

TD2 : Convoyeur aérien

Mise en situation

L'objet de notre étude est un convoyeur aérien destiné à la distribution d'aliments pour des caprins dans un bâtiment agricole.

Il est constitué d'un chariot 1 et de deux essieux 2 et 3 comprenant deux roues chacun. Ces roues roulent sur des rails 0 fixés à la charpente du bâtiment agricole.

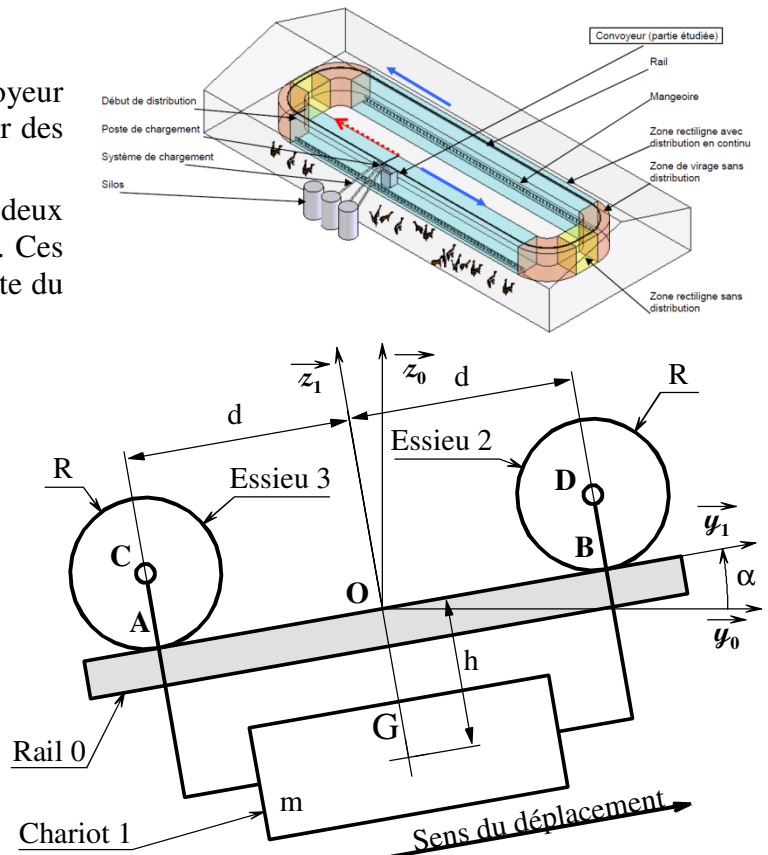
Modélisation et hypothèses

Le convoyeur a une masse m et un centre de gravité (d'inertie) G situé à égale distance des deux essieux et sous les rails.

On pose les deux bases liés au rail 0 fixe par rapport au sol. $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tels que : $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$.

Le rail est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale définie par la direction $\vec{y}_0$. On a donc l'angle constant α :

$$\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$$



Le vecteur $\vec{z}_0$ donne la verticale vers le haut. D'où l'accélération gravitationnelle : $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$

Les essieux 2 et 3 sont en liaisons pivots parfaites d'axe $(D, \vec{x}_0)$ et $(C, \vec{x}_0)$ avec le chariot 1 et ponctuelles de normales $(B, \vec{z}_1)$ et $(A, \vec{z}_1)$ avec le rail 0.

Les deux liaisons ponctuelles ne sont pas parfaites, elles se font avec frottement ou adhérence, on pose μ le coefficient de frottement (ou adhérence) entre les essieux (2 ou 3) et le rail 0.

On pose d et h les distances entre le centre de gravité G du chariot 1 et les points B et A des contacts de l'essieu 2 (à l'avant du chariot) et de l'essieu 3 (à l'arrière du chariot), sur le rail 0 :

$$\vec{AB} = 2d \cdot \vec{y}_1 \quad \vec{AG} = d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1 \quad \vec{BG} = -d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1$$

Les roues ont un rayon R : $\vec{AC} = \vec{BD} = R \cdot \vec{y}_1$

Afin d'assurer le déplacement, l'essieu arrière (essieu 3) est motorisé. On a donc un couple moteur exercé par le chariot 1 sur l'essieu 3 : $\vec{C}_{13} = C_m \cdot \vec{x}_0$. Ce couple moteur permet d'assurer l'accélération tout comme la décélération du chariot 1.

On note γ l'accélération du chariot qui est en translation rectiligne de direction $\vec{y}_1$. Le vecteur accélération du centre d'inertie G s'écrit donc : $\vec{\Gamma}_{G \in 1/0} = \gamma \cdot \vec{y}_1$

Le problème est un problème plan $(0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ du schéma de la figure ci-dessus.

Notation

On note $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ la résultante de l'action d'un solide i sur un solide j . On note Y_{ij} et Z_{ij} les composantes de cette résultante dans la base $\mathcal{B}_1$. Etant donné l'hypothèse du problème plan : $\vec{F}_{i \rightarrow j} = Y_{ij} \cdot \vec{y}_1 + Z_{ij} \cdot \vec{z}_1$

Objectif du problème

On se propose de déterminer le couple moteur C_m nécessaire à une accélération γ . Ainsi que de vérifier le bon contact des roues sur le rail : Pas de glissement et pas décollement des roues.

1^{ère} Partie : Mouvements de translation

Pour toute cette 1^{ère} partie on suppose que la masse des deux essieux est négligeable. On néglige donc le poids et l'inertie des essieux. Donc si on note m_c la masse du chariot on a $m_c = m$.

- 1.1- Construire un graphe des actions du mécanisme (le problème étant plan). Vous préciserez pour chacune des actions leur nombre d'inconnues.
- 1.2- A partir de ce graphe des actions, proposer un ordonnancement des isolements permettant de déterminer le couple moteur C_m . On donnera les systèmes à isoler et les équations (TRD et/ou TMD) à écrire en s'efforçant d'avoir un minimum d'équation à écrire. Ici 2 ou 3 équations sont suffisantes.
- 1.3- En suivant l'ordonnancement des isolements proposé à la réponse précédente, déterminer, en fonction de γ , des différents paramètres du système et de l'accélération gravitationnelle g , l'expression du couple moteur C_m nécessaire pour une accélération γ .
- 1.4- Déterminer la condition sur le coefficient d'adhérence μ entre les roues et le rail permettant d'assurer une accélération γ positive. Pour cela vous isolerez le système $\{1,3\}$ et écrirez un TRD en projection sur $\vec{y}_1$ et $\vec{z}_1$ pour déterminer $\vec{F}_{0 \rightarrow 3}$.
- 1.5- Déterminer la condition sur l'accélération γ permettant d'éviter un basculement du chariot : Perte de contact entre les roues avant de l'essieu 2 et le rail 0, lors d'une décélération trop importante. Pour cela vous isolerez le système $\{1,2,3\}$ et écrirez un TMD en A en projection sur $\vec{x}_1$ pour déterminer l'accélération γ (négative) lorsque qu'il y a une perte de contact des roues de l'essieu 2 et le rail 0.

2^{ème} Partie : Mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe

Dans cette partie on ne néglige plus la masse des essieux 2 et 3. On tient donc compte du poids et de l'inertie de chacun des deux essieux.

Hypothèses :

Les essieux 2 et 3 ont respectivement pour centre d'inertie D et C et ont la même masse m_r . Le chariot à une masse m_c . La masse du convoyeur aérien est donc : $m = m_c + 2.m_r$.

Les roues sont des cylindres pleins, et étant donné le faible diamètre de l'axe reliant les roues d'un même essieu, chaque essieu peut être assimilé à un cylindre plein homogène de rayon R et de masse m_r .

Comme on a un roulement sans glissement des roues sur le rail. Les mouvements des essieux 2 et 3 par rapport au rail 0 peuvent être assimilés à des rotations autour d'axes fixe $(B, \vec{x}_0)$ et $(A, \vec{x}_0)$.

- 2.1- Déterminer l'expression, en fonction de m_r et R , de $J_{B2} = J_{A3}$ les moments d'inertie des essieux 2 et 3 par rapport aux axes $(B, \vec{x}_0)$ et $(A, \vec{x}_0)$.
- 2.2- Etablir la relation entre la vitesse de rotation des roues ω ($\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{3/0} = \omega \cdot \vec{x}_1$) et la vitesse de translation du chariot v : $\vec{V}_{G \in 1/0} = v \cdot \vec{y}_1$. En déduire la relation entre les accélérations : γ et $\dot{\omega}$.
- 2.3- Isoler le solide 2 et déterminer l'expression, en fonction de m_r , R , g , α et γ , de la composante tangentielle de l'action du chariot 1 sur l'essieu 2 : $Y_{12} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y}_1$. En déduire $Y_{21} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{y}_1$.
Remarque : avec les nouvelles hypothèses la résultante $\vec{F}_{0 \rightarrow 2}$ n'a plus pour support (BD) : $Y_{02} \neq 0$.
- 2.4- Isoler le chariot 1 et en déduire l'expression, en fonction de m_r , m_c , g , α et γ , de la composante tangentielle l'action de l'essieu 3 sur le chariot 1 : $Y_{31} = \vec{F}_{3 \rightarrow 1} \cdot \vec{z}_1$. En déduire $Y_{13} = \vec{F}_{1 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_1$.
- 2.5- Isoler l'essieu 3 et en déduire l'expression, en fonction de m_r , m_c , R , g , α et γ , du couple moteur C_m permettant une accélération γ .