

Réponses temporelle des S.L.C.I. (Système Linéaire Continu Invariant)

1 – Les Systèmes Linéaires Continus Invariants : SLCI

1.1- Définitions

Continuité : Un système est continu si les entrées et sorties ne sont pas discrètes.

Linéarité : Le comportement linéaire d'un système repose sur deux principes : Le principe de proportionnalité et celui de superposition :

Proportionnalité

Si on a le système linéaire tel que :

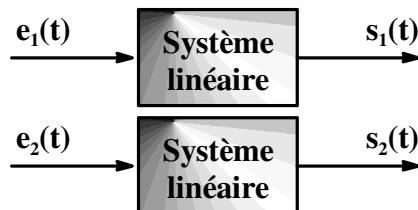


Alors $\forall$ le réel λ on a :



Superposition

Si on a le système linéaire tel que :



Alors :



Invariabilité

Si on a le système invariable tel que :



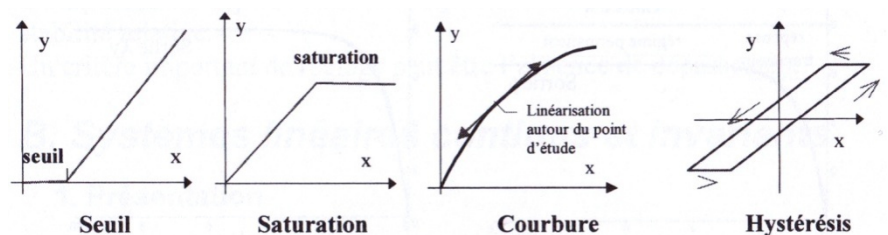
Alors $\forall$ le réel τ on a :



1.2- Limites des SLCI

Les systèmes réels sont souvent non linéaires. Cette non linéarité est due à quatre phénomènes :

L'effet de seuil notamment du aux frottements secs



L'effet de saturation est notamment du aux butées mécaniques du système ou à celles des interfaces de puissances : Saturation des amplificateurs opérationnels ou des hacheurs (MLI ou PWM)

La quasi-totalité des systèmes présentent des courbures plus ou moins prononcées. Cependant il est possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement sans trop éloigner le modèle de la réalité.

L'hystérésis caractérise un comportement différent suivant le sens de l'évolution de l'entrée.

1.3- Modélisation mathématique du fonctionnement des SLCI

Le fonctionnement des SLCI est décrit par une équation différentielle linéaire du type :

$$\sum_{j=0}^m a_j \cdot \frac{d^j e(t)}{dt^j} = \sum_{i=0}^n b_i \cdot \frac{d^i s(t)}{dt^i}$$

Où les a_j et b_i sont des constantes réelles

Principe de causalité :

Physiquement on a forcément : $n \geq m$

Remarque : Dans certain cas on peut utiliser des modèles ne respectant pas le principe de causalité.

Exemple : Le tachymètre dont la sortie $u(t)$ est proportionnel à dérivée de l'entrée : $\theta(t)$: $u(t) = K \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$

1.4- Les SLCI fondamentaux et leur fonction de transfert

Type	Equation différentielle du fonctionnement	
	Domaine temporel	Domaine de Laplace
Intégrateur	$K \cdot e(t) = \frac{d s(t)}{dt}$	$K \cdot E(p) = p \cdot S(p)$
Dérivateur	$K \cdot \frac{d e(t)}{dt} = s(t)$	$K \cdot p \cdot E(p) = S(p)$
1 ^{ier} ordre simple	$K \cdot e(t) = s(t) + \tau \cdot \frac{d s(t)}{dt}$	$K \cdot E(p) = S(p) \cdot [1 + \tau \cdot p]$
2 nd ordre simple	$K \cdot e(t) = s(t) + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \frac{d s(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$	$K \cdot E(p) = S(p) \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 \right]$
1 ^{ier} ordre généralisé	$K \cdot \left(e(t) + a \cdot \tau \cdot \frac{d e(t)}{dt} \right) = s(t) + \tau \cdot \frac{d s(t)}{dt}$	$K \cdot E(p) \cdot (1 + a \cdot \tau \cdot p) = S(p) (1 + \tau \cdot p)$

Pour tous les SLCI on définit leur fonction de transfert comme étant le quotient de la sortie sur l'entrée exprimées dans le domaine de Laplace : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ On obtient donc les fonctions de transfert :

Pour un intégrateur : $H(p) = \frac{K}{p}$ et un dérivateur : $H(p) = K \cdot p$ $\left(\frac{K \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } \tau \ll 1 \right)$

Pour un 1^{ier} ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ et un 2nd ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$

Pour un 1^{ier} ordre généralisé : $H(p) = \frac{K \cdot (1 + a \cdot \tau \cdot p)}{1 + \tau \cdot p}$ $\left(\text{ou } \frac{K \cdot (1 + \tau \cdot p)}{1 + b \cdot \tau \cdot p} \right)$

Pour ces 5 fonctions : $\Rightarrow$ **K est le gain statique**

Pour les 1^{ier} ordre : $\Rightarrow$ **τ est la constante de temps**

Pour le 1^{ier} ordre généralisé : $\Rightarrow$ **a est le facteur de constante de temps (parfois c)**

Pour le 2nd ordre : $\Rightarrow$ **ξ est le facteur d'amortissement (parfois z ou m)**

$\Rightarrow$ **ω_0 est la pulsation propre du système non amorti**

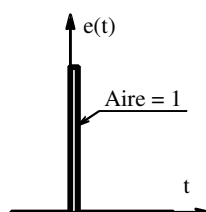
2- Les entrées canoniques

2.1- Impulsion de Dirac

Pour $t < 0$ ou $t > \varepsilon$: $e(t) = 0$

pour $t \in [0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$:

$e(t) > 0$ et $\int_0^\varepsilon e(t) \cdot dt = 1$



Domaine temporelle : $e(t) = \delta(t)$

Domaine de Laplace : $E(p) = 1$

Cette fonction notée est difficilement quantifiable. Elle n'est donc pas utilisée pour l'identification

Elle correspond par exemple à un coup de marteau sur un solide

2.2- Fonction d'Heaviside et Echelon

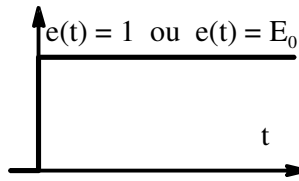
Pour $t < 0$: $e(t) = 0$

Heaviside :

pour $t > 0$: $e(t) = 1$

Echelon E_0 :

pour $t > 0$: $e(t) = E_0$



Domaine temporelle :

$$e(t) = v(t) \quad \text{ou} : \quad e(t) = E_0.v(t)$$

Domaine de Laplace :

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \text{ou} : \quad E(p) = \frac{E_0}{p}$$

2.3- Rampe de pente a

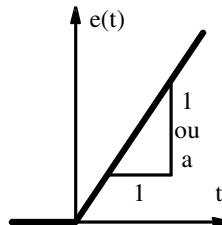
Pour $t < 0$: $e(t) = 0$

Rampe de pente 1 :

pour $t > 0$: $e(t) = t$

Rampe de pente a :

pour $t > 0$: $e(t) = a.t$



Domaine temporelle :

$$e(t) = t.v(t) \quad \text{ou} : \quad e(t) = a.t.v(t)$$

Domaine de Laplace :

$$E(p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{ou} : \quad E(p) = \frac{a}{p^2}$$

3- Réponses temporelle d'un premier ordre

3.1- Réponse à une impulsion de Dirac

$$E(p) = 1$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} = \frac{K/\tau}{p + 1/\tau}$$

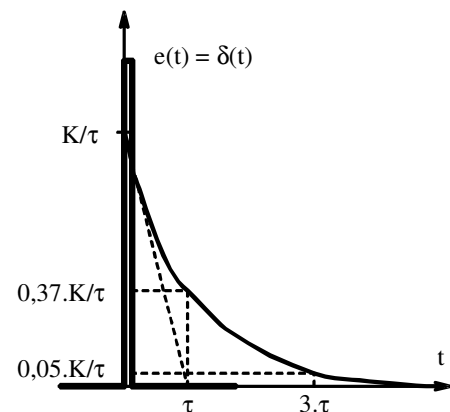
Pour la réponse temporelle, on a :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{et} : \quad s'(t) = -\frac{K}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

Donc pour un premier ordre on a la représentation graphique de $s(t)$ ci-contre, avec :

Sachant que : $e^{-1} \approx 0,37$ et que $e^{-3} \approx 0,05$

$$\Rightarrow s(\tau) \approx 0,37 \cdot \frac{K}{\tau} \quad \Rightarrow s(3.\tau) \approx 0,05 \cdot \frac{K}{\tau}$$



$$\Rightarrow \text{Pente à l'origine non nulle} : \quad s'(0) = -\frac{K}{\tau^2}$$

3.2- Réponse à un échelon E_0

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p.(1 + \tau.p)}$$

Pour la réponse temporelle (voir démonstrations), on a :

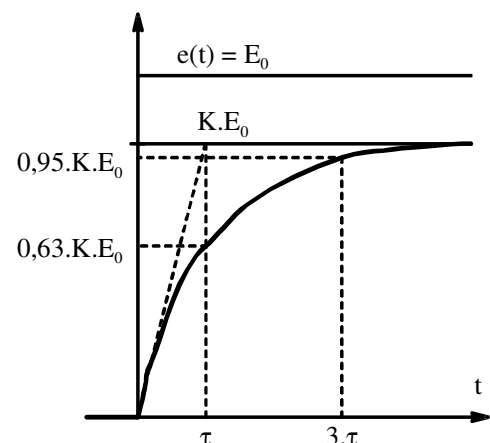
$$s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} : \quad s'(t) = \frac{K.E_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Donc pour un premier ordre on a la représentation graphique de $s(t)$ ci-contre, avec :

Sachant que : $e^{-1} \approx 0,37$ et que $e^{-3} \approx 0,05$

$$\Rightarrow s(\tau) \approx 0,63.K.E_0 \quad \Rightarrow s(3.\tau) \approx 0,95.K.E_0$$

$$\Rightarrow \text{Pente à l'origine non nulle} : \quad s'(0) = \frac{K.E_0}{\tau}$$



3.3- Réponse à une rampe de pente a

$$E(p) = \frac{a}{p^2} \quad S(p) = \frac{K.a}{p^2.(1 + \tau.p)}$$

Pour la réponse temporelle (voir démonstrations), on a :

$$s(t) = K.a.t - K.a.\tau.(1 - e^{-t/\tau})$$

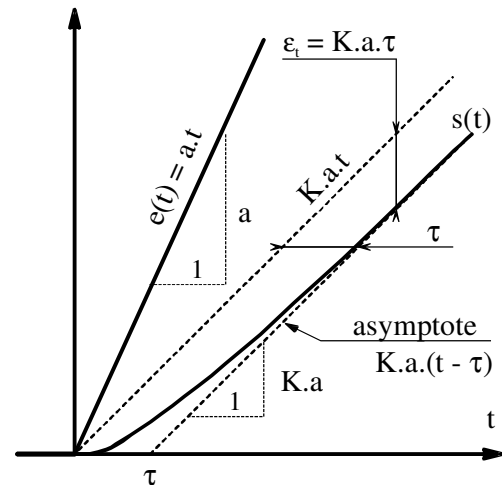
et : $s'(t) = K.a.(1 - e^{-t/\tau})$

Donc pour un premier ordre on a la représentation graphique de s(t) ci-contre, avec :

Une pente à l'origine nulle car : $s'(0) = 0$

Une asymptote à l'infini d'équation : $K.a.(t - \tau)$

L'asymptote à la réponse temporelle ($t \rightarrow +\infty$) coupe l'axe des abscisses à la date $t = \tau$.



Par rapport à la droite passant par l'origine et de pente K.a

☞ On a une erreur de trainage : $K.a.\tau$

☞ On a un retard τ

4- Réponses temporelle d'un second ordre

4.1- Réponse temporelle d'un second ordre à un échelon avec $\xi < 1$

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \quad S(p) = \frac{K.E_0}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 \right)}$$

Pour un second ordre avec $\xi < 1$ (Voir démonstrations) on obtient :

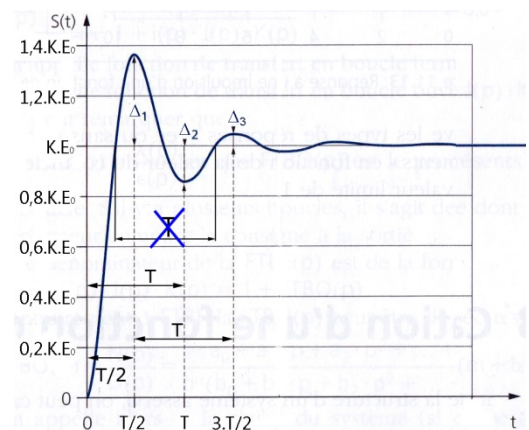
$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right] \quad \text{avec : } \cos \varphi = \xi \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

$$s'(t) = \frac{K.E_0.\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t)$$

D'où la représentation de la réponse s(t) ci-contre avec une infinité d'extrémums pour lesquels, le n^{ième} dépassement à la date t_n est tel que (Voir démonstrations) :

$$s'(t_n) = 0 \quad t_n = \frac{n\pi}{\omega} \quad D_n = \frac{|s(t_n) - S_\infty|}{S_\infty} = e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On a donc :



☞ Une pente à l'origine nulle : tangente à l'origine horizontale

☞ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où T est la pseudo période de la réponse avec : $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$

☞ $e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = D_n$ où D_n la valeur relative du n^{ième} dépassement : $D_n = \frac{\Delta_n}{S_\infty}$

4.2- Réponse temporelle d'un second ordre à un échelon avec $\xi > 1$

Pour un second ordre avec $\xi > 1$ (Voir démonstrations) on obtient :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] \right]$$

Dont on a la représentation graphique ci-contre :

Comme $\xi > 1$ la fonction de transfert peut s'écrire comme le produit de deux premiers ordre de constantes de temps T_1 et T_2 :

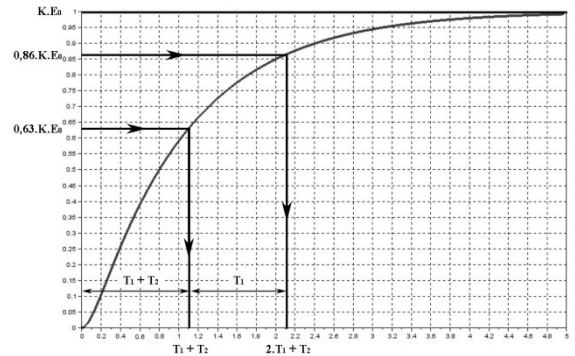
$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1.p)(1 + T_2.p)}$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1.T_2}}$ et : $\xi = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1.T_2}}$

On a alors (Voir démonstrations) :

$$s(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{\sqrt{T_1.T_2}}{T_1 - T_2} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \cdot e^{-t/T_1} - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot e^{-t/T_2} \right) \right] \quad \text{et :} \quad s'(t) = \frac{K.E_0}{T_1 - T_2} \left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right)$$

Donc si $T_1 \gg T_2$ alors : **$s(T_1 + T_2) \approx 0,63.K.E_0$ et $s(2.T_1 + T_2) \approx 0,86.K.E_0$**



5- Réponses temporelle d'un premier ordre généralisé

La fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K.(1 + c.\tau.p)}{1 + \tau.p}$

Ce type de fonction de transfert se retrouve pour deux types de correcteurs :

- ☞ Correcteur à retard de phase lorsque $c < 1$: Correcteur très peu utilisés
- ☞ Correcteur à avance de phase lorsque $c > 1$: **Correcteur très souvent utilisé**

5.1- Réponse temporelle d'un premier ordre généralisé à un échelon

Pour un échelon E_0 en entrée : $E(p) = \frac{E_0}{p}$ Donc : $S(p) = \frac{K.E_0}{p} \cdot \frac{1 + c.\tau.p}{1 + \tau.p}$

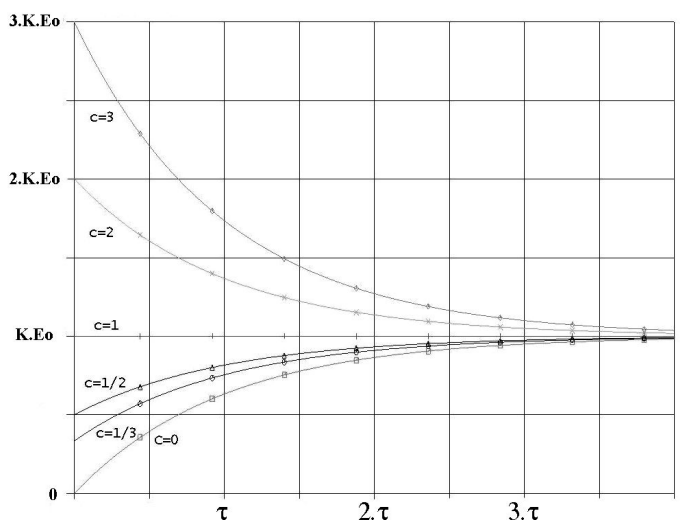
On obtient alors la réponse temporelle à un échelon en entrée (Voir démonstrations) :

$$s(t) = K.E_0 [1 - (1 - c).e^{-t/\tau}]$$

On en déduit les représentations graphiques de la réponse à un échelon d'entrée E_0 pour différentes valeurs de c .

Remarques

A l'origine il y a une discontinuité, avec au début un saut à la valeur : $K.E_0.c$. puis au fur et à mesure du temps une réponse qui tend vers $K.E_0$ lorsque t tend vers l'infini.



Donc pour le correcteur à avance de phase son comportement s'apparente à un correcteur proportionnel dont le gain est au départ serait important puis qui au fur et à mesure du temps aurait un gain qui diminue.

C'est un avantage certain pour gagner en rapidité sans perdre en stabilité.

6- Méthodologie expérimentale d'identification

6.1- Intérêt de ces études

Pour un système mal connu il est parfois difficile, à partir des lois physiques qui le régissent, de déterminer le modèle mathématique du système.

Cette difficulté peut être liée à des lois physiques le régissant trop complexes (non linéarité) ou à l'indétermination de certains paramètres du système (Inerties réelles, frottements, etc...)

6.2- Méthodologie

Pour identifier la fonction de transfert du système on le soumet à une entrée canonique $e(t)$ connue de type échelon ou rampe, pour analyser sa réponse $s(t)$ et identifier au mieux la relation entre l'entrée et la sortie du système.



Les caractéristiques de la réponse permettent alors d'identifier la fonction de transfert $H(p)$ propre au système qui fait le lien entre les fonctions symboliques d'entrée $E(p)$ et de sortie $S(p)$.

6.3- Principe et limite de l'identification à partir de la réponse indicielle

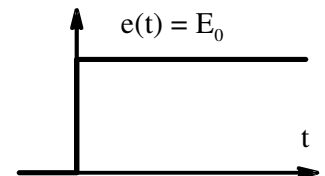
Principe

Pour ce type d'identification on applique en entrée $e(t)$ un échelon d'amplitude connue et on relève l'évolution au cours du temps de la sortie $s(t)$.

Limite

Les systèmes que l'on souhaite identifier seront des systèmes stables en réponse à un échelon. C'est à dire des systèmes dont la réponse converge vers une valeur finale pour une entrée en échelon.

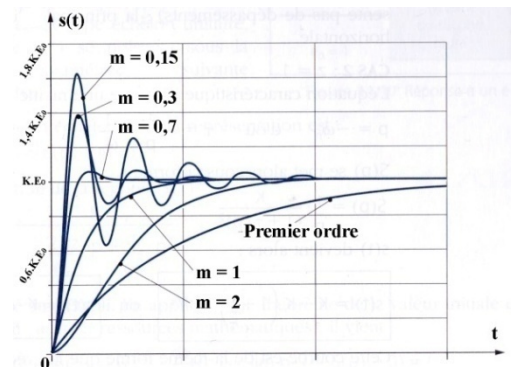
Ce type d'identification est utilisé pour identifier des systèmes dont le comportement est proche de celui d'un système du 1^{er} ou 2nd ordre.



6.4- Choix de l'ordre du modèle

Le choix de l'ordre du modèle, premier ou second ordre simple, peut facilement se faire en fonction de :

- ☞ La présence ou non d'un dépassement de la valeur finale de la réponse
- ☞ La pente de la tangente à l'origine de la réponse.



- ☞ Si il n'y a pas de dépassement et que la tangente à l'origine n'est pas horizontale alors la fonction de transfert est du premier ordre
- ☞ Si il y a un dépassement et que la tangente à l'origine est horizontale alors la fonction de transfert est du second ordre avec $\xi < 1$
- ☞ Si il n'y a pas de dépassement et que la tangente à l'origine est horizontale alors la fonction de transfert est du second ordre avec $\xi \geq 1$

Remarque : Dans ce dernier cas, (pas de dépassement et tangente à l'origine horizontale) il arrive que l'on fasse l'hypothèse d'un système du premier ordre ou qu'on identifie par une analyse fréquentielle.

6.5- Identification du gain de la fonction de transfert

Pour un premier ordre ou un deuxième ordre le gain K de la fonction de transfert se fait à partir de

S_∞ la valeur finale de la sortie : $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$

Or d'après le théorème de la valeur finale : $S_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E_0}{p} \cdot H(p) = K.E_0$

On peut donc déterminer le gain qui est tel que : $K = \frac{S_\infty}{E_0}$

6.6- Identification pour un premier ordre

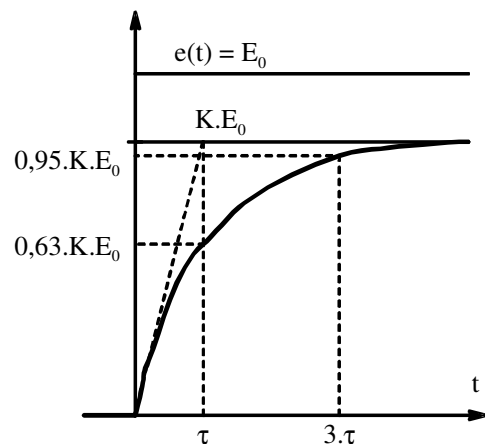
Il suffit après avoir déterminé le gain K de déterminer la constante de temps τ .

Pour un 1^{er} ordre (Démonstrations §1), on a :

$$s(t) = K.E_0.(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad s'(t) = \frac{K.E_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Donc pour un premier ordre on a la représentation graphique de $s(t)$ ci-contre, avec :

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(\tau) &\approx 0,63.K.E_0 & \Rightarrow s(3.\tau) &\approx 0,95.K.E_0 \\ \Rightarrow s'(0) &= \frac{K.E_0}{\tau} \end{aligned}$$



On a donc trois méthodes pour déterminer la constante de temps τ du système :

- ☞ La réponse coupe l'horizontale d'ordonnée $0,63.S_\infty$ à la date $t = \tau$
- ☞ La réponse coupe l'horizontale d'ordonnée $0,95.S_\infty$ à la date $t = 3.\tau = t_{5\%}$
- ☞ L'horizontale d'ordonnée S_∞ coupe la tangente à

Remarque :

Si le système n'est pas vraiment un premier ordre simple, ou que les précisions des mesures est insuffisante, ces trois méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour la constante de temps τ .

6.7- Identification d'un second ordre avec $\xi < 1$

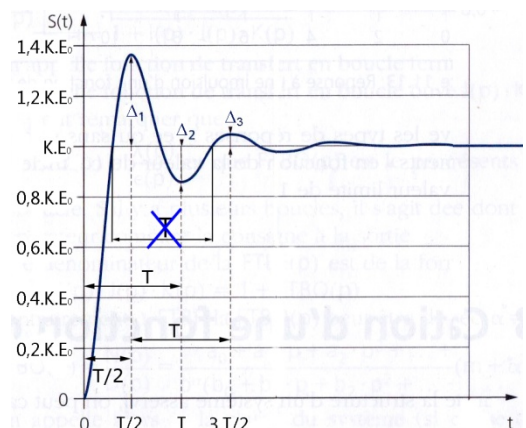
Il suffit après avoir déterminé le gain K ($K = \frac{S_\infty}{E_0}$) de déterminer le facteur d'amortissement ξ (ou z ou m) et la pulsation propre du système non amortie ω_0 .

D'où la représentation de la réponse $s(t)$ ci-contre avec une infinité de maximums pour lesquels, le $n^{\text{ème}}$ dépassement à la date t_n est tel que :

Le dépassement relatif au $n^{\text{ème}}$ dépassement (En général le premier) permet d'identifier la facteur d'amortissement ξ .

La pseudo période permet d'identifier la pulsation propre du système amorti ω .

Et enfin connaissant ξ et ω on en déduit ω_0 .



Méthode de détermination analytique des caractéristiques ξ , ω et ω_0 du système :

➡ On mesure la valeur du $n^{\text{ième}}$ dépassement (souvent le 1^{er}) pour déduire

la valeur relative du $n^{\text{ième}}$ dépassement : $D_n = \frac{\Delta_n}{S_\infty} = e^{\frac{-n \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$ puis on

obtient le facteur d'amortissement avec : $\xi = \sqrt{\frac{(\ln D_n)^2}{n^2 \cdot \pi^2 + (\ln D_n)^2}}$

➡ On mesure la pseudo période T ou la demi pseudo période $\frac{T}{2}$ pour

déduire la pulsation propre du système amorti : $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ puis on

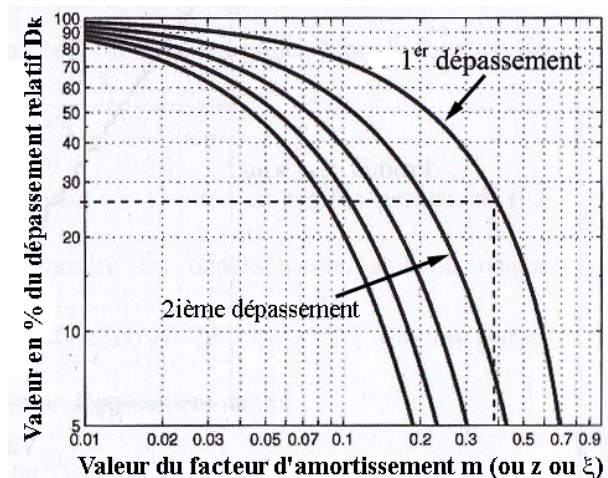
obtient la pulsation propre du système non amorti : $\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}}$

Méthode de détermination graphique des caractéristiques ξ , ω et ω_0 du système :

➡ A partir de la valeur relative du $k^{\text{ième}}$

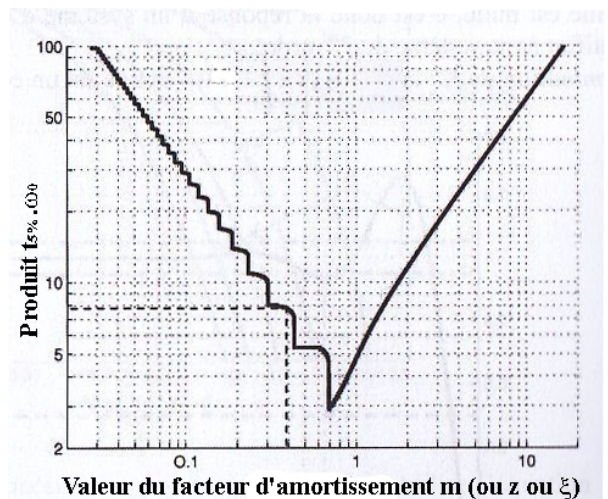
dépassement : $D_k = \frac{\Delta_k}{S_\infty}$

On obtient avec l'aide de l'abaque ci-contre le facteur d'amortissement ξ .



➡ A l'aide de la valeur de ξ et de l'abaque ci-contre on détermine le temps réponse réduit : $t_{5\%} \cdot \omega_0$

Puis en mesurant le temps de réponse à 5% : $t_{5\%}$ on en déduit la pulsation propre du système non amorti.

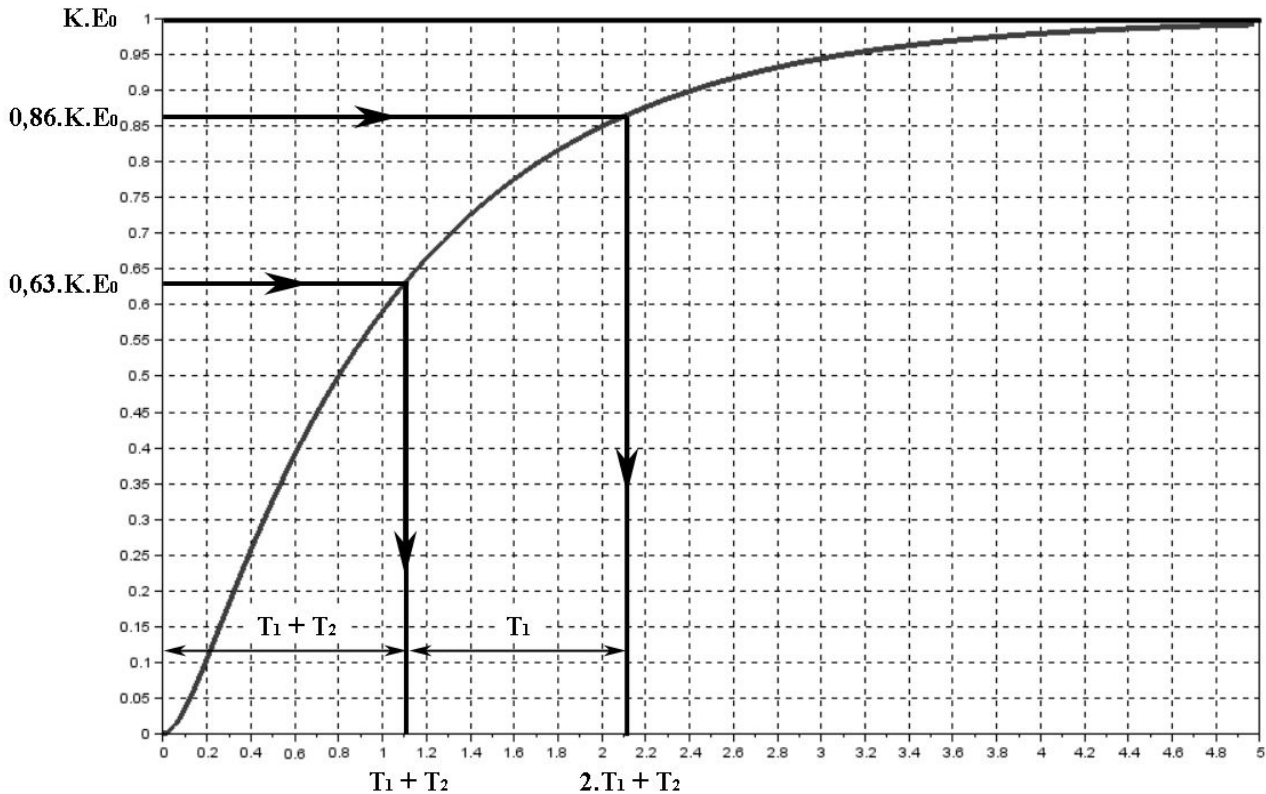


6.8- Identification d'un second ordre avec $\xi > 1$

A- Principe de l'identification

- ☞ La réponse coupe l'horizontale d'ordonnée $0,63.S_\infty$ à $T_1 + T_2$
- ☞ La réponse coupe l'horizontale d'ordonnée $0,86.S_\infty$ à $(T_1 + T_2) + T_1$

Remarque : Les 86% de la valeur finale correspond à 63% + (63% des 37 % restant).



B- Détermination de ξ et ω_0

La lecture de T_1 et $T_1 + T_2$ sur la réponse à l'échelon d'entrée permet de déterminer T_1 et T_2 .

Ensuite on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}} \quad \text{et :} \quad \xi = \frac{T_1 + T_2}{2 \cdot \sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

7- Identification à partir de la réponse à une rampe de pente a en entrée

7.1- Principe et limite de l'identification à partir de la réponse à une rampe

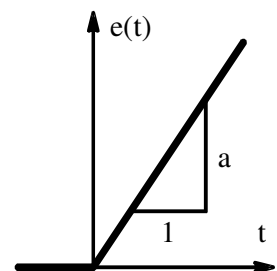
Principe

Pour ce type d'identification on applique en entrée $e(t)$ une rampe de pente a connue et on relève l'évolution au cours du temps de la sortie $s(t)$.

Limite

Les systèmes que l'on souhaite identifier seront des systèmes stables en réponse à un échelon. C'est à dire des systèmes dont la réponse converge vers une valeur finale pour une entrée en échelon.

Ce type d'identification est intéressant pour identifier des systèmes dont le comportement est proche de celui d'un système du 1^{er} ordre dont la forme des fonctions de transfert est :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$


7.2- Identification pour un premier ordre

Pour un premier ordre, on a la sortie $s(t)$:

$$s(t) = K.a.t - K.a.\tau.(1 - e^{-t/\tau})$$

Caractéristiques de la courbe :

$$s(0) = 0 \quad \text{et} : \quad s'(t) = 0$$

Tangente à l'origine horizontale

Asymptote d'équation : $K.a.(t - \tau)$

Méthode de détermination des caractéristiques K et τ du système :

☞ On trace l'asymptote à l'infini de la réponse $s(t)$.

☞ On mesure la pente p_a de cette asymptote.

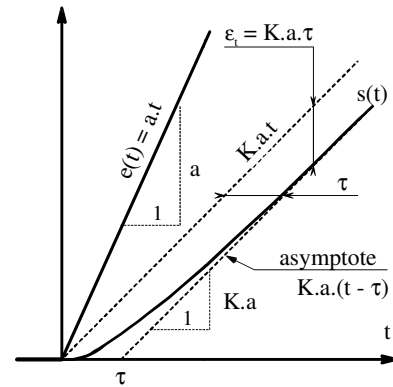
Remarque : si $K = 1$ alors l'asymptote est parallèle à la rampe d'entrée.

☞ L'asymptote à l'infini de $s(t)$ coupe l'axe des abscisses à la date $t = \tau$.

☞ A l'infini, la réponse $s(t)$ a un retard τ sur K fois l'entrée : $K.e(t)$

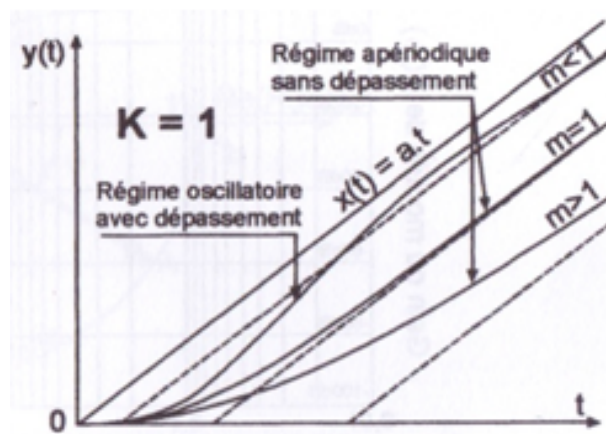
Remarque : si $K = 1$ alors : Il y a une erreur de trainage $\varepsilon_t = a.\tau$. **si $K = 1$** $\tau = \frac{\varepsilon_t}{a}$

si $K = 1$ alors il y a un retard τ : pour $t \rightarrow \infty$ $s(t) \rightarrow e(t - \tau)$



7.3- Remarque pour un système du second ordre

Pour un système qui est proche d'un second ordre simple de gain $K = 1$, la réponse tend à l'infini vers une asymptote avec un régime oscillatoire si $\xi < 1$ ou sans régime oscillatoire si $\xi \geq 1$. On ne développera pas les calculs qui sont trop compliqués et ne présentent pas d'intérêt.



avec m facteur d'amortissement : $m \Leftrightarrow \xi$