

Convoyeur aérien - Corrigé

1^{ère} Partie : Mouvements de translation

1.1- Graphe des actions

En rouge le nombre d'inconnues de chacune des actions.

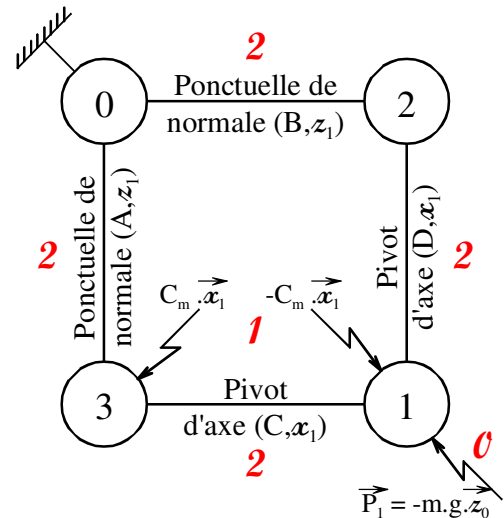
Remarques :

Les actions de liaison pivot ont 2 inconnues car il s'agit de liaisons pivot d'axe $\vec{x}_0$ pour un problème plan $(0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Les actions de liaison ponctuelle ont deux inconnues car les liaisons sont avec adhérence et on a un problème plan.

Le couple moteur à une seule inconnue. Le poids de 1 n'a pas d'inconnue car masse et accélération gravitationnelle connues.

Toutes les actions de liaison sont des glisseurs dont on connaît un point de l'axe : Forces de point d'application connu.



1.2- Ordonnement des isolements

On isole {2}. Ce solide est à l'équilibre (car l'inertie négligée) et soumis à deux forces (glisseurs) de point d'application B et D donc ces deux forces ont même direction $(B,D) = (B, \vec{z}_0)$ (L'axe des deux glisseurs est la droite (BD)). On en déduit donc que ces actions n'ont qu'une seule inconnue.

On isole {1,3}. On applique un TMD en A projeté sur $\vec{x}_1$. On en déduit l'inconnue de l'action de 2 sur 1 qui n'a donc plus d'inconnues.

On isole {1}. On applique un TMD en C projeté sur $\vec{x}_1$. On en déduit le couple moteur C_m .

1.3- Détermination du couple moteur :

On isole {2}. B.A.M.E. ☞ Action de 0 sur 2 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 2}$ appliquée en B

☞ Action de 1 sur 2 : Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ appliquée en D

Ce solide est à l'équilibre (car l'inertie négligée) et soumis à deux forces (glisseurs) de point d'application B et D donc ces deux forces ont même direction $(B,D) = (B, \vec{z}_0)$.

La résultante de l'action de 1 sur 2 s'écrit donc : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = Z_{12} \cdot \vec{z}_1$

Cela peut se redémontrer par un TMD en B : $\vec{0} + \overrightarrow{BD} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1 \rightarrow 2} // \overrightarrow{BD}$

Par le principe des actions mutuelles on a : La résultante de l'action de 2 sur 1 : $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Z_{21} \cdot \vec{z}_1$

On isole {1,3}. B.A.M.E. ☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 3}$ appliquée en A

☞ Action de 2 sur 1 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Z_{21} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en D.

☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

TMD en A en projection sur $\vec{x}_1 \Rightarrow 0 + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_1 + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}_1 \cdot \vec{x}_1 = m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_{G \in 1/0}$

Soit : $(2 \cdot d \cdot \vec{y}_1 + R \cdot \vec{z}_1) \wedge Z_{21} \cdot \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_1 + (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \wedge (-m \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 = m \cdot (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \wedge \gamma \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1$

$$2 \cdot d \cdot Z_{21} - m \cdot g \cdot \vec{x}_1 \wedge (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_0 = m \cdot h \cdot \gamma$$

$$2 \cdot d \cdot Z_{21} - m \cdot g \cdot (d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha) = m \cdot h \cdot \gamma$$

Soit finalement :
$$Z_{21} = \frac{m}{2 \cdot d} \cdot [h \cdot \gamma + g \cdot (d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha)]$$

On isole {1} : B.A.M.E.☞ Action de 3 sur 1 : Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 1}$ appliquée en C☞ Action de 2 sur 1 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Z_{21} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en D.☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G☞ Couple moteur : Couple de vecteur $\vec{C}_{3 \rightarrow 1} = -C_m \cdot \vec{x}_1$ TMD en C en projection sur $\vec{x}_1 \Rightarrow 0 + \vec{CD} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_1 + \vec{CG} \wedge \vec{P}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{C}_{3 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_1 = m \cdot \vec{CG} \wedge \vec{a}_{G \in 1/0}$

$$\text{Soit : } 2.d \cdot \vec{y}_1 \wedge Z_{21} \cdot \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_1 + (d \cdot \vec{y}_1 - (R+h) \cdot \vec{z}_1) \wedge (-m \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 - C_m \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 \\ = m \cdot (d \cdot \vec{y}_1 - (R+h) \cdot \vec{z}_1) \wedge \gamma \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1$$

$$2.d \cdot Z_{21} - m \cdot g \cdot (d \cdot \cos \alpha + (R+h) \cdot \sin \alpha) - C_m = m \cdot (R+h) \cdot \gamma$$

$$C_m = -m \cdot (R+h) \cdot \gamma - m \cdot g \cdot (d \cdot \cos \alpha + (R+h) \cdot \sin \alpha) + m \cdot [h \cdot \gamma + g \cdot (d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha)]$$

Soit finalement :

$$\boxed{C_m = -m \cdot R \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)}$$

1.4- Coefficient d'adhérence minimal**On isole {1,3}. B.A.M.E.**☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 3} = Y_{03} \cdot \vec{y}_1 + Z_{03} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en A☞ Action de 2 sur 1 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Z_{21} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en D.☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

$$\text{TRD} \Rightarrow \vec{F}_{0 \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{P}_1 = m \cdot \vec{a}_{G \in 1/0} \Rightarrow Y_{03} \cdot \vec{y}_1 + Z_{03} \cdot \vec{z}_1 + Z_{21} \cdot \vec{z}_1 - m \cdot g \cdot \vec{z}_0 = m \cdot \gamma \cdot \vec{y}_1$$

$$\text{En projection sur } \vec{y}_1 : Y_{03} - m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot \gamma$$

$$\text{En projection sur } \vec{z}_1 : Z_{03} + \frac{m}{2.d} \cdot [h \cdot \gamma + g \cdot (d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha)] - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\text{On en déduit : } Y_{03} = m \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)$$

$$\text{et : } Z_{03} = \frac{m}{2.d} \cdot [g \cdot (d \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha) - h \cdot \gamma]$$

La condition d'adhérence est que : $Y_{03} \leq \mu \cdot Z_{03}$ (Car Y_{03} et Z_{03} sont positifs pour γ positif)

$$\text{On a donc : } \mu \geq \frac{Y_{03}}{Z_{03}} \Leftrightarrow \boxed{\mu \geq \frac{2.d \cdot (\gamma + g \cdot \sin \alpha)}{g \cdot (d \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha) - h \cdot \gamma}}$$

1.5- Condition sur la décélération pour garder le contact des roues 2**On isole {1,2,3}. B.A.M.E.**☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 3} = Y_{03} \cdot \vec{y}_1 + Z_{03} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en A☞ Action de 0 sur 2 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 2} = \vec{0}$ (Car perte de contact)☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

$$\text{TMD en A en projection sur } \vec{x}_1 \Rightarrow 0 + 0 + \vec{AG} \wedge \vec{P}_1 \cdot \vec{x}_1 = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{a}_{G \in 1/0}$$

$$\text{Soit : } (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \wedge (-m \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1 = m \cdot (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \wedge \gamma \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1 \\ - m \cdot g \cdot \vec{x}_1 \wedge (d \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_0 = m \cdot h \cdot \gamma$$

$$\text{Soit finalement on a décollement pour : } \gamma = -g \cdot \frac{d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha}{h}$$

Donc pour éviter la perte de contact entre les roues 2 et les rails il faut :

$$\boxed{\gamma \geq -g \cdot \frac{d \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha}{h}}$$

2^{ème} Partie : Mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe

2.1- Moment d'inertie

L'essieu 2 est assimilé à un cylindre plein homogène de rayon R , masse m_r et d'axe $(D, \vec{x}_0)$. Donc le moment d'inertie de l'essieu 2 par rapport à son axe $(D, \vec{x}_0)$ sur lequel est son centre d'inertie D est :

$$J_{D2} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot R^2$$

La distance entre les axes $(D, \vec{x}_0)$ et $(B, \vec{x}_0)$ étant R , par le théorème de Huygens on a J_{B2} le moment d'inertie de l'essieu 2 par rapport à l'axe $(B, \vec{x}_0)$:

$$J_{B2} = J_{D2} + m_r \cdot R^2$$

On en déduit :

$$J_{B2} = \frac{3}{2} \cdot m_r \cdot R^2$$

De même :

$$J_{A3} = \frac{3}{2} \cdot m_r \cdot R^2$$

2.2- Relation entre γ et $\dot{\omega}$

Le chariot 1 est en translation par rapport au rail 0. Donc : $\vec{V}_{G \in 1/0} = \vec{V}_{D \in 1/0} = v \cdot \vec{y}_1$.

Le point D étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 2 on a : $\vec{V}_{D \in 1/0} = \vec{V}_{D \in 2/0} = v \cdot \vec{y}_1$.

On en déduit $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 2/0} + \vec{BD} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = v \cdot \vec{y}_1 + R \cdot \vec{z}_1 \wedge \omega \cdot \vec{x}_1 = (v + R \cdot \omega) \cdot \vec{y}_1$

Or on a un roulement sans glissement de l'essieu 2 sur le rail 0 en B . Donc $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{0}$

On en déduit donc :

$$\omega = -\frac{v}{R}$$

Puis par dérivation :

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{\gamma}}{R}$$

2.3- Composante tangentielle de l'action de l'essieu 2 sur le chariot 1

On isole {2}. B.A.M.E. ☞ Action de 0 sur 2 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 2} = Y_{02} \cdot \vec{y}_1 + Z_{02} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en B

☞ Action de 1 sur 2 : Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = Y_{12} \cdot \vec{y}_1 + Z_{12} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en D

☞ Poids de l'essieu : Force $\vec{P}_2 = -m_r \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en D

Etant donné la rotation autour de l'axe fixe $(B, \vec{x}_0)$ de l'essieu 2 par rapport au rail 0, l'application du TMD en B en projection sur l'axe $\vec{x}_0$ donne :

$$0 + \vec{BD} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 + \vec{BD} \wedge \vec{P}_2 \cdot \vec{x}_0 = J_{B2} \cdot \dot{\omega}$$

$$\text{Soit : } R \cdot \vec{z}_1 \wedge (Y_{12} \cdot \vec{y}_1 + Z_{12} \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{z}_1 \wedge (-m_r \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \frac{3}{2} \cdot m_r \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{\dot{\gamma}}{R}\right)$$

$$-R \cdot Y_{12} + m_r \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha = -\frac{3 \cdot m_r \cdot R \cdot \dot{\gamma}}{2}$$

On obtient donc :

$$Y_{12} = \frac{3 \cdot m_r \cdot \dot{\gamma}}{2} + m_r \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Donc par le principe des actions mutuelles :

$$Y_{21} = -\frac{3 \cdot m_r \cdot \dot{\gamma}}{2} - m_r \cdot g \cdot \sin \alpha$$

2.4- Composante tangentielle de l'action du chariot 1 sur l'essieu 3

On isole {1} : B.A.M.E.

☞ Action de 3 sur 1 : Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 1} = Y_{31} \cdot \vec{y}_1 + Z_{31} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en C

☞ Action de 2 sur 1 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Y_{21} \cdot \vec{y}_1 + Z_{21} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en D .

☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m_c \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G

☞ Couple moteur : Couple de vecteur $\vec{C}_{3 \rightarrow 1} = -C_m \cdot \vec{x}_1$

Par le TRD en projection sur $\vec{y}_1$ on a : $\vec{F}_{3 \rightarrow 1} \cdot \vec{y}_1 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{y}_1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{y}_1 + 0 = m_c \cdot \vec{a}_{G \in 1/0} \cdot \vec{y}_1$

$$\Rightarrow (Y_{31} \cdot \vec{y}_1 + Z_{31} \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_1 + (Y_{21} \cdot \vec{y}_1 + Z_{21} \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_1 - m_c \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 = m_c \cdot \dot{\gamma} \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1$$

$$\Rightarrow Y_{31} + Y_{21} - m_c \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot \dot{\gamma}$$

Or du résultat précédent on a : $Y_{21} = -\frac{3.m_r.\gamma}{2} - m_r.g.\sin \alpha$

On obtient donc : $Y_{31} - \frac{3.m_r.\gamma}{2} - m_r.g.\sin \alpha - m_c.g.\sin \alpha = m_c.\gamma$

On obtient donc après simplification : $Y_{31} = \left(m_c + \frac{3.m_r}{2}\right).\gamma + (m_c + m_r).g.\sin \alpha$

Donc par le principe des actions mutuelles : $Y_{13} = -\left(m_c + \frac{3.m_r}{2}\right).\gamma - (m_c + m_r).g.\sin \alpha$

2.4- Couple moteur

On isole {1,3}. B.A.M.E.

- ☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{0 \rightarrow 3} = Y_{03}.\vec{y}_1 + Z_{03}.\vec{z}_1$ appliquée en A
- ☞ Action de 1 sur 3 : Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 3} = Y_{13}.\vec{y}_1 + Z_{13}.\vec{z}_1$ appliquée en C.
- ☞ Poids de 3 : Force $\vec{P}_3 = -m_r.g.\vec{z}_0$ appliquée en C
- ☞ Couple moteur : Couple de vecteur $\vec{C}_{1 \rightarrow 3} = C_m.\vec{x}_1$

Etant donné la rotation autour de l'axe fixe (A, $\vec{x}_0$) de l'essieu 3 par rapport au rail 0, l'application du TMD en A en projection sur l'axe $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$ donne :

$$0 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_1 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{P}_3 \cdot \vec{x}_1 + \vec{C}_{1 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_1 = J_{A3}.\dot{\omega}$$

Soit : $R.\vec{z}_1 \wedge (Y_{13}.\vec{y}_1 + Z_{13}.\vec{z}_1) \cdot \vec{x}_0 + R.\vec{z}_1 \wedge (-m_r.g.\vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 + C_m.\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = \frac{3}{2}.m_r.R^2.\left(-\frac{\gamma}{R}\right)$

$$-R.Y_{13} + m_r.g.R.\sin \alpha + C_m = -\frac{3.m_r.R.\gamma}{2}$$

$$C_m = R.Y_{13} - m_r.g.R.\sin \alpha - \frac{3.m_r.R.\gamma}{2}$$

Or du résultat précédent on a : $Y_{13} = -\left(m_c + \frac{3.m_r}{2}\right).\gamma - (m_c + m_r).g.\sin \alpha$

On obtient donc : $C_m = -R.\left(m_c + \frac{3.m_r}{2}\right).\gamma - R.(m_c + m_r).g.\sin \alpha - m_r.g.R.\sin \alpha - \frac{3.m_r.R.\gamma}{2}$

On obtient donc après simplification : $C_m = -R.[(m_c + 3.m_r).\gamma + (m_c + 2.m_r).g.\sin \alpha]$