

TD2 : Commande de soupape à linguet : Corrigé

1- Détermination de l'expression du couple moteur

On néglige l'inertie du galet 5 donc l'énergie cinétique du système Σ_0 est :

$$E_C(\Sigma_0/0) = E_C(2/0) + E_C(6/0) + E_C(7/0)$$

Les solides 2 et 6 étant en rotation autour d'un axe fixe et 7 en translation par rapport à 0, on a :

$$E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2} J_{A2} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} J_{B6} \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_7 \cdot \dot{y}^2 \quad \text{Avec :} \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{y}}{\ell} \quad \text{On en déduit :}$$

$$E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2} J_{A2} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \dot{y}^2$$

Le système Σ_0 est constitué que de solides en liaisons parfaites entre eux et avec le bâti.

☞ Donc la somme des puissances des actions intérieures est nulle : $\sum P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_0/0) = 0$

☞ Et la somme des actions de liaisons avec le bâti est nulle : $\sum P(0 \rightarrow \Sigma_0/0) = 0$

Reste donc les puissances du couple moteur \vec{C}_m et de l'action du ressort :

☞ $P(\vec{C}_m \rightarrow 2/0) = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = C_m \cdot \omega$ et :

☞ $P(8 \rightarrow 7/0) = \vec{F}_{8 \rightarrow 7} \cdot \vec{V}_{D \in 7/0} = (F_0 - k \cdot y) \cdot \vec{y}_0 \cdot \dot{y} \cdot \vec{y}_0 = (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y}$

On a donc : $\sum P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_0/0) + \sum P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma_0/0) = C_m \cdot \omega + (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y}$

Ayant $\omega = c^{te}$ l'application du TEC $\left(\sum P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_0/0) + \sum P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma_0/0) = \frac{d E_C(\Sigma_0/0)}{dt} \right)$ donne donc :

$$C_m \cdot \omega + (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y} = \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \dot{y} \cdot \ddot{y} \quad \text{On en déduit :}$$

$$C_m = \frac{\dot{y}}{\omega} \cdot \left[-F_0 + k \cdot y + \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \ddot{y} \right]$$

1.2- Détermination du couple moteur maximal

Ce couple est maximal pour $\omega = \omega_{max}$ et à la fin de la première phase, à la date t_1^- . Date t_1^- à laquelle

on a : $y = -\frac{\Delta y}{4} \quad \dot{y} = -\frac{6 \cdot \Delta y \cdot \omega}{\pi} \quad \text{et :} \quad \ddot{y} = -\frac{72 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \quad \text{On en déduit :}$

$$C_m = \frac{6 \cdot \Delta y}{\pi} \cdot \left[F_0 + \frac{k \cdot \Delta y}{4} + \frac{72 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \cdot \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \right]$$

2.1- Détermination de l'effort de contact en D

La soupape 7 est en mouvement de translation par rapport au bâti 0, d'où son énergie cinétique :

$$E_C(7/0) = \frac{1}{2} m_7 \cdot \dot{y}^2$$

Elle est en liaison parfaite avec le bâti donc $P(0 \rightarrow 7/0) = 0$

Le ressort 8 exerce une action modélisée par une force de résultante $\vec{F}_{8 \rightarrow 7} = (F_0 - k \cdot y) \cdot \vec{y}_0$ qui fournit donc une puissance : $P(8 \rightarrow 7/0) = \vec{F}_{8 \rightarrow 7} \cdot \vec{V}_{D \in 7/0} = (F_0 - k \cdot y) \cdot \vec{y}_0 \cdot \dot{y} \cdot \vec{y}_0 = (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y}$

Le linguet 6 exerce une action modélisée par une force de résultante $\vec{F}_{6 \rightarrow 7} = -F_D \cdot \vec{y}_0$ qui fournit donc une puissance : $P(6 \rightarrow 7/0) = \vec{F}_{6 \rightarrow 7} \cdot \vec{V}_{D \in 7/0} = -F_D \cdot \vec{y}_0 \cdot \dot{y} \cdot \vec{y}_0 = -F_D \cdot \dot{y}$

Cette soupape étant un solide : $\sum P(\text{Int} \rightarrow 7/0) = 0$

L'application du TEC $\left(\sum P(\text{Int} \rightarrow 7/0) + \sum P(\text{Ext} \rightarrow 7/0) = \frac{d E_C(7/0)}{dt} \right)$ à cette soupape donne donc :

$$m_7 \cdot \dot{y} \cdot \ddot{y} = (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y} - F_D \cdot \dot{y} \quad \text{On en déduit :} \quad \mathbf{F_D = F_0 - k \cdot y - m_7 \cdot \ddot{y}}$$

2.2- Détermination de la vitesse du point H appartenant au galet 5 par rapport à 0

On a un roulement sans glissement au point H entre 2 et 5. Donc : $\vec{V}_{H \in 5/2} = \vec{0}$

Or de la loi de composition des vitesses on a : $\vec{V}_{H \in 5/0} = \vec{V}_{H \in 5/2} + \vec{V}_{H \in 2/0}$ D'où : $\vec{V}_{H \in 5/0} = \vec{V}_{H \in 2/0}$

D'autre part le mouvement de 2 par rapport à 0 est une rotation d'axe (A, \vec{x}_0) donc $\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{0}$.

Donc : $\vec{V}_{H \in 5/0} = \vec{V}_{H \in 2/0} = \vec{0} + \vec{HA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = r_H \cdot \vec{v} \wedge \omega \cdot \vec{x}_0$ Soit : $\vec{V}_{H \in 5/0} = r_H \cdot \omega \cdot \vec{u}$

2.3- Détermination de l'effort de contact en H

On néglige l'inertie du galet 5 donc l'énergie cinétique du système $\Sigma_0 = \{5,6,7\}$ est :

$$E_C(\Sigma_0/0) = E_C(6/0) + E_C(7/0)$$

Le solide 6 étant en rotation autour d'un axe fixe et 7 en translation par rapport à 0, on a :

$$E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2} J_{B6} \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_7 \cdot \dot{y}^2 \quad \text{Avec : } \dot{\theta} = -\frac{\dot{y}}{\ell} \quad \text{On en déduit : } E_C(\Sigma_0/0) = \frac{1}{2} \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \dot{y}^2$$

Le système Σ_1 est constitué que de solides en liaisons parfaites entre eux et avec le bâti.

☞ Donc la somme des puissances des actions intérieures est nulle : $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_0/0) = 0$

☞ Et la somme des actions de liaisons avec le bâti est nulle : $\Sigma P(0 \rightarrow \Sigma_0/0) = 0$

Reste donc les puissances de l'action du ressort 8 sur 7 et de celle de la came 2 sur 5 :

$$\text{☞ } P(8 \rightarrow 7/0) = \vec{F}_{8 \rightarrow 7} \cdot \vec{V}_{D \in 7/0} = (F_0 - k \cdot y) \cdot \vec{y}_0 \cdot \dot{y} \cdot \vec{y}_0 = (F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y}$$

☞ L'action de 2 sur 5 est une force appliquée en H et de résultante : $\vec{F}_{2 \rightarrow 5} = -F_H \cdot \vec{n}$ car on a une liaison ponctuelle de normale (H, \vec{n}). D'où la puissance fournie par cette action :

$$P(2 \rightarrow 5/0) = \vec{F}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{V}_{H \in 5/0} = -F_H \cdot \vec{n} \cdot r_H \cdot \omega \cdot \vec{u} = -F_H \cdot r_H \cdot \omega \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}$$

L'application du TEC $\left(\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_1/0) + \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma_1/0) = \frac{d E_C(\Sigma_1/0)}{dt} \right)$ donne donc :

$$(F_0 - k \cdot y) \cdot \dot{y} - F_H \cdot r_H \cdot \omega \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} = \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \dot{y} \cdot \ddot{y} \quad \text{On en déduit :}$$

$$F_H = \frac{\dot{y}}{r_H \cdot \omega \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}} \cdot \left[F_0 - k \cdot y - \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \cdot \ddot{y} \right]$$

2.4- Détermination des efforts de contact en D et H à la date t_1^+

A la date t_1^+ on a : $y = -\frac{\Delta y}{4}$ $\dot{y} = -\frac{6 \cdot \Delta y \cdot \omega}{\pi}$ et : $\ddot{y} = \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2}$ On en déduit :

$$F_D(t_1^+) = F_0 + \frac{k \cdot \Delta y}{4} - \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \cdot m_7$$

$$F_H(t_1^+) = -\frac{6 \cdot \Delta y}{\pi \cdot r_H \cdot \omega \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}} \left[F_0 + \frac{k \cdot \Delta y}{4} - \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \cdot \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) \right]$$

2.5- Détermination de la précontrainte du ressort : F_0

Pour qu'il n'y ait pas de phénomène d'affolement de soupape (Que les contacts en D et H soient maintenus il faut que $F_D(t_1^+) \geq 0$ et $F_H(t_1^+) \geq 0$. Or d'après les expressions précédentes :

$$\text{☞ } F_D(t_1^+) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_0 \geq \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \cdot m_7 - \frac{k \cdot \Delta y}{4}$$

$$\text{☞ Et ayant : } \vec{u} \cdot \vec{n} < 0 : \quad F_H(t_1^+) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_0 \geq \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega^2}{\pi^2} \cdot \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) - \frac{k \cdot \Delta y}{4}$$

Donc pour ne pas avoir d'affolement à $\omega = \omega_{\max}$ il faut :

$$F_0 \geq \frac{24 \cdot \Delta y \cdot \omega_{\max}^2}{\pi^2} \cdot \left(m_7 + \frac{J_{B6}}{\ell^2} \right) - \frac{k \cdot \Delta y}{4}$$