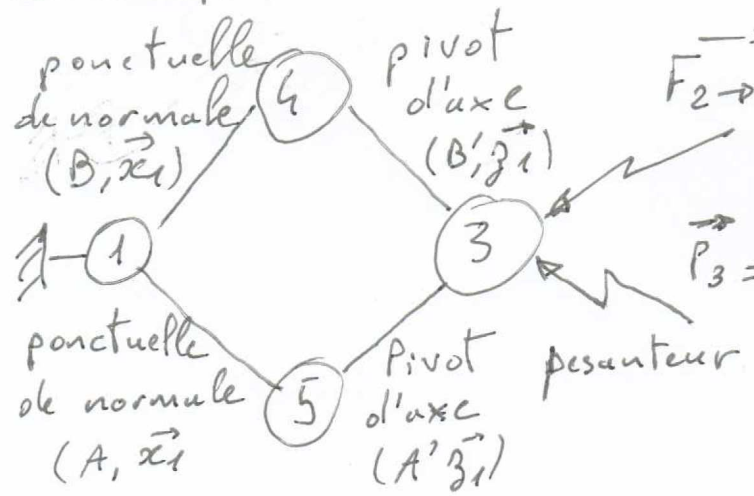
Skip de levage : Corrigé.

① Graphe de structure



$\overrightarrow{F_{2\to3}} = Y_{23}\,\vec{y}_1$ appliquée en C

$\vec{P}_3 = -Mg\,\vec{y}_0$ appliquée en G.

Torseur de l'action de 3 sur 4 : $\{T_{3\to4}\} = {}_{B'}\begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{plan}]{\text{pbl}} {}_{B'}\begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Cette action est donc <u>une force $\overrightarrow{F_{3\to4}}$ appliquée en B'</u>.

Torseur de l'action de 1 sur 4 : $\{T_{1\to4}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ Z_{14} & 0 \end{Bmatrix}$ Car action de liaison ponctuelle avec adhérence

$p^{\underline{bl}}$ plan $\Rightarrow \{T_{1\to4}\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Cette action est donc <u>une force $\overrightarrow{F_{1\to4}}$ appliquée en B</u>

Par un raisonnement identique, on obtient :

L'action de 3 sur 5 est <u>une force $\overrightarrow{F_{3\to5}}$ appliquée en A'</u>

L'action de 1 sur 5 est <u>une force $\overrightarrow{F_{1\to5}}$ appliquée en A</u>

② On isole le galet 4. B.A.M.E. :

→ Une force $\overrightarrow{F_{1\to 4}}$ appliquée en B

→ Une force $\overrightarrow{F_{3\to 4}}$ appliquée en B'

L'inertie de 4 étant négligée (on applique le PFS) ces 2 forces sont directement opposées.

Elles ont donc même support : la droite $(BB') = (B\vec{x}_1)$

En isolant le galet 5, par un raisonnement identique on en deduit que les forces $\overrightarrow{F_{1\to 5}}$ et $\overrightarrow{F_{3\to 5}}$ ont le meme support : la droite $(AA') = (A\vec{x}_1)$

Donc les actions du rail 1 sur les galets 4 et 5 se modélisent respectivement par des forces de support $(B\vec{x}_1)$ et $(A\vec{x}_1)$

③ On isole {3,4,5}. B.A.M.E. (Pour $\overrightarrow{F_{2\to 3}} = \vec{0}$)

→ Action de 1 sur 5 : Force $\overrightarrow{F_{1\to 5}} = X_{15}\vec{x}_1$ appliquée en A

→ Action de 1 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{1\to 4}} = X_{14}\vec{x}_1$ appliquée en B

→ Poids de 3 : Force $\vec{P}_3 = -Mg\vec{y}_0$ appliquée en G

Theorème de la resultante dynamique :

$\overrightarrow{F_{1\to 5}} + \overrightarrow{F_{1\to 4}} + \vec{P}_3 = M\overrightarrow{a_{G\in 3/1}}$

soit en projection sur $\vec{y}_1$ $\quad 0 + 0 - Mg\vec{y}_0\cdot\vec{y}_1 = M\gamma$

or $y_0 \cdot y_1 = \cos\alpha \Rightarrow \gamma = -g\cos\alpha$ (Pour $\overrightarrow{F_{2\to 3}} = \vec{0}$)

Donc pour maintenir la chaine tendue,

il faut : $\boxed{\gamma \geq -g\cos\alpha}$

④ On isole $\{3,4,5\}$ BAME :

→ Une force $\overrightarrow{F_{1\to5}} = X_{15}\,\vec{x_1}$ de support $(A\,\vec{x_1})$

→ Une force $\overrightarrow{F_{1\to4}} = X_{14}\,\vec{x_1}$ de support $(B,\vec{x_1})$

→ Une force $\overrightarrow{F_{2\to3}} = Y_{23}\,\vec{y_1}$ de support $(C,\vec{y_1})$

→ Poids de 3 : Force $\vec{P_3} = -Mg\,\vec{y_0}$ de support $(G\,\vec{y_0}) = (D,\vec{y_0})$

Théorème de la resultante dynamique :

$$\overrightarrow{F_{1\to4}} + \overrightarrow{F_{1\to5}} + \overrightarrow{F_{2\to3}} + \vec{P_3} = M\,\overrightarrow{a_{G\in3/1}}$$

en projection sur $\vec{x_1}$ $\quad \underline{X_{14} + X_{15} + 0 - Mg\sin\alpha = 0}$

en projection sur $\vec{y_1}$ $\quad \underline{0 + 0 + Y_{23} - Mg\cos\alpha = M\gamma}$

Théorème du moment dynamique en D

$$\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{F_{1\to4}} + \overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{F_{1\to5}} + \overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{F_{2\to3}} + \overrightarrow{DG}\wedge\vec{P_3} = \overrightarrow{DG}\wedge M\,\overrightarrow{a_{G\in3/1}}$$

Remarque $\overrightarrow{DG}\wedge\vec{P_3} = \vec{0}$ car $\vec{P_3}$ de support $(D\,\vec{y_0})$ $(\overrightarrow{DG} \parallel \vec{P_3})$

on obtient donc en projection sur $\vec{z_1} = \vec{z_0}$

$$\begin{pmatrix}-(b+d)\\-a\\0\end{pmatrix}_{B_1}\wedge\begin{pmatrix}X_{14}\\0\\0\end{pmatrix}_{B_1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-(b+d)\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}X_{15}\\0\\0\end{pmatrix}_{B_1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix}-b\\-(a+c)\\0\end{pmatrix}_{B_1}\wedge\begin{pmatrix}0\\Y_{23}\\0\end{pmatrix}_{B_1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B_1}$$

$$= \begin{pmatrix}-h\sin\alpha\\-h\cos\alpha\\0\end{pmatrix}_{B_1}\wedge\begin{pmatrix}0\\M\gamma\\0\end{pmatrix}_{B_1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B_1} \quad \text{ou} = \begin{pmatrix}0\\-h\\0\end{pmatrix}_{B_0}\wedge\begin{pmatrix}-M\gamma\sin\alpha\\M\gamma\cos\alpha\\0\end{pmatrix}_{B_0}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a\cdot X_{14} - b\,Y_{23} = -M\gamma h\sin\alpha}$$

Donc du PFD on obtient :

$$\begin{cases} X_{14} + X_{15} - Mg\sin\alpha = 0 & (a)\\ Y_{23} - Mg\cos\alpha = M\gamma & (b)\\ a\,X_{14} - b\,Y_{23} = -M\gamma h\sin\alpha & (c)\end{cases}$$

Par résolution de ces equations on obtient les actions en A, B et C :

En A Force $\overrightarrow{F_{1-05}} = \dfrac{M[g(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \gamma(b - h\sin\alpha)]}{a}\,\vec{x_1}$

En B Force $\overrightarrow{F_{1-04}} = \dfrac{M[gb\cos\alpha + \gamma(b - h\sin\alpha)]}{a}\,\vec{x_1}$

En C Force $\overrightarrow{F_{2-04}} = M(\gamma + g\cos\alpha)\,\vec{y_1}$

(5) Le galet 4 est à droite du rail donc le sens de $\overrightarrow{F_{1\to4}}$ est vers la droite $(+\vec{x_1})$ Donc $X_{14} \geq 0$

Le galet 5 est à gauche du rail donc le sens de $\overrightarrow{F_{1-05}}$ est vers la gauche $(-\vec{x_1})$ Donc $X_{15} \leq 0$

(6) Sachant que $b > h\sin\alpha$ $(b - h\sin\alpha > 0)$ et étant donné les expressions de $\overrightarrow{F_{1\to4}}$ et F_{1-05} de la question 4, si l'accélération γ du wagonnet augmente alors

X_{14} augmente ($|X_{14}|$ augmente car $X_{14} \geq 0$)

X_{15} diminue ($|X_{15}|$ augmente car $X_{15} \leq 0$)

Donc si γ augmente les normes des actions en A et B augmentent.

(7) L'accélération est minimale sur la 3ième phase du déplacement avec $\gamma = \dfrac{-V_{Max}}{T_1}$.

Or pour maintenir la chaine tendue il faut $\gamma \geq -g\cos\alpha$ soit $\dfrac{-V_{Max}}{T_1} \geq -g\cos\alpha$

Donc pour maintenir la chaine tendue il faut $T_1 \geq \dfrac{V_{Max}}{g\cos\alpha}$

La distance parcoure d_y represente l'aire sous la courbe de vitesse du wagonnet

On a donc $d_y = \frac{V_{Max} T_1}{2} + V_{Max}(T - T_1 - T_1) + \frac{V_{Max}(T-(T-T_1))}{2}$

soit $d_y = V_{Max}(T - T_1)$ Donc $T = \frac{d_y}{V_{Max}} + T_1$

Donc la durée minimal du deplacement permettant de maintenir la chaine tendue est $\boxed{T = \frac{d_y}{V_{Max}} + \frac{V_{Max}}{g \cdot \cos\alpha}}$

(8) Pour cette durée minimale on a :

$g \cos\alpha \leq \gamma \leq -g\cos\alpha$ car les phases d'accélération et de décélération ont la même durée.

Or si γ augmente alors les normes des actions en A, B et C augmentent donc les valeurs maximales de ces normes sont obtenues pour $\gamma = g\cos\alpha$ c'est à dire sur la phase d'accélération.

Donc d'après les resultat de la question 4, les normes maximales de ces actions sont:

En A : $\|\overrightarrow{F_{1\to5}}\|_{Max} = \frac{Mg}{a}\left[2b\cos\alpha - (a + h\cos\alpha)\sin\alpha\right]$

En B : $\|F_{1\to4}\|_{Max} = \frac{Mg}{a}\left[2b\cos\alpha - h\cos\alpha\sin\alpha\right]$

En C : $\|F_{2\to3}\|_{Max} = 2Mg\cos\alpha$

(9) On a vu que $X_{15} \leq 0$ et que X_{15} diminue lorsque γ augmente. Donc X_{15} est maximal pour γ minimal. C'est à dire $\underline{\underline{\gamma = -g\cos\alpha}}$ car la chaine reste tendue pour $\gamma \geq -g\cos\alpha$

La valeur maximale de X_{15} est donc :

$$X_{15\,Max} = \frac{M\left[g(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + g\cos\alpha(b - h\sin\alpha)\right]}{a}$$

$$\Rightarrow X_{15\,Max} = \frac{Mg\sin\alpha\,(a - h\cos\alpha)}{a}$$

or pour que le contact du galet 5 sur le rail 1 soit maintenu, il faut que $X_{15Max} \leq 0$ soit : $a - h\cos\alpha \leq 0$

Donc pour maintenir le contact du galet 5 sur le rail 1, il faut que $\boxed{h\cos\alpha \geq a}$

D'un point de vue géométrique, cela signifie que le centre d'inertie G doit être maintenu sous la droite $(B\vec{x}_1)$