Moments d'inertie de solides homogène

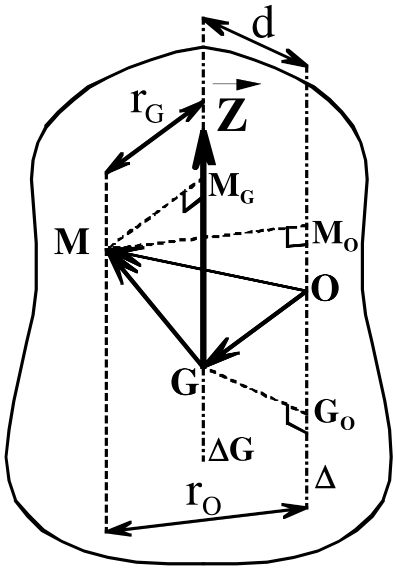
1- Théorème de Huygens

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G.

Soit deux axes parallèles de vecteur directeur $\overrightarrow{Z}$ (tel que $\overrightarrow{Z}$ est un vecteur unitaire : $\|\overrightarrow{Z}\| = 1$) et passant par les points O et G.

Soit un point M quelconque de ce solide S.

On pose les distances :
- ☞ d : Entre les axes (O, $\overrightarrow{Z}$) et (G, $\overrightarrow{Z}$)
- ☞ r_G : Entre le point M et l'axe (G, $\overrightarrow{Z}$)
- ☞ r_O : Entre le point M et l'axe (O, $\overrightarrow{Z}$)



Sachant que $\|\overrightarrow{Z}\| = 1$ et que par définition du produit vectoriel :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| . \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

On en déduit : $d^2 = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Z})^2$

$$r_G^2 = (\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{Z})^2$$

$$r_O^2 = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{Z})^2$$

Par définition du moment d'inertie par rapport à l'axe (O, $\overrightarrow{Z}$) on a :

$$I_{O\overrightarrow{Z}}(S) = \iiint_S r_O^2.dm = \iiint_S (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{Z})^2.dm = \iiint_S ((\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \overrightarrow{Z})^2.dm$$

$$I_{O\overrightarrow{Z}}(S) = \iiint_S ((\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \overrightarrow{Z}).((\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \overrightarrow{Z}).dm$$

$$I_{O\overrightarrow{Z}}(S) = \iiint_S \left[(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Z})^2 + (\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{Z})^2 + 2.(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Z}).(\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{Z})\right].dm$$

$$I_{O\overrightarrow{Z}}(S) = \iiint_S d^2.dm + \iiint_S r_G^2.dm + 2.\iiint_S (\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{Z}).(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Z}).dm$$

$$I_{O\overrightarrow{Z}}(S) = d^2.\iiint_S dm + I_{G\overrightarrow{Z}}(S) + 2.\left[\iiint_S \overrightarrow{GM}.dm\right] \wedge \overrightarrow{Z} . (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Z})$$

Or par définition du centre d'inertie : $\iiint_S \overrightarrow{GM}.dm = \overrightarrow{0}$ et de la masse : $m = \iiint_S dm$

Donc :

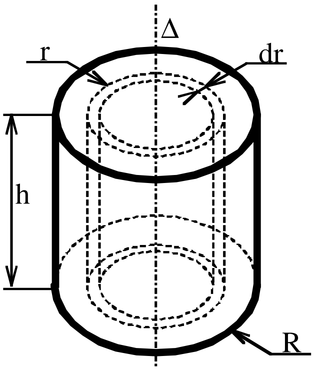
Conclusion

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G. Soit deux axes parallèles : Δ quelconque et Δ_G passant par G distant d'une distance d l'un de l'autre. Alors si on pose I_Δ et $I_{\Delta G}$ les moments d'inertie par rapport aux axes Δ et Δ_G on a :

Remarque :

2- Moments d'inertie de solides homogènes

2.1- Cylindre plein



Soit un cylindre homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon R
☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon r
☞ De hauteur h ☞ D'épaisseur dr

Tous les volumes élémentaires dv de masse dm = ρ.dv sont constitués de points tous équidistants de l'axe Δ. Cette distance étant r, on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$\mathbf{I_\Delta = \iiint_S r^2.dm}$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : **dm = ρ.dv = ρ.2.π.r.h.dr**

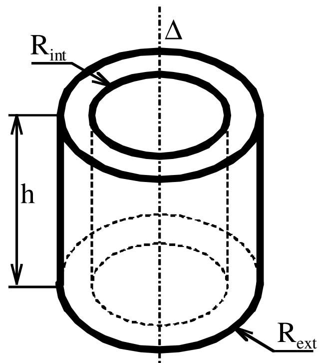
Donc : $\mathbf{I_\Delta = \int_0^R r^2.\rho.2.\pi.r.h.dr = 2.\pi.h.\rho.\int_0^R r^3.dr}$

$$\mathbf{I_\Delta = 2.\pi.h.\rho.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2.\pi.h.\rho.\frac{R^4}{4} = \frac{\pi.R^4.h.\rho}{2}}$$

Sachant que la masse m d'un cylindre homogène de rayon R de hauteur h et de masse volumique ρ est :

On en déduit le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

2.2- Cylindre creux



Soit un cylindre creux homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon extérieur R_{ext}
☞ De rayon intérieur R_{int} ☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

Ce volume est la soustraction d'un cylindre plein de rayon R_{int} à un cylindre plein de rayon R_{ext}. Etant donné l'expression établie précédemment concernant le moment d'inertie d'un cylindre plein, on a pour ce cylindre creux homogène un moment d'inertie : $\mathbf{I_\Delta = \frac{\pi.R_{ext}^4.h.\rho}{2} - \frac{\pi.R_{int}^4.h.\rho}{2}}$

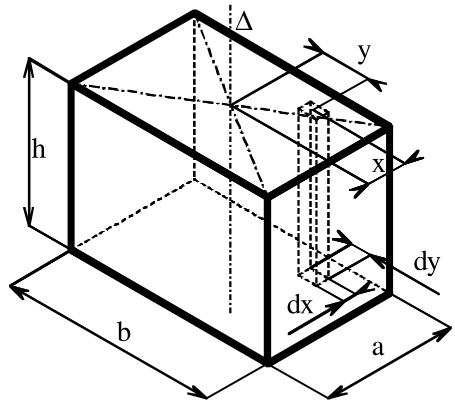
Donc : $\mathbf{I_\Delta = \frac{\pi.(R_{ext}^4 - R_{int}^4).h.\rho}{2}}$

$$\mathbf{I_\Delta = \frac{\pi.(R_{ext}^2 + R_{int}^2).(R_{ext}^2 - R_{int}^2).h.\rho}{2}}$$

Sachant que la masse m d'un cylindre creux homogène de rayon extérieur R_{ext} de rayon intérieur R_{int} de hauteur h et de masse volumique ρ est :

D'où le moment d'inertie :

2.3- Parallélépipède rectangle



Soit un parallélépipède rectangle homogène :

☞ D'axe Δ passant par les milieux de deux faces opposées
☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
☞ De largeur a et de longueur b
☞ De masse volumique ρ

On décompose ce parallélépipède en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des parallélépipède rectangle:

☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
☞ De largeur dx et de longueur dy

Tous les volumes élémentaires dv de masse dm = ρ.dv sont constitués de points équidistants de l'axe Δ. Cette distance étant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, D'où pour ce parallélépipède le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$\mathbf{I_\Delta = \iiint_S r^2.dm = \iiint_S (x^2 + y^2).dm}$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : **dm = ρ.dv = ρ.h.dx.dy**

Donc :

$$\mathbf{I_\Delta = \iiint_S (x^2 + y^2).\ \rho.h.dx.dy}$$

$$\mathbf{I_\Delta = \rho.h.\int_{-b/2}^{+b/2}\left[\int_{-a/2}^{+a/2} (x^2 + y^2).dx\right].dy}$$

$$\mathbf{I_\Delta = \rho.h.\int_{-b/2}^{+b/2}\left[\frac{x^3}{3} + y^2.x\right]_{-a/2}^{+a/2}.dy = \rho.h.\int_{-b/2}^{+b/2}\left(\frac{a^3}{12} + y^2.a\right).dy}$$

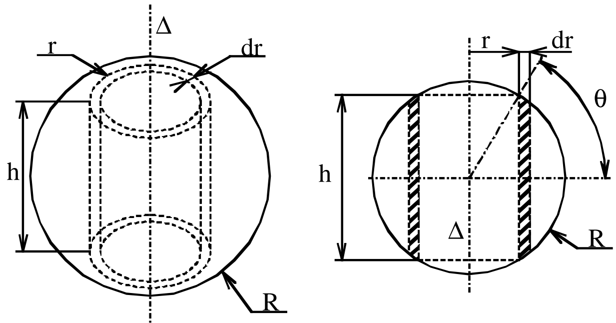
$$\mathbf{I_\Delta = \rho.h.\left[\frac{a^3}{12}.y + \frac{y^3}{3}.a\right]_{-b/2}^{+b/2} = \rho.h.\left(\frac{a^3.b}{12} + \frac{b^3.a}{12}\right)}$$

$$\mathbf{I_\Delta = \frac{\rho.h.a.b.(a^2 + b^2)}{12}}$$

Sachant que la masse m d'un parallélépipède rectangle homogène de dimensions a x b x h est :

On en déduit le moment d'inertie :

5.4- Sphère pleine



Soit une sphère homogène :

☞ De rayon R
☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux :

☞ D'axe Δ ☞ De rayon r
☞ De hauteur h ☞ D'épaisseur dr

Tous les volumes élémentaires dv de masse dm = ρ.dv sont constitués de points équidistants de l'axe Δ. Cette distance étant r, on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$\mathbf{I_\Delta = \iiint_S r^2.dm = \int_0^R r^2.dm}$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire : **dm = ρ.dv = ρ.2.π.r.h.dr**

On pose θ l'angle défini par un plan perpendiculaire à l'axe Δ et la droite passant par l'arrêt intérieure de ce cylindre creux. Ce plan et cette droite passant tout deux par le centre de la sphère.

On a alors : **$r = R.\cos\theta$** **$dr = -R.\sin\theta.d\theta$** **$h = 2.R.\sin\theta$**

On a donc : $$I_\Delta = -\int_{\pi/2}^{0} (R.\cos\theta)^2 \,.\, \rho.2.\pi.\ R.\cos\theta \,.\, 2.R.\sin\theta \,.\, R.\sin\theta\ d\theta$$

$$I_\Delta = 4.\pi.R^5.\rho.\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \,.\, \sin^2\theta \,.\, d\theta$$

$$I_\Delta = 4.\pi.R^5.\rho.\int_0^{\pi/2} (\cos\theta \,.\, (1-\sin^2\theta) \,.\, \sin^2\theta) \,.\, d\theta$$

$$I_\Delta = 4.\pi.R^5.\rho.\int_0^{\pi/2} (\cos\theta \,.\, \sin^2\theta - \cos\theta \,.\, \sin^4\theta) \,.\, d\theta$$

$$I_\Delta = 4.\pi.R^5.\rho.\left[\frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\pi/2} = 4.\pi.R^5.\rho.\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4 \times 2}{3 \times 5}.\pi.R^5.\rho$$

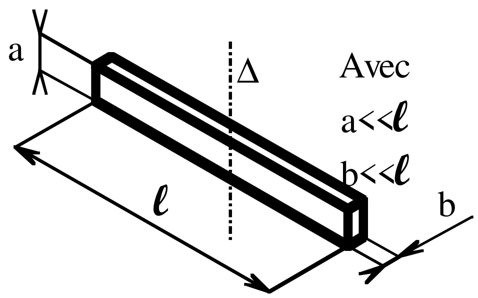
Sachant que la masse m d'une Sphère homogène de rayon R et de masse volumique ρ est :

On en déduit le moment d'inertie par rapport à tout axe Δ passant par le centre de la sphère :

5.5- Barre de faible section

Soit une plaque parallélépipédique homogène :

- D'axe Δ passant orthogonalement au milieu de la barre.
- De Longueur ℓ (orthogonalement à l'axe Δ)
- De largeur a et d'épaisseur b
- De masse volumique ρ



Cette barre est un parallélépipède rectangle homogène de masse volumique ρ dont la masse est donc :

$$m = \rho.\ell.a.b$$

Et le moment d'inertie par rapport à cet axe Δ

$$I_\Delta = \frac{m.(\ell^2 + b^2)}{12}$$

Or l'épaisseur b de cette plaque étant négligeable devant sa longueur ℓ on a : b^2 négligeable devant ℓ^2

Donc cette plaque homogène de hauteur h, largeur a, épaisseur e, masse volumique ρ a une masse de :

$$\mathbf{m = \rho.\ell.a.b}$$

Et un moment d'inertie par rapport à l'axe Δ parallèle à la hauteur et passant par le milieu de la plaque :

$$\mathbf{I_\Delta = \frac{m.\ell^2}{12}}$$

Remarque :

On montre que cette expression reste valable pour toute barre. Même si la section n'est pas rectangulaire. A la condition que les dimensions de cette section restent faibles devant la longueur.