Théorème de l'énergie cinétique : cas des mouvements simples

1-Théorème de l'énergie cinétique : Enoncé

1.1- Démonstration pour une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle au point P de masse m en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}$ par rapport à un repère galiléen.

Si cette masse ponctuelle m est soumise à une force $\overrightarrow{F}$ alors celle-ci fera varier la vitesse $\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}$ conformément au PFD : $\overrightarrow{F} = m.\overrightarrow{a_{P\in m/Rg}} = m\left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}}{dt}\right)_{Rg}$

Faisons le produit scalaire de cette égalité avec la vitesse $\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}$. On a alors :

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}} = m\left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}}{dt}\right)_{Rg}\cdot\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}} = \frac{d\,\frac{1}{2}\cdot m\cdot\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}^2}{dt}$$

Le terme : $\frac{1}{2}\cdot m\cdot\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}^2$ est homogène à une énergie. Cette énergie est due à la vitesse de la masse ponctuelle m dans le repère galiléen Rg. **Il s'agit donc de l'énergie cinétique de la masse m dans son mouvement par rapport au repère Rg.**

Le terme $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{V_{P\in m/Rg}}$ fait donc varier l'énergie cinétique. Il s'agit donc d'un échange d'énergie avec l'extérieur de la masse m. Il est homogène à une énergie par unité de temps, c'est-à-dire à une puissance. **Il s'agit donc de la puissance de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport au repère galiléen Rg.**

1.2- Enoncé pour une masse ponctuelle

La puissance des forces extérieures par rapport à un repère galiléen s'appliquant sur une masse ponctuelle au point P est égale à la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique par rapport à ce même repère galiléen.

Où :

1.3- Généralisation à un solide

Un solide S_i de masse m peut se décomposer en une infinité de petite masses ponctuelles dm situées en P pour lesquelles on a : $m = \iiint_S dm$. La somme de toutes les égalités liées au théorème de l'énergie cinétique appliqué à toutes les masses dm donne alors :

$$\iiint_{S_i}\overrightarrow{F_{Ext}}\cdot\overrightarrow{V_{P\in S/Rg}} + \iiint_{S_i}\overrightarrow{F_{Int}}\cdot\overrightarrow{V_{P\in S/Rg}} = \iiint_{S_i}\frac{d\,E_c(m/Rg)}{dt} = \frac{d\iiint_{S_i}E_C(dm/Rg)}{dt}$$

A partir du principe des actions mutuelles et de l'équiprojectivité des vitesses,

On montre pour un solide que : $\iiint_{S_i}\overrightarrow{F_{Int}}\cdot\overrightarrow{V_{P\in S/Rg}} = 0$

D'autre part : $\iiint_{S_i}\overrightarrow{F_{Ext}}\cdot\overrightarrow{V_{P\in S/Rg}} = \Sigma\, P(Ext\rightarrow S_i/R_g)$ et : $\iiint_{S_i}E_C(dm/R_g) = E_C(S_i/R_g)$

On a donc pour un solide S_i :

$$\Sigma\, P(Ext\rightarrow S_i/R_g) = \frac{d\,E_C(S_i/Rg)}{dt}$$

1.4- Généralisation à un ensemble de solides

Pour un système S constitué d'un ensemble de solides indéformables S : $\mathbf{S = \sum_{i=1}^{n} S_i}$.

L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides :

Prenons l'exemple d'un système S constitué de deux solides S_1 et S_2 :

$$\sum_{i=1}^{2} \Sigma\, P(Ext_{Si} \rightarrow S_i/R_g) = \Sigma\, P(Ext_S \rightarrow S_1/R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + \Sigma\, P(Ext_S \rightarrow S_2/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \Sigma\, P(Ext_{Si} \rightarrow S_i/R_g) = \Sigma\, P(Ext_S \rightarrow S/R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$$

Le terme $P(S_2 \rightarrow S_1/R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2/R_g)$ est appelé la puissance des inter-efforts du système constitué des deux solides, ou puissance des actions intérieures du système. On la note : $P(Int_S \rightarrow S/R_g)$.

On obtient alors : $$\sum_{i=1}^{2} \Sigma\, P(Ext_{Si} \rightarrow S_i/R_g) = \Sigma\, P(Ext_S \rightarrow S/R_g) + P(Int_S \rightarrow S/R_g)$$

On montre de la même manière en généralisant à un système S constitué de n solides S_i :

Donc pour un système S constitué d'un ensemble de solides si on note :

- ☞ $\Sigma\, P(Ext \rightarrow S,Rg)$ et $\Sigma\, P(Int \rightarrow S,Rg)$ les sommes des puissances des actions extérieures et intérieures au système S, par rapport au repère Galiléen R_g.
- ☞ $E_C(S/Rg)$ l'énergie cinétique du système S par rapport au repère Rg.

Alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

2- Calcul de l'énergie cinétique

Soit un solide S décomposé en une infinité de petite masse ponctuelles dm situées en P. On a alors :

$$\mathbf{m = \iiint_S dm} \qquad \textbf{et :} \qquad \mathbf{E_C(S/Rg) = \iiint_S E_C(dm/Rg) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P\in S/Rg}}^2 \, . \, dm}$$

2.1- Cas d'un solide en translation

Pour un solide en translation quelque soit les points P et A on a : $\overrightarrow{V_{P\in S/Rg}} = \overrightarrow{V_{A\in S/Rg}}$

On en déduit : $E_C(S/Rg) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A\in S/Rg}}^2 \, . \, dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A\in S/Rg}}^2 \, . \iiint_S dm$

Donc :

Cette relation est notamment valable avec le centre de gravité G du solide : $\mathbf{E_C(S/Rg) = \frac{1}{2} m \, . \, \overrightarrow{V_{G\in S/Rg}}^2}$

2.2- Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans la repère galiléen R_g

Soit un solide S en rotation d'axe Δ telle que la vitesse de rotation est ω.

Quelque soit le point P de S il existe un point P' défini comme le projeté orthogonal du point P sur l'axe Δ. Le segment $\overrightarrow{PP'}$ est alors le rayon de la trajectoire circulaire de P ($T_{P\in S/Rg}$) défini par la rotation.

Quelques soit le point P on a alors : $\overrightarrow{\mathbf{V_{P\in S/Rg}}} = \overrightarrow{\mathbf{V_{P'\in S/Rg}}} + \overrightarrow{\mathbf{PP'}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{\Omega(S/Rg)}}$

Or le point P' étant sur l'axe Δ : $\overrightarrow{\mathbf{V_{P'\in S/Rg}}} = \vec{\mathbf{0}}$ donc : $\overrightarrow{\mathbf{V_{P\in S/Rg}}} = \overrightarrow{\mathbf{PP'}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{\Omega(S/Rg)}}$

D'autre part : $\overrightarrow{\mathbf{\Omega(S/Rg)}} \perp \overrightarrow{\mathbf{PP'}}$ donc: $\overrightarrow{\mathbf{V_{P\in S/Rg}}}^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{PP'}}\|^2 . \|\overrightarrow{\mathbf{\Omega(S/Rg)}}\|^2$

Par conséquent : $E_C(\mathbf{S/Rg}) = \iiint_S \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\mathbf{PP'}}\|^2 . \|\overrightarrow{\mathbf{\Omega(S/Rg)}}\|^2 \, \mathbf{dm}$

Or : $\|\overrightarrow{\Omega(S/Rg)}\| = \omega$ quelque soit le point P

Et : $\overrightarrow{PP'}$ est un rayon.

Donc si on note r ce rayon on a : $\mathbf{E_C(S/Rg)} = \iiint_S \frac{1}{2} \mathbf{r^2 . \omega^2 \, dm}$

Donc si un solide S est en rotation d'axe Δ alors son énergie cinétique dans le repère Rg est :

Où : ☞ I_Δ est le moment d'inertie de S par rapport à Δ

☞ ω est la vitesse de rotation de S par rapport à Rg

2.3- Cas de plusieurs solides

Si un système S est constitué de n solides S_i : $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ alors l'énergie cinétique du système par rapport au repère Rg est la somme des énergies cinétiques de chacun de ces solides par rapport à Rg.

3- Puissance d'une action mécanique

3.1- Action mécanique

Une action mécanique d'un corps S_1 sur un autre corps S_2 est en générale la somme sur une surface Σ d'une pression répartie $\overrightarrow{p(P)}$, ou sur un volume V d'une charge de densité $\overrightarrow{g(P)}$, variable ou constante en fonction du point P. L'action mécanique qui résulte de cette charge répartie peut être modélisée par le torseur dont les éléments de réduction en A sont pour :

☞ La résultante $R(\overrightarrow{1\rightarrow 2})$ tel que : $\overrightarrow{\mathbf{R(1\rightarrow 2)}} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathbf{p(P)}}.\mathbf{ds}$ **ou** $= \iiint_V \overrightarrow{\mathbf{g(P)}}.\mathbf{dv}$

☞ Le moment en A $\mathcal{M}_A(\overrightarrow{1\rightarrow 2})$ tel que : $\overrightarrow{\mathbf{\mathcal{M}_A(1\rightarrow 2)}} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{p(P)}}.\mathbf{ds}$ **ou** $= \iiint_V \overrightarrow{\mathbf{AP}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{g(P)}}.\mathbf{dv}$

3.2- Puissance d'une action mécanique

3.2.1- Définition

La puissance d'une action mécanique sur d'un corps 1 sur un solide 2 par rapport au repère R_g est la somme des puissances des forces élémentaires créées par la charge répartie de densité $\overrightarrow{p(P)}$

On a donc : $\mathbf{P(1\rightarrow 2/R_g) = \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)} . \overrightarrow{V_{P\in 2/Rg}}\, ds}$

3.2.2- Démonstration

Quelque soit les points A et P on a : $\overrightarrow{V_{P\in 2/Rg}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} + \overrightarrow{\Omega(2/R_g)} \wedge \overrightarrow{AP}$

Donc : $P(1\rightarrow 2/R_g) = \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)} . [\, \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} + \overrightarrow{\Omega(2/R_g)} \wedge \overrightarrow{AP}\,].ds$

$P(1\rightarrow 2/R_g) = \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)} . \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}}.ds + \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)} . \overrightarrow{\Omega(2/R_g)} \wedge \overrightarrow{AP}.ds$

$P(1\rightarrow 2/R_g) = \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} . \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)}.ds + \iint_\Sigma \overrightarrow{\Omega(2/R_g)} . \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P)}.ds$

$P(1\rightarrow 2/R_g) = \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} . \iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)}.ds + \overrightarrow{\Omega(2/R_g)} . \iint_\Sigma \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P)}.ds$

Or: $\iint_\Sigma \overrightarrow{p(P)}.ds = \overrightarrow{R(1\rightarrow 2)}$ est la résultante de l'action de 1 sur 2

$\iint_\Sigma \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P)}.ds = \overrightarrow{\mathcal{M}_A(1\rightarrow 2)}$ est le moment au point A de l'action de 1 sur 2

3.2.3- Conclusion

La puissance d'une action mécanique d'un corps 1 sur corps 2 par rapport au repère R_g est :

La somme de ces deux produits scalaire est appelée :

Remarque : Pour calculer le comoment d'un torseur cinématique et d'un torseur sthénique, on fait la somme des produits scalaires entre les résultantes et moments. Cependant ATTENTION

3.2.4- Puissance d'une force

Si l'action est une **force $\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}}$ appliquée en un Point A :** $P(1\rightarrow 2,R_g) = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/Rg}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} \end{Bmatrix}$

Soit :

3.2.5- Puissance d'un couple

Si l'action est un **couple de vecteur $\overrightarrow{C_{1\rightarrow 2}}$** : $P(1\rightarrow 2,R_g) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{C_{1\rightarrow 2}} \end{Bmatrix} \otimes {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/Rg}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/Rg}} \end{Bmatrix}$

Soit :

4- Travail et puissance des actions de liaison

4.1- Puissances des actions de liaisons intérieures

Soit un ensemble S constitué de deux solides 1 et 2. La puissance des actions intérieures à l'ensemble S est la somme de la puissance de l'action de 1 sur 2 par rapport au repère R_g et de celle de 2 sur 1 par rapport au repère R_g .

On a donc : $\mathbf{P(Int \rightarrow S/R_g) = P(1 \rightarrow 2, R_g) + P(2 \rightarrow 1, R_g)}$

Soit : $P(Int \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_g)\}$

$P(Int \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(R_g/1)\}$

$P(Int \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes [\,\{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{\mathcal{V}(R_g/1)\}\,]$

Soit :

Conclusions La puissance des efforts intérieurs est :

☞

☞

4.2- Puissances des actions de liaisons extérieures

Soit un ensemble S constitué de plusieurs solides dont le solide 1 et un solide 0 extérieur à l'ensemble S. Tel que ce solide 0 est en liaison avec le solide 1.

La puissance de l'action extérieure du solide 0 sur le solide 1 par rapport au repère R_g est :

Le premier comoment est nul si la liaison est parfaite et le deuxième comoment est nul si le solide extérieur 0 est fixe dans le repère R_g.

Conclusions

☞

Et :

☞