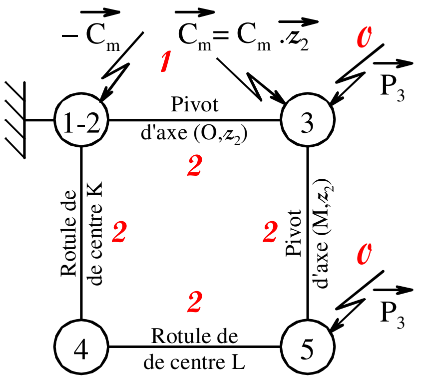
# PSI – DM1 Bras manipulateur Corrigé

## 1- Graphe de structure




Torseurs sthéniques des différentes liaisons pivot d'axe $\overrightarrow{z_2}$ et de centres O ou M ou rotules de centres K ou L :

$$\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \underset{\text{Centre}}{\begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{\mathcal{B}_1}$$ Donc *2 inconnues*

2 pour la résultante et 0 pour le moment nul.

**Les torseurs de ces différentes actions de liaison sont donc des glisseurs d'axe passant au centre de la liaison. Soit des forces appliquées au centre de la liaison**.

## 2- Isolement de 4

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 4 :

- ☞ Action de 2 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{2\to 4}}$ appliquée en K (Car liaison rotule de centre K)
- ☞ Action de 5 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{5\to 4}}$ appliquée en L (Car liaison rotule de centre L)

Cette tringle 4 est à l'équilibre (inertie négligée) et est soumise à 2 forces (2 glisseurs), ces deux forces ont donc le même support : la droite (KL) = (K, $\overrightarrow{x_3}$).

Par le principe des actions mutuelles on en déduit que l'action de 4 sur 5 est :

**Une force $\overrightarrow{F_{4\to 5}} = X_{45}.\overrightarrow{x_3}$ de support (KL) = (K, $\overrightarrow{x_3}$).**

## 3- Vitesse maximale et accélération angulaire du bras 3

La course du bras 3 $\left(\Delta\beta = \dfrac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ représente l'aire sous le trapèze des vitesses de rotation.

Donc : $\dfrac{\pi}{3} = \dot\beta_{max}.\dfrac{T_1}{2} + \dot\beta_{max}.(T - T_1 - T_1) + \dot\beta_{max}.\dfrac{T_1}{2} = \dot\beta_{max}.(T - T_1)$ Avec : $T = 2$ s et $T_1 = 0{,}5$ s

Donc : $\boldsymbol{\dot\beta_{max} = \dfrac{\Delta\beta}{T - T_1} = \dfrac{\pi}{3.(2 - 0{,}5)} = \dfrac{2.\pi}{9}\ \text{rad.s}^{-1}}$ D'autre part : $\boldsymbol{\ddot\beta = \dfrac{\dot\beta_{max}}{T_1} = \dfrac{2.\pi}{9}.\dfrac{1}{0{,}5} = \dfrac{4.\pi}{9}\ \text{rad.s}^{-2}}$

## 4- Mouvement du préhenseur 5

Dans le paramétrage on dit que le quadrilatère OMLK est un parallélogramme déformable. Et on en déduit logiquement que quelque soit la position les bases liées aux solides 5 et 2 sont identique : $\mathcal{B}_5 = \mathcal{B}_2$.

On a donc : $\overrightarrow{\Omega_{5/2}} = \vec{0}$ . **Donc le mouvement de 5 par rapport à 2 est une translation.**

Remarques :

- ☞ Le fait que OM = KL et OK = ML induit que le quadrilatère OMKL est un parallélogramme et donc que (OK) // (ML) Or O et K sont fixes sur 2 et M et L sont fixes sur 5. Donc le solide 5 reste tourjours « parallèle » au solide 2. D'où le mouvement de translation.
- ☞ Du fait que le point O est fixe sur 2 et 3 (Car centre de la liaison pivot) et que le point M est fixe sur 3 et 5, induit que la trajectoire du point M appartenant à 5 par rapport à 2 est un cercle. On parle d'un mouvement de translation circulaire.

## 4- Accélération du préhenseur 5

Etant donné que le mouvement de 5 par rapport à 2 est une translation $\overrightarrow{V_{M\in 5/2}} = \overrightarrow{V_{G\in 5/2}}$

D'autre part M est le centre de la liaison pivot entre 5 et 3 donc $\overrightarrow{V_{M\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{M\in 5/2}} = \overrightarrow{V_{G\in 5/2}}$

Ensuite O est le centre de la liaison pivot entre 3 et 2 donc $\overrightarrow{V_{O\in 3/2}} = \vec{0}$ Donc par la relation de Varignon on obtient $\overrightarrow{V_{G\in 5/2}} = \overrightarrow{V_{M\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{O\in 3/2}} + \overrightarrow{MO}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} + \overrightarrow{MO}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$

D'autre part on a : $\overrightarrow{OM} = \ell.\overrightarrow{x_3}$ soit $\overrightarrow{MO} = -\ell.\overrightarrow{x_3}$ et $\beta = (\widehat{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}})$ donc : $\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \dot{\beta}.\overrightarrow{z_3}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_{G\in 5/2}} = -\ell.\overrightarrow{x_3} \wedge \dot{\beta}.\overrightarrow{z_3} = \ell.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_3}}$$

Par dérivation vectorielle on obtient l'accélération : $\overrightarrow{a_{G\in 5/2}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in 5/2}}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_2}$

Puis par la relation de Bour : $\overrightarrow{a_{G\in 5/2}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in 5/2}}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in 5/2}}$

$$\overrightarrow{a_{G\in 5/2}} = \left(\frac{d\,\ell.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_3}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_3} + \dot{\beta}.\overrightarrow{z_3} \wedge \ell.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_3}$$

Soit finalement : $\boldsymbol{\overrightarrow{a_{G\in 5/2}} = \ell.\ddot{\beta}.\overrightarrow{y_3} - \ell.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}}$

## 6- Isolement du système {Préhenseur 5 + Carter}

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur {3,5} :

- ☞ Action de la pesanteur sur 5 : Force $\overrightarrow{P_5} = -m_5.g.\overrightarrow{y_2}$ appliquée en G.
- ☞ Action de 4 sur 5 : Une force $\overrightarrow{F_{4\to5}} = X_{45}.\overrightarrow{x_3}$ appliquée en L
- ☞ Action de 3 sur 5 : Une force $\overrightarrow{F_{3\to5}} = X_{35}.\overrightarrow{x_3} + Y_{35}.\overrightarrow{y_3}$ appliquée en M ; Car due à la liaison pivot d'axe $(M, \overrightarrow{z_3})$ pour un problème plan $(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{P_5} + \overrightarrow{F_{4\to5}} + \overrightarrow{F_{3\to5}} = m_5.\overrightarrow{a_{G\in 5/2}}$

Théorème du moment dynamique au point M : $\overrightarrow{z_2}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{P_5}.\overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{ML}\wedge\overrightarrow{F_{4\to5}}.\overrightarrow{z_2} + 0 = \overrightarrow{MG}\wedge m_5.\overrightarrow{a_{G\in 5/2}}.\overrightarrow{z_2}}$$

On obtient donc les trois équations scalaires : $\overrightarrow{y_2}$3

TRD / $\overrightarrow{x_3}$ : $-m_5.g.\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{x_3} + X_{45} + X_{35} = m_5.(\ell.\ddot{\beta}.\overrightarrow{y_3} - \ell.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}).\overrightarrow{x_3}$

TRD / $\overrightarrow{y_3}$ : $-m_5.g.\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{y_3} + 0 + Y_{35} = m_5.(\ell.\ddot{\beta}.\overrightarrow{y_3} - \ell.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}).\overrightarrow{y_3}$

TMD en M / $\overrightarrow{z_2}$ : $-h.\overrightarrow{y_2}\wedge(-m_5.g.\overrightarrow{y_2}).\overrightarrow{z_2} + d.\overrightarrow{y_2}\wedge X_{45}.\overrightarrow{x_3}.\overrightarrow{z_2} = -m_5.h.\overrightarrow{y_2}\wedge(\ell.\ddot{\beta}.\overrightarrow{y_3} - \ell.\dot{\beta}^2.\overrightarrow{x_3}).\overrightarrow{z_2}$

$$\left|\begin{array}{c} X_{45} + X_{35} = m_5.(g.\sin\beta - \ell.\dot{\beta}^2) \\ Y_{35} = m_5.(g.\cos\beta + \ell.\ddot{\beta}) \\ 0 - d.X_{45}.\cos\beta = -m_5.h.\ell.(\ddot{\beta}.\sin\beta + \dot{\beta}^2.\cos\beta) \end{array}\right.$$

Soit :

$$\boldsymbol{X_{45} = \frac{m_5.h.\ell}{d.\cos\beta}.(\ddot{\beta}.\sin\beta + \dot{\beta}^2.\cos\beta)}$$

$$\boldsymbol{X_{35} = m_5.(g.\sin\beta - \ell.\dot{\beta}^2) - \frac{m_5.h.\ell}{d.\cos\beta}.(\ddot{\beta}.\sin\beta + \dot{\beta}^2.\cos\beta)}$$

$$\boldsymbol{Y_{35} = m_5.(g.\cos\beta + \ell.\ddot{\beta})}$$

## 7- Moment d'inertie du bras 3

Le bras 3 est assimilé à une barre homogène de longueur $\ell$ dont la section est faible devant sa longueur (suivant $\overrightarrow{x_3}$). D'où son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{z_3})$ : $I_{G.z_3}(3) = \dfrac{m_3.\ell^2}{12}$

Donc d'après le théorème de Huygens on obtient le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z_3})$ :

$$I_{O.z_3}(3) = I_{G.z_3}(3) + m_3.\overrightarrow{OG_3}^2 = \frac{m_3.\ell^2}{12} + m_3.\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m_3.\ell^2.\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$$

On en déduit : $\boldsymbol{I_{O.z_3}(3) = \dfrac{m_3.\ell^2}{3}}$

## 8- Couple moteur maximal

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le bras 3 :

- ☞ Action de la pesanteur : Force $\overrightarrow{P_3} = - m_3.g.\overrightarrow{y_2}$ appliquée en $G_3$.
- ☞ Action de 5 sur 3 : Force $\overrightarrow{F_{5\to3}} = - \overrightarrow{F_{3\to5}} = - X_{35}.\overrightarrow{x_3} - Y_{35}.\overrightarrow{y_3}$ appliquée en M
- ☞ Action de 2 sur 3 : Due à la liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_2})$
- ☞ Action du couple moteur : Couple de vecteur moment : $\overrightarrow{C_m} = C_m.\overrightarrow{z_2}$

Le théorème du moment dynamique (TMD) au point O en projection sur $\overrightarrow{z_3}$ donne :

$$\mathbf{\overrightarrow{OG_3}\wedge\overrightarrow{P_3}.\overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F_{5\to3}}.\overrightarrow{z_3} + 0 + C_m = I_{O.z_3}(3).\ddot{\beta}}$$

$$\frac{\ell}{2}.\overrightarrow{x_3}\wedge(- m_3.g.\overrightarrow{y_2}).\overrightarrow{z_3} + \ell.\overrightarrow{x_3}\wedge(- X_{35}.\overrightarrow{x_3} - Y_{35}.\overrightarrow{y_3}).\overrightarrow{z_3} + C_m = \frac{m_3.\ell^2}{3}.\ddot{\beta}$$

$$C_m = \frac{m_3.g.\ell}{2}.\overrightarrow{z_3}\wedge\overrightarrow{x_3}.\overrightarrow{y_2} + \ell.Y_{35}.\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{z_3} + \frac{m_3.\ell^2}{3}.\ddot{\beta}$$

$$C_m = \frac{m_3.\ell^2}{3}.\ddot{\beta} + \frac{m_3.g.\ell}{2}.\cos\beta + \ell.Y_{35} = \frac{m_3.\ell^2}{3}.\ddot{\beta} + \frac{m_3.g.\ell}{2}.\cos\beta + \ell.m_5.(g.\cos\beta + \ell.\ddot{\beta})$$

Soit finalement : $\boxed{\mathbf{C_m = \left(m_5 + \frac{m_3}{3}\right).\ell^2.\ddot{\beta} + \left(m_5 + \frac{m_3}{2}\right).g.\ell.\cos\beta}}$

Ce couple est donc maximal lorsque $\ddot{\beta}$ est maximal et $\beta$ minimal. Ce qui est vérifié au début du mouvement à la date t = 0 où $\ddot{\beta} = \frac{4.\pi}{9}$ rad.s$^{-2}$ et $\beta = 0 \Rightarrow \cos\beta = 1$

D'où le couple maximal : $\boxed{\mathbf{C_{mMax} = \left(m_5 + \frac{m_3}{3}\right).\ell^2.\frac{4.\pi}{9} + \left(m_5 + \frac{m_3}{2}\right).g.\ell}}$