

DS N°1**Automate d'exploration de l'hémostase****Corrigé****2- Analyse de l'exigence "Positionner une seringue au-dessus d'un flacon****Question 1**

La distance parcourue lors du déplacement correspond à l'aire sous la courbe de vitesse en fonction du temps. Cette courbe étant un trapèze, on a donc :

$$x_M^{\max} = V_M^{\max} \cdot \frac{T + (T - 2 \cdot T_a)}{2}$$

Soit :

$$x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$$

Question 2

a- L'application du théorème de l'énergie cinétique nous donne : $C_m = \frac{J_e}{\lambda} \cdot \dot{v}^x$

☞ **Sur la première phase** sachant que : $\dot{v}^x = \frac{V_M^x}{T_a}$ on obtient :

$$C_m = \frac{J_e \cdot V_M^x}{\lambda \cdot T_a}$$

☞ **Sur la deuxième phase** sachant que : $\dot{v}^x = 0$ on obtient :

$$C_m = 0$$

☞ **Sur la troisième phase** sachant que : $\dot{v}^x = -\frac{V_M^{\max}}{T_a}$ on obtient :

$$C_m = -\frac{J_e \cdot V_M^x}{\lambda \cdot T_a}$$

b- La puissance sera maximale pour un couple maximal et une vitesse maximale.

Donc la puissance sera maximale à la fin de la première phase

c- La puissance fournie par le moteur est de : $P = C_m \cdot \omega_M^x$ Sachant que : $\lambda = \frac{v^x}{\omega_M^x}$

La puissance maximale fournie par le moteur est de :

$$P_{\max} = \frac{J_e \cdot V_M^x{}^2}{\lambda^2 \cdot T_a}$$

d- D'autre par : $x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$ Donc :

$$P_{\max} = \frac{J_e \cdot x_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$$

Question 3

Posons $f(T_a) = T_a \cdot (T - T_a)^2$ on a : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = (T - T_a)^2 - 2 \cdot T_a \cdot (T - T_a) = (T - T_a) \cdot (T - 3 \cdot T_a)$

Donc : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} = 0 \Leftrightarrow T_a = \frac{T}{3}$ car : $T_a \in \left[0, \frac{T}{2} \right]$

D'autre part pour : $T_a \in \left[0, \frac{T}{3} \right]$ on a : $\frac{d f(T_a)}{d T_a} > 0$

Donc : $T_a \cdot (T - T_a)^2$ est maximal pour $T_a = \frac{T}{3}$ Sachant que : $P_{\max} = \frac{J_e \cdot x_M^{\max 2}}{\lambda^2 \cdot T_a \cdot (T - T_a)^2}$

On en déduit que la puissance est minimale pour $T_a = \frac{T}{3}$

Question 4

On sait que : $x_M^{\max} = V_M^x \cdot (T - T_a)$ Donc pour $T_a = \frac{T}{3}$ $x_M^{\max} = V_M^x \cdot \left(T - \frac{T}{3} \right) = \frac{2 \cdot T}{3} \cdot V_M^x$

On obtient donc : $V_M^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T}$ Avec : $V_M^x = R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x$ Soit : $R_p \cdot k \cdot \omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T}$

On en déduit la vitesse de rotation maximale que doit atteindre le moteur :

$$\omega_{\max}^x = \frac{3 \cdot x_M^{\max}}{2 \cdot T \cdot R_p \cdot k} = \frac{3 \times 0,55}{2 \times 1 \times 0,02 \times 0,1} = 412,5 \text{ rad/s}$$

Or la fréquence de rotation maximale que peut atteindre le moteur est de $N_{\max}^{\text{mot}} = 4\,150 \text{ tr/min}$. Soit une vitesse de rotation de : $\omega_{\max}^{\text{mot}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\max}^{\text{mot}}}{60} = 435 \text{ rad/s} > 412,5 \text{ rad/s}$.

Le choix du moteur est donc validé.

3- Analyse de l'exigence "Mettre la bille en oscillation"

Question 5

a- On a :
$$\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d (R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R1/R0} \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1$$

Soit :
$$\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1 = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 \quad \text{Sachant que : } \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = v \cdot \vec{x}_1$$

On obtient :
$$v = \dot{\theta} \cdot (R-r)$$

b- D'autre part :
$$\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{V}_{G \in \text{bille}/0} + \overrightarrow{\Omega}_{\text{bille}/0} \wedge \overrightarrow{GI} = v \cdot \vec{x}_1 + \omega_b \cdot \vec{y}_1 \wedge r \cdot \vec{z}_1 = (v + \omega_b \cdot r) \cdot \vec{x}_1$$

Or la condition de roulement sans glissement impose que :
$$\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{0} \quad \text{soit : } v = -r \cdot \omega_b$$

Des deux relations précédente, on obtient :
$$\dot{\theta} \cdot (R-r) = -r \cdot \omega_b \quad \text{Soit : } \omega_b = \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r}$$

Question 6

Le vecteur accélération du centre de gravité G de la bille est :
$$\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}}{dt} \right)_{R_0}$$

Soit :
$$\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R1/R0} \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$$

Soit :
$$\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$$

On obtient donc :
$$\vec{a}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2 \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1$$

Question 7

Le théorème de Huygens appliqué à la bille permet d'écrire $J_I = J_G + m \cdot \|\overrightarrow{IG}\|^2$ car $\overrightarrow{IG} \perp \vec{y}_0$

Or : $\overrightarrow{IG} = -r \cdot \vec{z}_1$ Donc :
$$J_I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2$$

Le mouvement de la bille par rapport au rail 0 s'apparente d'un point de vue dynamique à une rotation autour d'un axe supposé fixe $(I, \vec{y}_0) = (I, \vec{y}_1)$ à la vitesse de rotation ω_b Donc :

$$\overrightarrow{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = J_I \cdot \dot{\omega}_b \quad \text{or : } \omega_b = \dot{\theta} \cdot \frac{r-R}{r} \quad \text{Donc : } \overrightarrow{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{r-R}{r} \cdot \ddot{\theta}$$

On obtient donc :
$$\overrightarrow{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r \cdot (r-R) \cdot \ddot{\theta}$$

Question 8

a- Les actions extérieures s'appliquant sur la bille sont :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m \cdot g \cdot \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v \cdot v \cdot \vec{x}_1$
- ☞ Action du rail sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1 \cdot \vec{x}_1 - N_1 \cdot \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $F(t) \cdot \vec{x}_0$

Le théorème du moment dynamique en I en projection sur l'axe \vec{y}_1 donne :

$$\overrightarrow{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \overrightarrow{IG} \wedge m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 + \overrightarrow{IG} \wedge (-f_v \cdot v \cdot \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_1 + \mathbf{0} + \overrightarrow{IG} \wedge F(t) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1$$

Avec : $\overrightarrow{IG} = -r \cdot \vec{z}_1 \quad \overrightarrow{\delta}_I(\text{bille}/0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{7}{5} \cdot m \cdot r \cdot (r-R) \cdot \ddot{\theta} \quad v = (R-r) \cdot \dot{\theta}$

Donc : $\frac{7}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta} = \vec{y}_1 \wedge (-r. \vec{z}_1).m.g. \vec{z}_0 - r. \vec{z}_1 \wedge (-f_v.v. \vec{x}_1). \vec{y}_1 + \vec{y}_1 \wedge (-r. \vec{z}_1). F(t). \vec{x}_0$

Soit : $\frac{7}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta} = m.g.r.\sin \theta + r.f_v.(R - r).\dot{\theta} - r.F(t).\cos \theta$

Ou : $\frac{7}{5}.m.(R - r).\ddot{\theta} + f_v.(R - r).\dot{\theta} + m.g.\sin \theta = F(t).\cos \theta$

On obtient donc : $a_0.\ddot{\theta} + b_0.f_v.\dot{\theta} + c_0.\sin \theta = F(t).\cos \theta$ avec :

$a_0 = \frac{7}{5}.m.(R - r)$
$b_0 = R - r$
$c_0 = m.g$

Question 9

La linéarisation de l'équation (3) pour un angle θ petit ($\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$) donne :

$F(t) = a_0.\ddot{\theta} + b_0.f_v.\dot{\theta} + c_0.\theta$

Soit dans le domaine de Laplace : $F(p) = a_0.p^2.\Theta(p) + b_0.f_v.p.\Theta(p) + c_0.\Theta(p)$

On obtient donc la fonction de transfert : $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{c_0 + b_0.f_v.p + a_0.p^2}$

Soit : $H(p) = \frac{\frac{1}{c_0}}{1 + \frac{b_0.f_v}{c_0}.p + \frac{a_0}{c_0}.p^2}$

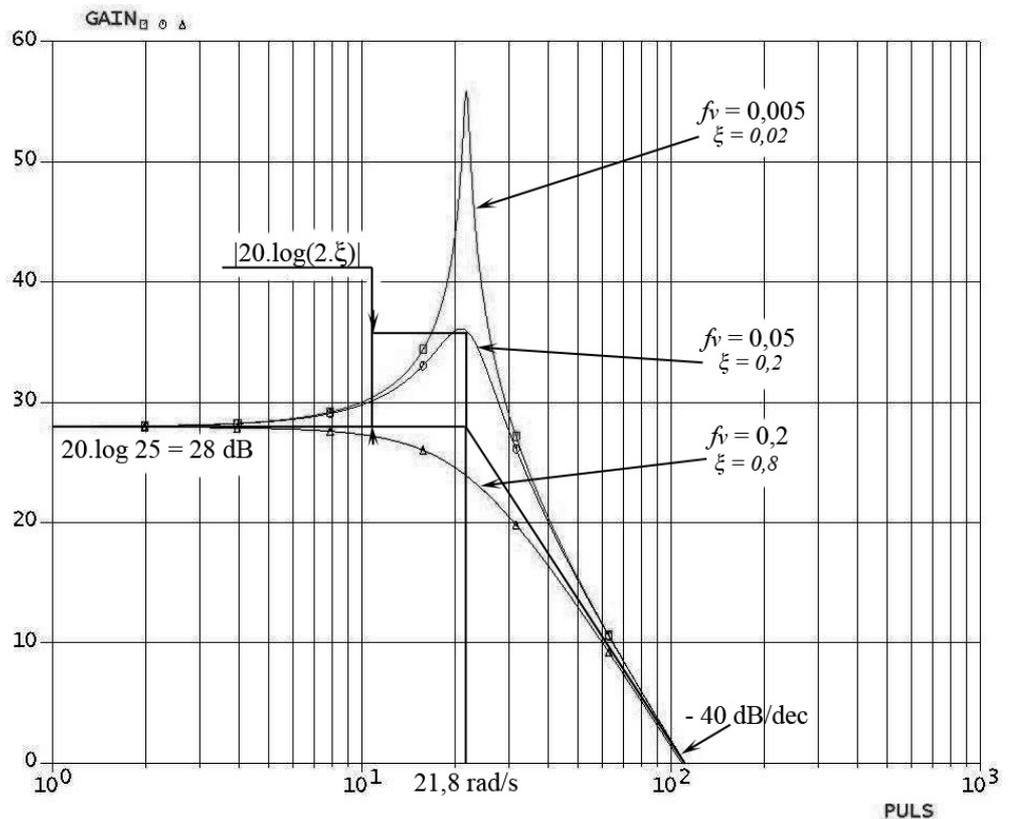
Une fonction de transfert du second ordre dont :

Le gain statique est : $K_S = \frac{1}{c_0}$

La pulsation propre non amortie est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}$

De facteur d'amortissement : $\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{b_0.f_v}{c_0} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} \cdot \frac{b_0.f_v}{c_0}$ Soit : $\xi = \frac{b_0.f_v}{2.\sqrt{a_0.c_0}}$

Question 10



Question 11

L'expression du gain dynamique est : $G_{db}(\omega) = 20.\log K_S - 10.\log((1 - u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2)$ avec : $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

Donc pour une pulsation égale à la pulsation propre ($\omega_{bob} = \omega_0$) le gain dynamique est :

$$G_{db}(\omega_0) = 20.\log K_S - 20.\log(2.\xi) \text{ et dépend du facteur d'amortissement } \xi \text{ et donc de } f_v.$$

De même à la pulsation de résonance $\omega = \omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\xi^2}$ le gain dynamique est :

$$G_{dB}(\omega_r) = 20.\log K_S - 20.\log(2.\xi.\sqrt{1 - \xi^2}) \text{ expression qui dépend de } \xi \text{ et donc de } f_v.$$

Cependant cette pulsation de résonance ω_r dépend de ξ et doit donc varier car le coefficient de frottement f_v varie au cours de la mesure. Ce qui est en contradiction avec le principe de la mesure durant laquelle la pulsation ω_{bob} sera constante.

Pour observer au mieux l'évolution du coefficient de frottement il faut donc une pulsation égale à la pulsation propre du système non amorti : $\omega_{bob} = \omega_0$.

Question 12

a- Pour $\omega_{bob} \rightarrow 0$ le gain dynamique en dB est de : $20.\log\left(\frac{A_0}{E}\right) = 20 \log K_S$

Pour $\omega_{bob} = \omega_0$ le gain dynamique en dB est de : $20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{E}\right) = 20 \log K_S - 20.\log(2.\xi)$

On a donc : $20.\log\left(\frac{A_0}{E}\right) - 20.\log\left(\frac{A_{\omega_0}}{E}\right) = 20.\log\left(\frac{A_0}{A_{\omega_0}}\right) = 20.\log(2.\xi)$

D'où le rapport des amplitudes : $\frac{A_0}{A_{\omega_0}} = 2.\xi$ Soit dans notre cas où $\xi = 4.f_v$: $\frac{A_0}{A_{\omega_0}} = 8.f_v$

b- Sur la figure 13-a on mesure une amplitude pour $\omega_{bob} = 1 \text{ rad/s}$ une amplitude $A_0 = 0,057^\circ$

Sur la figure 13-c on mesure une amplitude pour $\omega_{bob} = 21,8 \text{ rad/s}$ une amplitude $A_{\omega_0} = 6,7^\circ$

D'où la valeur du coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,057}{6,7} = 4,25.10^{-3}$

c- Sachant que : $\xi = 4.f_v$ et que : $f_v = 6.\pi.r.\eta$ on en déduit la viscosité :

$$\eta = \frac{\xi}{24.\pi.r} = \frac{1,06.10^{-3}}{6.\pi.5.10^{-3}} = 0,011 \text{ Pa.s}$$

d- Au fur et à mesure de la coagulation du sang le coefficient de frottement f_v augmente.

Donc le rapport $\frac{A_0}{A_{\omega_0}}$ augmentant l'amplitude A_{ω_0} de l'angle θ va diminuer.

Question 13

Par la relation de Varignon appliquée au torseur dynamique on a :

$$\vec{\delta}_G(\text{bille}/0). \vec{y}_1 = \vec{\delta}_I(\text{bille}/0). \vec{y}_1 + \vec{GI} \wedge m. \vec{\alpha}_{G \in \text{bille}/0}. \vec{y}_1$$

Or : $\vec{\delta}_I(\text{bille}/0). \vec{y}_1 = \frac{7}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta}$ $\vec{GI} = r. \vec{z}_1$ $\vec{\alpha}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta}.(R - r). \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2.(R - r). \vec{z}_1$

Donc : $\vec{\delta}_G(\text{bille}/0). \vec{y}_1 = \frac{7}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta} + r. \vec{z}_1 \wedge m. (\ddot{\theta}.(R - r). \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2.(R - r). \vec{z}_1). \vec{y}_1$

Soit : $\vec{\delta}_G(\text{bille};0). \vec{y}_1 = \frac{7}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta} + m.r.(R - r).\ddot{\theta} = \left(\frac{7}{5} - 1\right).m.r.(r - R).\ddot{\theta}$

Soit finalement : $\vec{\delta}_G(\text{bille};0). \vec{y}_1 = \frac{2}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta}$

Question 14

Les actions extérieures s'appliquant sur la bille sont :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m.g. \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v.v. \vec{x}_1$
- ☞ Action du rail sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1. \vec{x}_1 - N_1. \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $F(t). \vec{x}_0$

Le théorème du moment dynamique en G en projection sur l'axe \vec{y}_1 qui donne :

$$\delta_G(\text{bille}/0). \vec{y}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \vec{GI} \wedge (T_1. \vec{x}_1 - N_1. \vec{z}_1). \vec{y}_1 + \mathbf{0} = r. \vec{z}_1 \wedge (T_1. \vec{x}_1 - N_1. \vec{z}_1). \vec{y}_1 = r.T_1$$

Donc : $\frac{2}{5}.m.r.(r - R).\ddot{\theta} = r.T_1$ Soit : **$T_1 = a_1.\ddot{\theta}$** avec : **$a_1 = \frac{2}{5}.m.(r - R)$**

Question 15

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe \vec{z}_1 donne également :

$$m. \vec{\alpha}_{G \in \text{bille}/0}. \vec{z}_1 = m.g. \vec{z}_0. \vec{z}_1 - f_v.v. \vec{x}_1. \vec{z}_1 + T_1. \vec{x}_1. \vec{z}_1 - N_1. \vec{z}_1. \vec{z}_1 + F(t). \vec{x}_0. \vec{z}_1$$

$$m.(\ddot{\theta}.(R - r). \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2.(R - r). \vec{z}_1). \vec{z}_1 = m.g. \vec{z}_0. \vec{z}_1 - N_1. \vec{z}_1. \vec{z}_1 + F(t). \vec{x}_0. \vec{z}_1$$

Ayant : $\vec{z}_0. \vec{z}_1 = \cos \theta$ et : $\vec{x}_0. \vec{z}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

On obtient donc : **$N_1 = F(t).\sin \theta + b_1.\cos \theta + c_1.\dot{\theta}^2$** Avec : **$b_1 = m.g$
 $c_1 = m.(R - r)$**

Question 16

Les relations de récurrence de l'approximation d'Euler sont :

$$\theta_{i+1} = \theta_i + h.\dot{\theta}_i \quad \text{et} : \quad \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + h.\ddot{\theta}_i \quad \text{Or} : \quad Y_i = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} : \quad F(t_i, Y_i) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix}$$

Donc la relation de récurrence liant Y_{i+1} à Y_i est : **$Y_{i+1} = Y_i + h.F(t_i, Y_i)$**

Question 17

def fi (ti, Yi) :

```
theta, thetap = Yi[0], Yi[1]
thetapp = (F0*sin(wbob*ti) * cos(theta) - fv*b0*thetap - c0*sin(theta)) / a0
return [thetap, thetapp]
```

Question 18

def Euler (Yini, h, Tmaxi, F) :

```
n=int(Tmaxi/h)
RY=[[0, Yini[0], Yini[1]]]
for i in range(0, n):
    ti, thetai, thetapi=RY[i][0], RY[i][1], RY[i][2]
    vecteur=F(ti, [thetapi, thetapi])
    RY.append([ti+h, thetai+h*vecteur[0], thetapi+h*vecteur[1]])
return RY
```

Question 19

```
def VerifRSG(SY, f) :
    for element in SY:
        ti, theta, thetap=element [0], element [1], element [2]
        thetapp=fi (ti, [theta, thetap]) [1]
        T1, N1=a1*thetapp, F0*sin(wbob*ti) *sin(theta) +b1*cos(theta) +c1*tetap**2
        coef=abs (T1/N1)
        if coef>f:
            return False
    return True
```

Question 20

La figure 14-b montre une amplitude qui reste inférieure à $10^\circ = 0,17 \text{ rad}$ (angle θ faible). **L'hypothèse de linéarisation est donc vérifiée.**

La figure 15 montre un rapport T_1/N_1 inférieur au coefficient de frottement de 0,1 entre la bille et le rail. **L'hypothèse du roulement sans glissement est donc vérifiée.**

5- Analyse de l'exigence "Prélever les produits par le déplacement suivant \vec{z} de la tête de pipetage"

Question 21

L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement est La somme des énergies cinétiques :

$$E_C(S/R_g) = E_C(\text{moteur}/R_g) + E_C(\text{réducteur}/R_g) + E_C(\text{masse}/R_g) = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Où v est la vitesse de translation de la masse en translation : $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$

$$\text{On en déduit : } E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot (J_m + J_r) \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2 \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot (J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \omega_m^2$$

D'où l'inertie équivalente des pièces en mouvement : $J_{eq} = J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$

Question 22

a- Les actions extérieures appliquées sur l'ensemble S des pièces en mouvement sont :

- ☞ Le couple moteur dont la puissance est : $P(\text{Couple moteur} \rightarrow S/R_g) = c_m \cdot \omega_m$
- ☞ Le poids des pièces en mouvement dont la puissance est : $P(\text{Pesanteur} \rightarrow S/R_g) = - m \cdot g \cdot v$
- ☞ L'action de l'opercule sur l'aiguille dont la puissance est : $P(\text{Opercule} \rightarrow S/R_g) = - F_r(t) \cdot v$
- ☞ Les actions dues aux liaisons avec le bâti dont les puissances sont nulles car les liaisons sont parfaites.

On obtient donc pour la somme des puissances de ces actions : $P_{Ext}(S/R_g) = c_m \cdot \omega_m - F_r(t) \cdot v - m \cdot g \cdot v$

avec : $v = k_r \cdot R_p \cdot \omega_m$ Soit : $\Sigma P_{Ext}(S/R_g) = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p) \cdot \omega_m$

L'ensemble des frottements sont modélisés par un couple résistant c_{res} ramené sur l'arbre moteur. Donc la somme des puissances des actions intérieures est : $P_{Int}(S/R_g) = c_{res} \cdot \omega_m$ avec : $c_{res} < 0$

L'application du théorème de l'énergie puissance : $\frac{d E_C(S/R_g)}{dt} = \Sigma P(Ext \rightarrow S/R_g) + \Sigma P(Int \rightarrow S/R_g)$

donne donc : $(J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m = (c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p) \cdot \omega_m + c_{res} \cdot \omega_m$

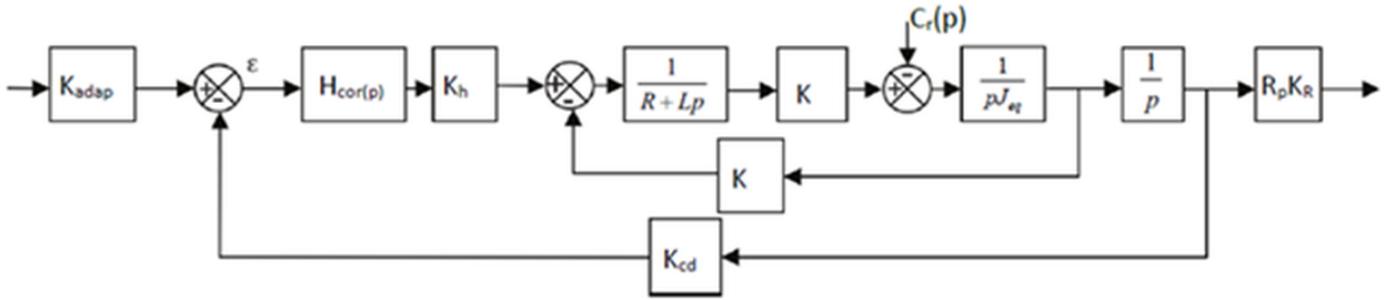
Soit en simplifiant par ω_m : $(J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2) \cdot \dot{\omega}_m = c_m - F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p - m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p + c_{res}$

b- Soit: $c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$ avec: $J_{eq} = J_m + J_r + m \cdot k_r^2 \cdot R_p^2$

c- et: $c_r(t) = F_r(t) \cdot k_r \cdot R_p + m \cdot g \cdot k_r \cdot R_p - c_{res}$

Question 23

A partir de la transformée de Laplace des différentes équations (4), (5), (6) et (7) de fonctionnement du système et de celles de la transmission : $\omega_m(t) = \frac{d \theta_m(t)}{dt}$ et: $z(t) = k_r.R_p.\theta_m(t)$ on obtient :



Question 24

Pour avoir un écart $\varepsilon(t)$ proportionnel à l'erreur $z_c(t) - z(t)$ il faut un gain :

$$K_{adap} = \frac{k_{cod}}{R_p.k_r}$$

Question 25

La réduction de la boucle du moteur du schéma bloc ci-dessus donne :

$$\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{K}{(R + L.p).J_{eq}.p}}{1 + \frac{K^2}{(R + L.p).J_{eq}.p}} \quad \text{soit:} \quad \left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R.J_{eq}.p}{K^2} + \frac{L.J_{eq}.p^2}{K^2}}$$

On a : $\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \left(\frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} \cdot \left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0}$ avec suivant le schéma bloc : $\left(\frac{I(p)}{\Omega_m(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{J_{eq}.p}{K}$

On en déduit :

$$\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq}.p}{K^2}}{1 + \frac{R.J_{eq}.p}{K^2} + \frac{L.J_{eq}.p^2}{K^2}}$$

Question 26

a- Sur le document réponse, la courbe donnant l'évolution de la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ lorsque le système est soumis à un échelon de tension $u(t) = u_0$ présente une pente de tangente non nulle à l'origine. On a donc la réponse d'un système du 1er ordre. **On peut donc négliger le terme du second ordre soit l'inductance du moteur devant les autres grandeurs physiques.**

On a alors : $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R.J_{eq}.p}{K^2}}$ et : $\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{J_{eq}.p}{K^2}}{1 + \frac{R.J_{eq}.p}{K^2}}$

b- A la date $t = 0$ la vitesse de rotation est nulle : $\omega_m(0) = 0$. Donc de l'équation (6) on a : $e(0) = 0$.

L'inductance L étant négligée on obtient de l'équation (5) : $u(0) = R.i(0)$ Soit : $i_0 = \frac{u_0}{R}$ (a)

Pour $t \rightarrow \infty$ la vitesse de rotation est constante : $\dot{\omega}_m(\infty) = 0$. Donc de l'équation (4) : $c_r(\infty) = c_m(\infty)$.

On en déduit de l'équation (7) que : $c_r(\infty) = K.i(\infty)$ Soit : $i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$ (b)

L'inductance L étant négligée on obtient des équations (5) et (6) : $u(\infty) = R.i(\infty) + K.\omega_m(\infty)$

Sachant que : $i(\infty) = i_\infty = \frac{c_{r0}}{K}$ et : $u(\infty) = u_0$ on obtient : $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R.c_{r0}}{K^2}$ (c)

c- Des graphiques du document réponse on a : $\omega_\infty = 575 \text{ rad/s}$ $i_0 = 0,42 \text{ A}$ $i_\infty = 0,075 \text{ A}$

On obtient donc : ☞ De l'équation (a) : $R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{24}{0,42} = 57,1 \Omega$

☞ Des équations (b) et (c) : $\omega_\infty = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K} = \frac{u_0}{K} - \frac{R \cdot i_\infty}{K}$

Soit : $K = \frac{u_0 - R \cdot i_\infty}{\omega_\infty} = \frac{24 - 57,1 \times 0,075}{575} = 0,0343 \text{ V.s.rad}^{-1} \text{ ou N.m.A}^{-1}$

d- De l'équation (b) on obtient : $c_{r0} = K \cdot i_\infty = 0,0343 \times 0,075 = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$

D'autre part on sait que (voir question 28a) : $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2} \cdot p}$ donc cette fonction de

transfert est un premier ordre de constante de temps : $\tau = \frac{R \cdot J_{eq}}{K^2}$. Constante de temps τ qui peut être lue sur le graphique $\omega_m(t)$ à la date où $\omega_m(t) = 0,63 \times \omega_\infty = 3,62 \text{ rad.s}^{-1}$. Soit : $\tau = 0,03 \text{ s}$.

On a donc : $J_{eq} = \frac{\tau \cdot K^2}{R} = \frac{0,03 \times 0,0343^2}{57,1} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

Question 27

Du schéma bloc à retour unitaire de la page 14/19 de l'énoncé on obtient :

Pour la boucle ouverte $H_{bo}(p) = \frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}$

Pour la boucle fermée : $H_{cr}(p) = \frac{\frac{-K_2 \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_1 \cdot K_p}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{-\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1} \cdot p^2}$

Et : $H_{cons}(p) = \frac{\frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_p \cdot K_1}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_p \cdot K_1} \cdot p + \frac{T_m}{K_p \cdot K_1} \cdot p^2}$

Question 28

L'erreur statique est : $(\epsilon_S)_{c_{r0}=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_c(t) - z(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (Z_c(p) - Z(p))$ avec : $Z_c(p) = \frac{Z_{c0}}{p}$

Or pour une perturbation nulle : $Z(p) = H_{cons}(p) \cdot Z_c(p)$. Donc : $(\epsilon_S)_{c_{r0}=0} = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{c0} \cdot (1 - H_{cons}(p))$

Or de l'expression précédente on a : $\lim_{p \rightarrow 0} H_{cons}(p) = 1$ Donc : $(\epsilon_S)_{c_{r0}=0} = 0$

D'autre part pour une consigne nulle : $Z(p) = H_{cr}(p) \cdot C_r(p)$ avec : $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$

Donc : $(\epsilon_S)_{z_c=0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (0 - H_{cr}(p) \cdot C_r(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} -C_{r0} \cdot H_{cr}(p)$

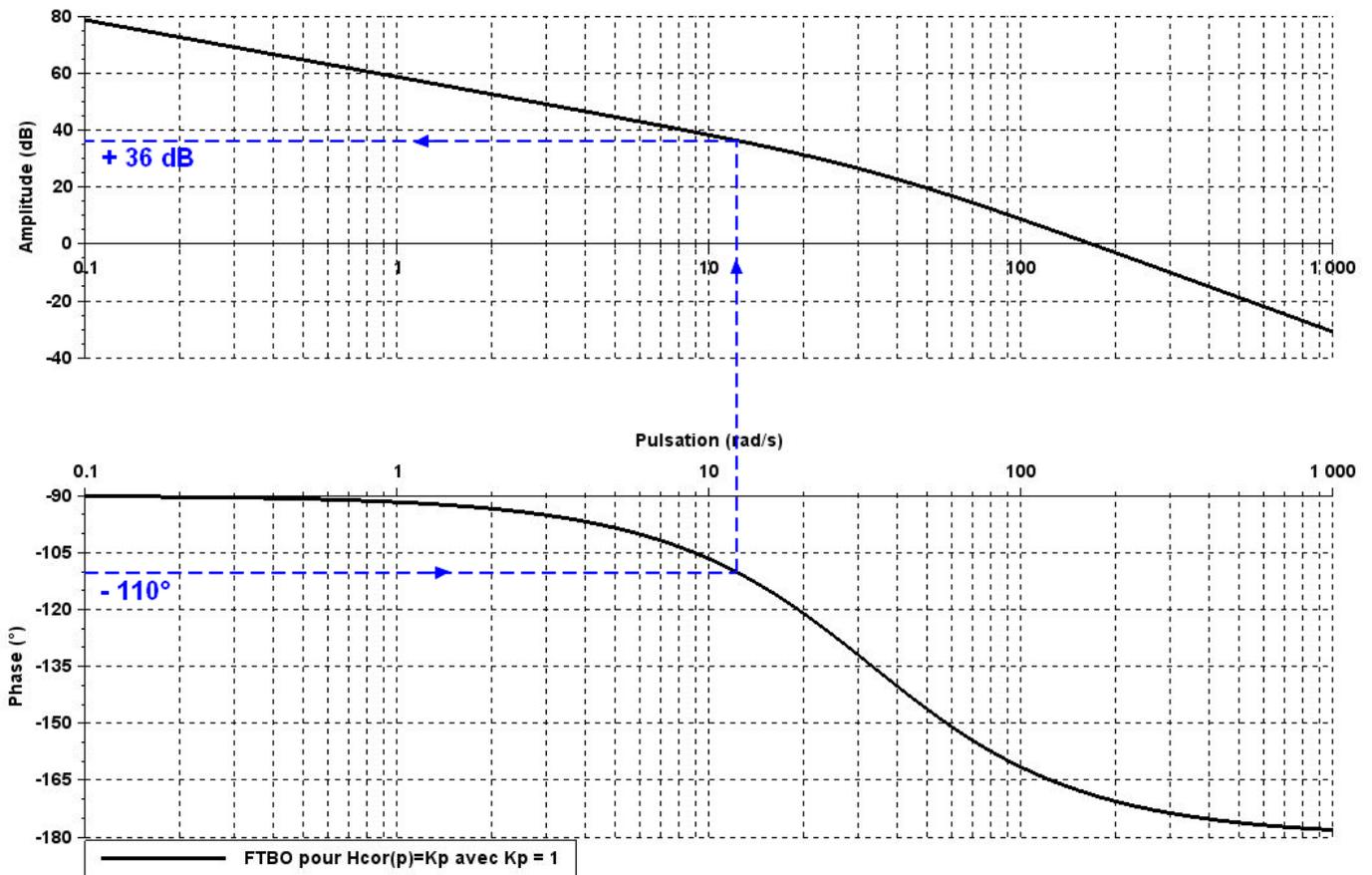
Or de l'expression précédente on a : $\lim_{p \rightarrow 0} H_{cr}(p) = -\frac{K_2}{K_p}$ Donc : $(\epsilon_S)_{z_c=0} = \frac{K_2 \cdot C_{r0}}{K_p}$

L'erreur statique totale est donc de : $\epsilon_S = \frac{K_2 \cdot C_{r0}}{K_p}$. Le cahier des charges imposant une erreur statique maximale ϵ_{Smax} inférieure à 1 mm, pour vérifier le cahier des charges il faut un gain du correcteur K_p :

$K_p > \frac{K_2 \cdot C_{r0}}{\epsilon_{Smax}} = \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \times 2,7 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}}$ Soit : $K_p > 0,075$

Question 29

Le document réponse nous montre qu'avec un gain $K_p = 1$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° est de $+36$ dB. Voir tracé ci-dessous :



Or avec le gain $K_p = 0,075$ déterminé ci-dessus la courbe de gain sera translaté verticalement de $20 \cdot \log 0,075 = -22,5$ dB. Quant à la courbe de phase elle ne sera pas modifiée.

Par conséquent, pour un gain $K_p = 0,075$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° sera de : $36 - 22,5 = +13,5$ dB < 0 .

Donc avec un gain $K_p = 0,075$, le critère de stabilité (Marge de phase $< 70^\circ$) ne sera pas vérifié.

Question 30

Ce correcteur permet, par son intégrateur, placé en amont de la perturbation, d'annuler l'erreur due à la perturbation.

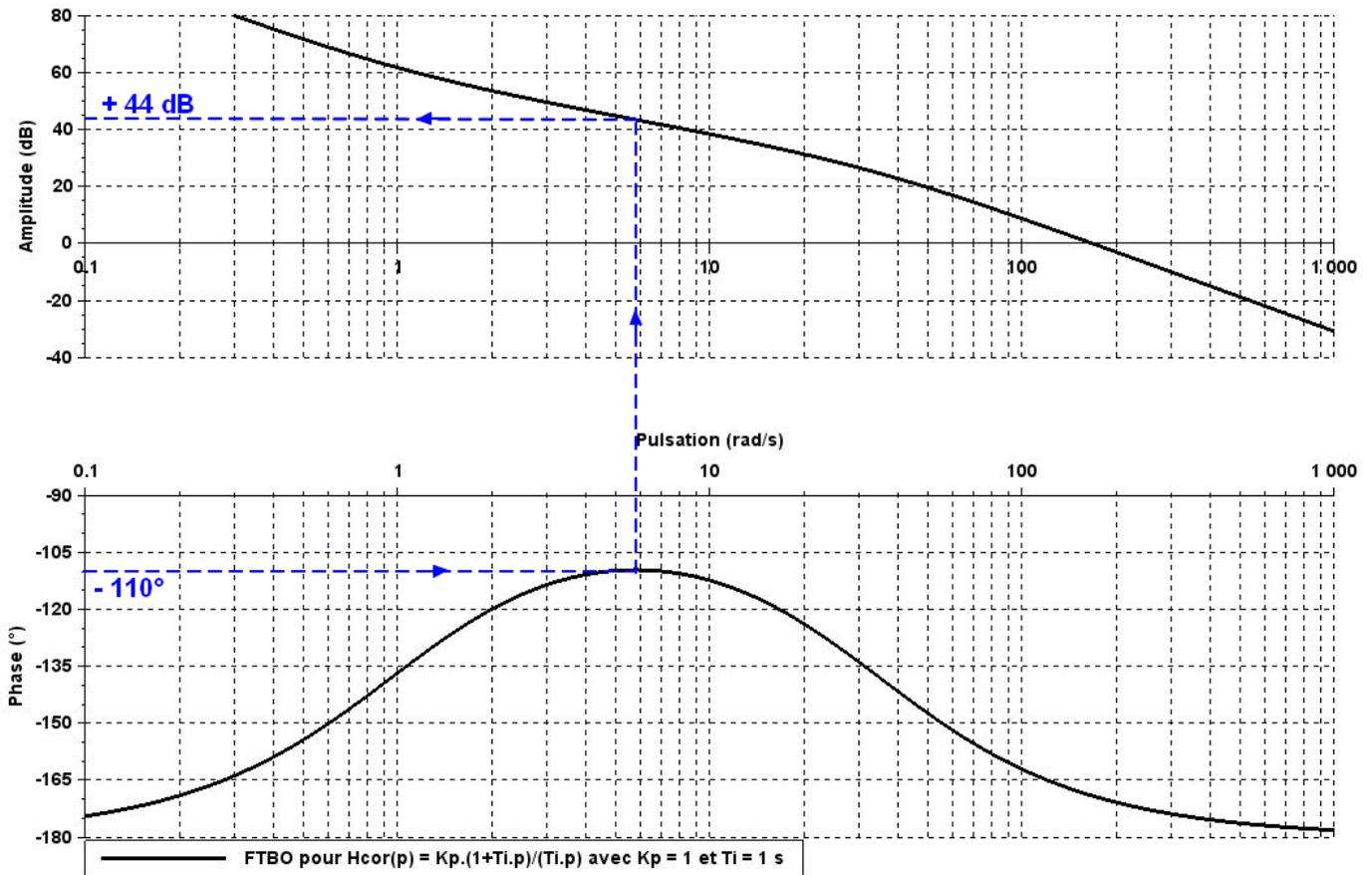
En conservant sa stabilité grâce au rang 1 (terme en $1 + T_i \cdot p$).

Remarque :

Seul les 5/2 pouvaient répondre directement à cette partie de la question.

Question 31

Le document réponse nous montre qu'avec un gain $K_p = 1$ le gain dynamique de $H_{BO}(p)$ lorsque sa phase est de -110° est de $+44$ dB.



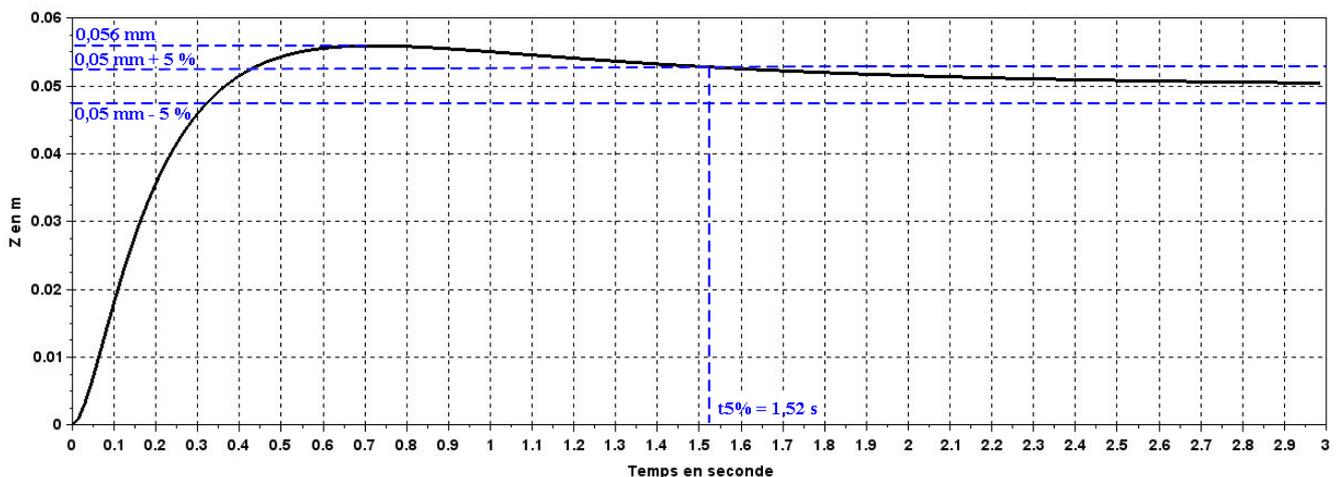
Donc pour vérifier le critère de stabilité, il faut translater la courbe de gain dynamique de $H_{BO}(p)$ de -44 dB sans modifier la courbe de phase.

On choisit donc un gain de :

$$K_p = 10^{(-44/20)} = 0,0063$$

Question 32

Sur la figure 16 on peut lire



- ☞ La valeur en régime permanent vaut 50 mm, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté.
- ☞ Le temps de réponse à 5% est d'environ 1,5 s inférieur à 2 s le critère de rapidité est respecté.
- ☞ Le premier dépassement est d'environ 0,006 m soit en pourcentage $\frac{0,006}{0,05} = 12\%$ inférieur à 15%. Le critère d'amortissement est donc vérifié.

Question 33

L'erreur due à la période d'échantillonnage correspond à la distance parcourue par l'aiguille durant cette durée $T_e = 10$ ms. En supposant que le moteur tourne à la vitesse de $N_{\text{maxi}} = 4\,150$ tr/min, cette distance parcourue par l'aiguille est de :

$$\Delta Z_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{maxi}}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = \frac{2 \cdot \pi \times 4\,150}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 2,26 \text{ mm}$$

L'erreur due à la conversion analogique numérique correspond à la distance parcourue par l'aiguille pour une impulsion du codeur incrémental. Cette distance parcourue par l'aiguille est :

$$\Delta Z_{\text{AN}} = \frac{2 \cdot \pi}{2\,000} \cdot k_r \cdot R_p = \frac{2 \cdot \pi \times 10}{2\,000 \times 19,2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

On en déduit l'erreur maximale de position : $\Delta Z_{\text{mes}} = \Delta Z_e + \Delta Z_{\text{AN}} = 2,26 \text{ mm}$

Remarque : l'erreur est principalement due à la période d'échantillonnage. L'erreur due à la conversion analogique numérique est négligeable.

Cette erreur de 2,26 mm n'est pas compatible avec l'exigence Id.2.3.1 du cahier des charges qui impose une précision de positionnement de l'aiguille inférieure à 1 mm

Question 34

La nouvelle procédure permet (après une première entrée de l'aiguille dans le liquide puis une sortie) une nouvelle entrée dans le liquide mais à une vitesse plus faible. Car la vitesse du moteur à la deuxième entrée dans le liquide est plus lente : $N_{\text{lent}} < N_{\text{max}}$. Donc l'erreur due à la conversion analogique n'est pas modifiée mais celle due à la période d'échantillonnage est diminuée.

On en déduit de la même manière la nouvelle erreur maximale de position :

$$\Delta Z'_{\text{mes}} = \Delta Z'_e + \Delta Z_{\text{AN}} = \Delta Z_{\text{AN}} + \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{lent}}}{60} \cdot k_r \cdot R_p \cdot T_e = 1,6 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot \pi \times 1\,500}{60} \cdot \frac{10}{19,2} \cdot 0,01 = 0,803 \text{ mm}$$

Cette erreur de 0,803 mm est compatible avec l'exigence Id.2.3.1 du cahier des charges qui impose une précision de positionnement de l'aiguille inférieure à 1 mm

Le flacon dans lequel est prélevé le liquide étant un cylindre de diamètre $D_f = 15$ mm, on en déduit l'erreur de volume correspondant :

$$\Delta V = \Delta Z'_{\text{mes}} \cdot \frac{\pi \cdot D_f^2}{4} = 0,803 \cdot \frac{\pi \times 15^2}{4} = 142 \text{ mm}^3 = 0,142 \text{ ml}$$