

# Moments d'inertie de solides homogène

## 1- Théorème de Huygens

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G.

Soit deux axes parallèles de vecteur directeur  $\vec{Z}$  (tel que  $\vec{Z}$  est un vecteur unitaire :  $\|\vec{Z}\| = 1$ ) et passant par les points O et G.

Soit un point M quelconque de ce solide S.

On pose les distances :

- ☞ d : Entre les axes (O,  $\vec{Z}$ ) et (G,  $\vec{Z}$ )
- ☞  $r_G$  : Entre le point M et l'axe (G,  $\vec{Z}$ )
- ☞  $r_O$  : Entre le point M et l'axe (O,  $\vec{Z}$ )

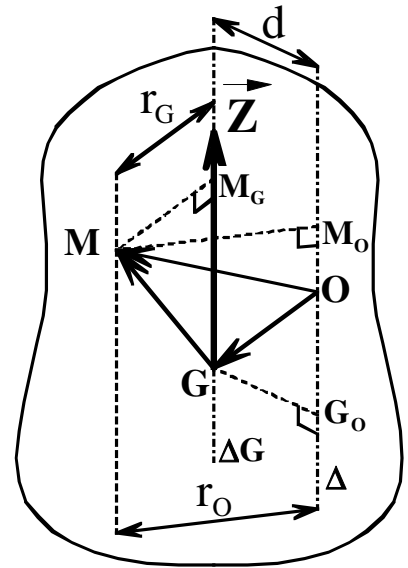
Sachant que  $\|\vec{Z}\| = 1$  et que par définition du produit vectoriel :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{u, v})$$

On en déduit :  $d^2 = (\vec{OG} \wedge \vec{Z})^2$

$$r_G^2 = (\vec{GM} \wedge \vec{Z})^2$$

$$r_O^2 = (\vec{OM} \wedge \vec{Z})^2$$



Par définition du moment d'inertie par rapport à l'axe (O,  $\vec{Z}$ ) on a :

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S r_O^2 \cdot dm = \iiint_S (\vec{OM} \wedge \vec{Z})^2 \cdot dm = \iiint_S ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z})^2 \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z}) \cdot ((\vec{OG} + \vec{GM}) \wedge \vec{Z}) \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S [(\vec{OG} \wedge \vec{Z})^2 + (\vec{GM} \wedge \vec{Z})^2 + 2 \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z}) \cdot (\vec{GM} \wedge \vec{Z})] \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = \iiint_S d^2 \cdot dm + \iiint_S r_G^2 \cdot dm + 2 \cdot \iiint_S (\vec{GM} \wedge \vec{Z}) \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z}) \cdot dm$$

$$I_{O\vec{Z}}(S) = d^2 \cdot \iiint_S dm + I_{G\vec{Z}}(S) + 2 \cdot \left[ \iiint_S \vec{GM} \cdot dm \right] \wedge \vec{Z} \cdot (\vec{OG} \wedge \vec{Z})$$

Or par définition du centre d'inertie :  $\iiint_S \vec{GM} \cdot dm = \vec{0}$  et de la masse :  $m = \iiint_S dm$

Donc : 
$$I_{O\vec{Z}}(S) = I_{G\vec{Z}}(S) + m \cdot d^2$$

**Conclusion**

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G. Soit deux axes parallèles :  $\Delta$  quelconque et  $\Delta_G$  passant par G distant d'une distance d l'un de l'autre. Alors si on pose  $I_\Delta$  et  $I_{\Delta_G}$  les moments d'inertie par rapport aux axes  $\Delta$  et  $\Delta_G$  on a :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + m \cdot d^2$$

**Remarque :**

**Ce théorème de Huygens ne peut s'appliquer que si G est le centre de gravité du solide S.**

## 2- Moments d'inertie de solides homogènes

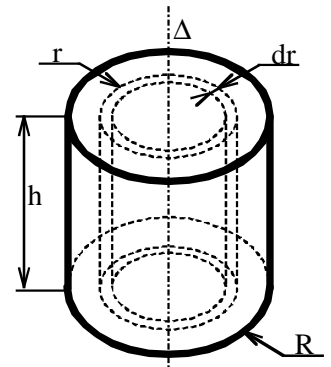
### 2.1- Cylindre plein

Soit un cylindre homogène : ☞ D'axe  $\Delta$  ☞ De rayon  $R$   
 ☞ De hauteur  $h$  ☞ De masse volumique  $\rho$

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux : ☞ D'axe  $\Delta$  ☞ De rayon  $r$   
 ☞ De hauteur  $h$  ☞ D'épaisseur  $dr$

Tous les volumes élémentaires  $dv$  de masse  $dm = \rho \cdot dv$  sont constitués de points tous équidistants de l'axe  $\Delta$ . Cette distance étant  $r$ , on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm$$



Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :  $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$

Donc :  $I_{\Delta} = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr$

$$I_{\Delta} = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot h \cdot \rho}{2}$$

Sachant que la masse  $m$  d'un cylindre homogène de rayon  $R$  de hauteur  $h$  et de masse volumique  $\rho$  est :

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$$

On en déduit le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

### 2.2- Cylindre creux

Soit un cylindre creux homogène : ☞ D'axe  $\Delta$  ☞ De rayon extérieur  $R_{ext}$   
 ☞ De rayon intérieur  $R_{int}$  ☞ De hauteur  $h$  ☞ De masse volumique  $\rho$

Ce volume est la soustraction d'un cylindre plein de rayon  $R_{int}$  à un cylindre plein de rayon  $R_{ext}$ . Etant donné l'expression établie précédemment concernant le moment d'inertie d'un cylindre plein, on a pour ce cylindre creux homogène un moment d'inertie :

$$I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot R_{ext}^4 \cdot h \cdot \rho}{2} - \frac{\pi \cdot R_{int}^4 \cdot h \cdot \rho}{2}$$

Donc :  $I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot (R_{ext}^4 - R_{int}^4) \cdot h \cdot \rho}{2}$

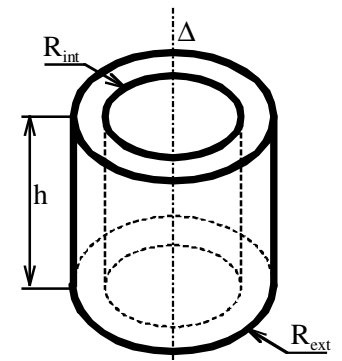
$$I_{\Delta} = \frac{\pi \cdot (R_{ext}^2 + R_{int}^2) \cdot (R_{ext}^2 - R_{int}^2) \cdot h \cdot \rho}{2}$$

Sachant que la masse  $m$  d'un cylindre creux homogène de rayon extérieur  $R_{ext}$  de rayon intérieur  $R_{int}$  de hauteur  $h$  et de masse volumique  $\rho$  est :

$$m = \pi \cdot (R_{ext}^2 - R_{int}^2) \cdot h \cdot \rho$$

D'où le moment d'inertie :

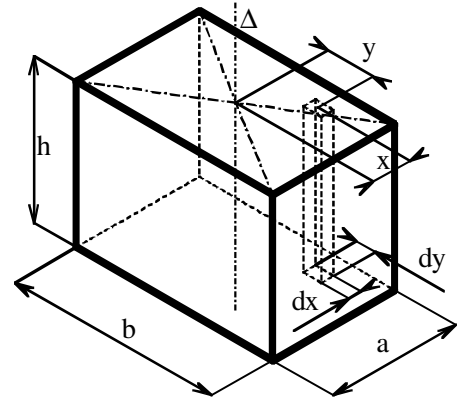
$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (R_{ext}^2 + R_{int}^2)}{2}$$



**2.3- Parallélépipède rectangle**

Soit un parallélépipède rectangle homogène :

- ☞ D'axe  $\Delta$  passant par les milieux de deux faces opposées
- ☞ De hauteur  $h$  (parallèlement à l'axe  $\Delta$ )
- ☞ De largeur  $a$  et de longueur  $b$
- ☞ De masse volumique  $\rho$



On décompose ce parallélépipède en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des parallélépipède rectangle:

- ☞ De hauteur  $h$  (parallèlement à l'axe  $\Delta$ )
- ☞ De largeur  $dx$  et de longueur  $dy$

Tous les volumes élémentaires  $dv$  de masse  $dm = \rho \cdot dv$  sont constitués de points équidistants de l'axe  $\Delta$ . Cette distance étant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , D'où pour ce parallélépipède le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :  $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot h \cdot dx \cdot dy$

Donc :  $I_{\Delta} = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot h \cdot dx \cdot dy$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left[ \int_{-a/2}^{+a/2} (x^2 + y^2) \cdot dx \right] \cdot dy$$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x \right]_{-a/2}^{+a/2} \cdot dy = \rho \cdot h \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{a^3}{12} + y^2 \cdot a \right) \cdot dy$$

$$I_{\Delta} = \rho \cdot h \cdot \left[ \frac{a^3}{12} \cdot y + \frac{y^3}{3} \cdot a \right]_{-b/2}^{+b/2} = \rho \cdot h \cdot \left( \frac{a^3 \cdot b}{12} + \frac{b^3 \cdot a}{12} \right)$$

$$I_{\Delta} = \frac{\rho \cdot h \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{12}$$

Sachant que la masse  $m$  d'un parallélépipède rectangle homogène de dimensions  $a \times b \times h$  est :

$$m = \rho \cdot h \cdot a \cdot b$$

On en déduit le moment d'inertie :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{12}$$

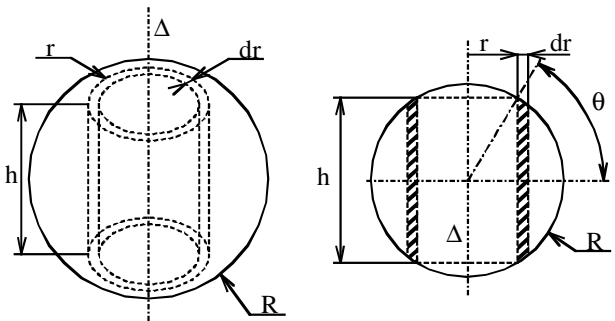
**5.4- Sphère pleine**

Soit une sphère homogène :

- ☞ De rayon  $R$
- ☞ De masse volumique  $\rho$

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux :

- ☞ D'axe  $\Delta$
- ☞ De rayon  $r$
- ☞ De hauteur  $h$
- ☞ D'épaisseur  $dr$



Tous les volumes élémentaires  $dv$  de masse  $dm = \rho \cdot dv$  sont constitués de points équidistants de l'axe  $\Delta$ . Cette distance étant  $r$ , on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm = \int_0^R r^2 \cdot dm$$

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :  $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$

On pose  $\theta$  l'angle défini par un plan perpendiculaire à l'axe  $\Delta$  et la droite passant par l'arrêt intérieure de ce cylindre creux. Ce plan et cette droite passant tout deux par le centre de la sphère.

On a alors :  $r = R \cdot \cos \theta$                        $dr = -R \cdot \sin \theta \cdot d\theta$                        $h = 2 \cdot R \cdot \sin \theta$

On a donc :  $I_{\Delta} = - \int_{\pi/2}^0 (R \cdot \cos \theta)^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \theta \cdot R \cdot \sin \theta \cdot d\theta$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \cdot (1 - \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta) \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \cdot \sin^2 \theta - \cos \theta \cdot \sin^4 \theta) \cdot d\theta$$

$$I_{\Delta} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} - \frac{\sin^5 \theta}{5} \right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4 \times 2}{3 \times 5} \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \rho$$

Sachant que la masse  $m$  d'une Sphère homogène de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$  est :

$$m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho$$

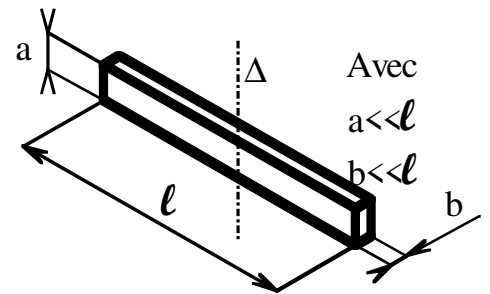
On en déduit le moment d'inertie par rapport à tout axe  $\Delta$  passant par le centre de la sphère :

$$I_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$$

**5.5- Barre de faible section**

Soit une plaque parallélépipédique homogène :

- ☞ D'axe  $\Delta$  passant orthogonalement au milieu de la barre.
- ☞ De Longueur  $l$  (orthogonalement à l'axe  $\Delta$ )
- ☞ De largeur  $a$  et d'épaisseur  $b$
- ☞ De masse volumique  $\rho$



Cette barre est un parallélépipède rectangle homogène de masse volumique  $\rho$  dont la masse est donc :

$$m = \rho \cdot l \cdot a \cdot b$$

Et le moment d'inertie par rapport à cet axe  $\Delta$

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (l^2 + b^2)}{12}$$

Or l'épaisseur  $b$  de cette plaque étant négligeable devant sa longueur  $l$  on a :  $b^2$  négligeable devant  $l^2$   
 Donc cette plaque homogène de hauteur  $h$ , largeur  $a$ , épaisseur  $e$ , masse volumique  $\rho$  a une masse de :

$$m = \rho \cdot l \cdot a \cdot b$$

Et un moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  parallèle à la hauteur et passant par le milieu de la plaque :

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

**Remarque :**

On montre que cette expression reste valable pour toute barre. Même si la section n'est pas rectangulaire. A la condition que les dimensions de cette section restent faibles devant la longueur.