{F_P}$.

$$\text{On a donc :} \quad \overrightarrow{F_P} = \iint_S d\overrightarrow{F_P} = \int_0^{+\pi/2} \rho . g . L . R^2 . (1 - \sin \alpha) . (\cos \alpha . \overrightarrow{Y} + \sin \alpha . \overrightarrow{Z}) . d\alpha$$

$$\text{Soit :} \quad \overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . \int_0^{+\pi/2} [(\cos \alpha - \cos \alpha . \sin \alpha) . \overrightarrow{Y} + (\sin \alpha - \sin^2 \alpha) . \overrightarrow{Z}] . d\alpha$$

$$\overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . \int_0^{+\pi/2} \left[\left(\cos \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) . \overrightarrow{Y} + \left(\sin \alpha - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) . \overrightarrow{Z} \right] . d\alpha$$

$$\overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . \left[\left(\sin \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right) . \overrightarrow{Y} + \left(-\cos \alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) . \overrightarrow{Z} \right]_0^{+\pi/2}$$

$$\overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) . \overrightarrow{Y} + \left(0 - \frac{\pi}{4} + 0 \right) . \overrightarrow{Z} - \left(0 + \frac{1}{4} \right) . \overrightarrow{Y} - (-1 - 0 + 0) . \overrightarrow{Z} \right]$$

$$\overrightarrow{F_P} = \rho . g . L . R^2 . \left[\frac{1}{2} . \overrightarrow{Y} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) . \overrightarrow{Z} \right]$$

3- Moment par rapport à l'axe (A, $\overrightarrow{X}$)

D'après la relation de Varignon : $\overline{\mathcal{M}}_A(d\overrightarrow{F_P}) = \overline{\mathcal{M}}_O(d\overrightarrow{F_P}) + \overline{AO} \wedge d\overrightarrow{F_P}$

Or toutes les actions élémentaires $d\overrightarrow{F_P}$ ont pour support (OM) donc : $\overline{\mathcal{M}}_O(d\overrightarrow{F_P}) = 0$

On en déduit que le moment en A de l'action de pression est défini par :

$$\overline{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F_P}) = \iint_S \overline{AO} \wedge d\overrightarrow{F_P} \quad \text{Or } \overline{AO} \text{ est constant quelque soit } d\overrightarrow{F_P} \text{ donc :}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F_P}) = \overline{AO} \wedge \iint_S d\overrightarrow{F_P} \quad \text{Avec : } \iint_S d\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{F_P} \text{ on en déduit :}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F_P}) = \overline{AO} \wedge \overrightarrow{F_P} = -R . \overrightarrow{Y} \wedge \rho . g . L . R^2 . \left[\frac{1}{2} . \overrightarrow{Y} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) . \overrightarrow{Z} \right] = -\rho . g . L . R^3 . \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) . \overrightarrow{X}$$

D'où le moment par rapport à l'axe (A, $\overrightarrow{X}$) de cette action : $\mathcal{M}_{(A,X)}(\overrightarrow{F_P}) = -\rho . g . L . R^3 . \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$

4- Action des trois boulons

La trappe est soumise à cinq actions. L'action due à la liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{X})$, l'action de pression du liquide et les trois actions des boulons .

L'équation des moments par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{X})$ issue de l'équilibre de cette trappe donne donc :

$$0 + \mathcal{M}_{(A,X)}(\overrightarrow{F_P}) + 3 \cdot \mathcal{M}_{(A,X)}(\overrightarrow{F}) = 0$$

Sachant que : $\mathcal{M}_{(A,X)}(\overrightarrow{F_P}) = -\rho \cdot g \cdot L \cdot R^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ et que les actions des trois boulons sont des forces : $\overrightarrow{F} = -F \cdot \overrightarrow{Y}$ de supports respectifs $(\overrightarrow{B}, Y)$ $(C, \overrightarrow{Y})$ et $(D, \overrightarrow{Y})$.

$$\text{On a : } -\rho \cdot g \cdot L \cdot R^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{X} = 0$$

$$\text{Soit : } -\rho \cdot g \cdot L \cdot R^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot ((-R \cdot \overrightarrow{Y} + R \cdot \overrightarrow{Z}) \wedge -F \cdot \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{X} = 0$$

$$-\rho \cdot g \cdot L \cdot R^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot R \cdot F = 0$$

$$\text{On en déduit : } F = \frac{\rho \cdot g \cdot L \cdot R^3}{3} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1\,000 \times 9,81 + 0,5^2}{3} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 526 \text{ N}$$