

Réponses Fréquentielles des SLCI : Démonstrations

1- Principes du tracé des diagrammes de Bode

1.1- Calcul du gain dynamique et du déphasage d'une FT

On a : $e(t) = E_0 \sin(\omega.t)$ et : $s(t) = S_0 \sin(\omega.t + \varphi)$

On en déduit dans le domaine de Laplace : $E(p) = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ et : $S(p) = S_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot e^{\frac{\varphi}{\omega} p}$

On en déduit donc la fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{S_0}{E_0} e^{\frac{\varphi}{\omega} p}$

En remplaçant la variable de Laplace par le complexe $j.\omega$ on obtient : $H(j.\omega) = \frac{S_0}{E_0} e^{j.\varphi}$

La valeur complexe de la fonction H pour $p = j.\omega$ est le complexe : $H(j.\omega) = \frac{S_0}{E_0} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Cette valeur permet donc de déterminer à partir de la fonction de transfert le gain et le déphasage induits par le système en fonction de ω la pulsation de l'entrée :

Gain dynamique en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log |H(j.\omega)|$ Déphasage : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j.\omega))$

1.2- Produit de deux fonctions de transfert

Soit la fonction de transfert H(p) définie par le produit : $H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$ On a alors :

☞ $G_{dBH}(\omega) = 20 \cdot \log |H(j.\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(j.\omega) \times H_2(j.\omega)| = 20 \cdot \log (|H_1(j.\omega)| \times |H_2(j.\omega)|)$

$G_{dBH}(\omega) = 20 \cdot \log |H_1(j.\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(j.\omega)| = G_{dBH1}(\omega) + G_{dBH2}(\omega)$

☞ $\varphi_H(\omega) = \text{Arg}(H(j.\omega)) = \text{Arg}(H_1(j.\omega) \times H_2(j.\omega))$

$\varphi_H(\omega) = \text{Arg}(H_1(j.\omega)) + \text{Arg}(H_2(j.\omega)) = \varphi_{H1}(\omega) + \varphi_{H2}(\omega)$

2- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert du premier ordre

Expression du gain dynamique

☞ On sait que : $G(\omega) = |H(j.\omega)| = \left| K \cdot \frac{1}{1 + j.\tau.\omega} \right| = \frac{K}{|1 + j.\tau.\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}}$

D'où le gain en décibels : $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log (1 + \tau^2.\omega^2)$

Expression du déphasage

☞ On sait que : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j.\omega)) = \text{Arg}\left(\frac{K}{1 + j.\tau.\omega}\right) = \text{Arg}(K) - \text{Arg}(1 + j.\tau.\omega)$

D'où le déphasage : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau.\omega)$

Asymptotes du diagramme de gain

☞ Pour $\omega \rightarrow 0$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log 1 = 20 \cdot \log K$

Au voisinage de 0 on a donc : Une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \cdot \log K$

☞ Pour $\omega \rightarrow \infty$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log \tau^2.\omega^2 = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \tau - 20 \cdot \log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : Une asymptote ☞ De pente : -20dB par décade

☞ Passant au point $\left(\frac{1}{\tau}, 20 \cdot \log K\right)$

Asymptotes du diagramme de phase

☞ Pour $\omega \rightarrow 0$, $\tau \cdot \omega \rightarrow 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega) \rightarrow 0^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

☞ Pour $\omega \rightarrow \infty$, $\tau \cdot \omega \rightarrow \infty$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega) \rightarrow -90^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée -90°**

Valeurs particulières en $1/\tau$

Pour $\omega = \frac{1}{\tau}$ on a : $G_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log 2$ Soit : **$G_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K - 3 \text{ dB}$**

Et : **$\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\arctan(1) = -45^\circ$**

3- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert de rang 1

Une fonction de transfert de rang un est de la forme :

$$H(p) = K \cdot (1 + \tau \cdot p)$$

Expression du gain dynamique

☞ On sait que : $G(\omega) = |H(j \cdot \omega)| = |K \cdot (1 + j \cdot \tau \cdot \omega)| = K \cdot |1 + j \cdot \tau \cdot \omega| = K \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}$

D'où le gain en décibels : **$G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)$**

Expression du déphasage

☞ On sait que : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = \text{Arg}(K \cdot (1 + j \cdot \tau \cdot \omega)) = \text{Arg}(1 + j \cdot \tau \cdot \omega)$

On a donc : $\tan \varphi(\omega) = \tau \cdot \omega$ D'où le déphasage : **$\varphi(\omega) = +\arctan(\tau \cdot \omega)$**

Asymptotes du diagramme de gain

☞ Pour $\omega \rightarrow 0$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log 1 = 20 \cdot \log K$

Au voisinage de 0 on a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \cdot \log K$**

☞ Pour $\omega \rightarrow \infty$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log \tau^2 \cdot \omega^2 = 20 \cdot \log K + 20 \cdot \log \tau + 20 \cdot \log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : **Une asymptote** ☞ **De pente : + 20dB par décade**
☞ **Passant au point $(1/\tau, 20 \cdot \log K)$**

Asymptotes du diagramme de phase

☞ Pour $\omega \rightarrow 0$, $\tau \cdot \omega \rightarrow 0$ Soit : $\varphi(\omega) = +\arctan(\tau \cdot \omega) \rightarrow 0^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

☞ Pour $\omega \rightarrow \infty$, $\tau \cdot \omega \rightarrow \infty$ Soit : $\varphi(\omega) = +\arctan(\tau \cdot \omega) \rightarrow +90^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée $+90^\circ$**

Valeurs particulières en $1/\tau$

Pour $\omega = \frac{1}{\tau}$ on a : $G_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log 2$ Soit : **$G_{dB}\left(\frac{1}{\tau}\right) = 20 \cdot \log K + 3 \text{ dB}$**

Et : **$\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = +\arctan(1) = +45^\circ$**

4- Gain dynamique et déphasage d'une fonction de transfert du second ordre**Expression du gain dynamique**

☞ On sait que : $G(\omega) = |H(j \cdot \omega)| = \left| \frac{K}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot j - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right| = \left| \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot j} \right|$

Soit en posant : $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ On a : $G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$

D'où le gain en décibels : $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log ((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)$

Expression du déphasage

On sait que : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}\left(\frac{K}{1 + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j}\right)$

Soit en posant : $u = \omega/\omega_0$ $\varphi(\omega) = \text{Arg}(K) - \text{Arg}((1-u^2) + 2\xi u j)$

Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$ pour $u < 1$ ou : $\varphi(\omega) = -180 - \arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$ pour $u > 1$

Asymptotes du diagramme de gain

Pour $\omega \rightarrow 0$ $u \rightarrow 0$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log 1 = 20 \cdot \log K$

Au voisinage de 0 on a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \cdot \log K$**

Pour $\omega \rightarrow \infty$ $u \rightarrow \infty$ $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log u^4 = 20 \cdot \log K + 40 \cdot \log \omega_0 - 40 \cdot \log \omega$

Au voisinage de ∞ on a donc : **Une asymptote De pente : -40dB par décade**

Passant au point $(\omega_0, 20 \cdot \log K)$

Asymptotes du diagramme de phase

Pour $\omega \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ $\frac{2\xi u}{1-u^2} \rightarrow 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right) \rightarrow 0^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée 0°**

Pour $\omega \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$ $\frac{2\xi u}{1-u^2} = \frac{2\xi}{1/u - u} \rightarrow 0$ Soit : $\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right) \rightarrow -180^\circ$

On a donc : **Une asymptote horizontale d'ordonnée -180°**

Valeurs particulières en ω_0

Pour $\omega = \omega_0$ on a $u = 1$ $G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log 4\xi^2$

Soit : **$G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log (2\xi)$** Remarque : pour $\xi = 0,5$ on a $G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K$

Pour : $\omega \rightarrow \omega_0^-$ on a $u \rightarrow 1^-$ $\frac{2\xi u}{1-u^2} \rightarrow +\infty$ Soit : **$\varphi(\omega_0) \rightarrow -\arctan(+\infty) = -90^\circ +$**

Pour : $\omega \rightarrow \omega_0^+$ on a $u \rightarrow 1^+$ $\frac{2\xi u}{1-u^2} \rightarrow -\infty$ Soit : **$\varphi(\omega_0) \rightarrow -180^\circ - \arctan(-\infty) = -90^\circ -$**

Position du gain par rapport aux asymptotes

On a : $A(u) = (1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2 = 1 + (4\xi^2 - 2)u^2 + u^4$

Si $\xi > 0,707$ alors : $(4\xi^2 - 2) > 0 \Rightarrow A(u) > 1 \Rightarrow G_{dB}(\omega) < 20 \cdot \log K$

Et : $\Rightarrow A(u) > u^4 \Rightarrow G_{dB}(\omega) < 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log u$

Donc pour $\xi > 0,707$ la courbe du gain est en dessous des asymptotes

Si $\xi < 0,5$ alors : $(4\xi^2 - 2) < -1$ pour $\omega < \omega_0$: $u < 1 \Rightarrow A(u) < 1 \Rightarrow G_{dB}(\omega) > 20 \cdot \log K$

Et pour $\omega > \omega_0$: $u > 1 \Rightarrow A(u) < u^4 \Rightarrow G_{dB}(\omega) > 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log u$

Donc pour $\xi < 0,5$ la courbe du gain est au dessus des asymptotes

Si $0,5 < \xi < 0,707$ alors : $4\xi^2 - 2 < 0$ Donc :

Pour $\omega \rightarrow 0$: $u \rightarrow 0$ on a : $A(u) < 1 \Rightarrow G_{dB}(\omega) > 20 \cdot \log K$

Pour $\omega \rightarrow \infty$: $u \rightarrow \infty$ on a : $A(u) < u^4 \Rightarrow G_{dB}(\omega) > 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log u$

Donc pour $0,5 < \xi < 0,707$ la courbe du gain est au dessus des asymptotes sauf au voisinage de ω_0 .

Résonance pour $\xi < 0,707$

On a : $G_{dB}(u) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log \left((1 - u^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot u^2 \right)$

Donc : $\frac{d G_{dB}(u)}{du} = -\frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{2 \cdot (1 - u^2) \cdot (-2 \cdot u) + 8 \cdot \xi^2 \cdot u}{(1 - u^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot u^2} = \frac{10}{\ln 10} \cdot 4 \cdot u \cdot \frac{1 - u^2 - 2 \cdot \xi^2}{1 + (4 \cdot \xi^2 - 2) \cdot u^2 + u^4}$

Par conséquent : $\frac{d G_{dB}(u)}{du} = 0 \Leftrightarrow 1 - u^2 - 2 \cdot \xi^2 = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$

La courbe de gain présente donc un maximum à la pulsation : $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$

Ce maximum est de : $G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log \left((1 - 1 + 2 \cdot \xi^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \right)$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log (4 \cdot \xi^4 + 4 \cdot \xi^2 - 8 \cdot \xi^4)$$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log (4 \cdot \xi^2 - 4 \cdot \xi^4) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log (4 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi^2))$$

Donc pour $\xi < 0,707$ il y a une fréquence de résonance : $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$

Avec un facteur de résonance de : $Q_{rdB} = G_{db}(\omega_r) - G_{dB}(0) = -20 \cdot \log (2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$

5- Gain dynamique et déphasage d'une fonction du 1^{ier} ordre généralisé

Un premier ordre généralisé $H(p)$ peut s'écrire comme le produit de deux fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$ où $H_1(p)$ est un premier ordre simple de gain K et $H_2(p)$ est une fonction de rang 1 et de gain 1 :

$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ et $H_2(p) = 1 + c \cdot \tau \cdot p$ D'où les expressions du gain dynamique et de la phase :

$G_{db}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2) + 10 \cdot \log(1 + c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2)$ et : $\varphi(\omega) = \arctan(c \cdot \tau \cdot \omega) - \arctan(\tau \cdot \omega)$

Valeurs caractéristiques du diagramme de phase

On a : $\frac{d \varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{c \cdot \tau}{1 + c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2} - \frac{\tau}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} = \frac{\tau \cdot (c + c \cdot \tau^2 \cdot \omega^2 - 1 - c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2)}{(1 + c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + \tau^2 \cdot \omega^2)}$

Donc : $\frac{d \varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow c + c \cdot \tau^2 \cdot \omega^2 - 1 - c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2 = 0 \Leftrightarrow (c \cdot \tau^2 \cdot \omega^2 - 1) \cdot (1 - c) = 0 \Leftrightarrow c \cdot \tau^2 \cdot \omega^2 = 1$

Le maximum du déphasage est donc obtenu pour une pulsation : $\omega_M = \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{c}}$

Ce maximum est donc de : $\varphi(\omega_M) = \arctan\left(c \cdot \tau \cdot \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{c}}\right) - \arctan\left(\tau \cdot \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{c}}\right) = \arctan \sqrt{c} - \arctan \frac{1}{\sqrt{c}}$

On a donc : $\tan \varphi(\omega_M) = \tan \left(\arctan \sqrt{c} - \arctan \frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \frac{\sqrt{c} - 1/\sqrt{c}}{1 + \sqrt{c} \cdot 1/\sqrt{c}} = \frac{c - 1}{2 \cdot \sqrt{c}} = \tan \varphi(\omega_M)$

Soit : $\frac{\sin^2 \varphi_M}{1 - \sin^2 \varphi_M} = \frac{(c - 1)^2}{4 \cdot c} \Leftrightarrow 4 \cdot c \cdot \sin^2 \varphi(\omega_M) = (c - 1)^2 - (c^2 - 2 \cdot c + 1) \cdot \sin^2 \varphi(\omega_M)$

$$\Leftrightarrow (c^2 + 2 \cdot c + 1) \cdot \sin^2 \varphi(\omega_M) = (c - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (c + 1)^2 \cdot \sin^2 \varphi(\omega_M) = (c - 1)^2 \Leftrightarrow \sin \varphi(\omega_M) = \frac{c - 1}{c + 1}$$

Valeurs caractéristiques du diagramme de gain

On sait que : $G_{db}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2) + 10 \cdot \log(1 + c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2)$ Donc :

Pour : $\omega \rightarrow \infty$ $G_{db}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(\tau^2 \cdot \omega^2) + 10 \cdot \log(c^2 \cdot \tau^2 \cdot \omega^2) = 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log c^2$

Soit : $G_{db}(\omega) \rightarrow 20 \cdot \log K + 20 \cdot \log c$

A la pulsation : $\omega_M = \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{c}}$ on a : $G_{db}(\omega) = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + 1/c) + 10 \cdot \log(1 + c)$

$$G_{db}(\omega) = 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log \frac{1 + c}{1 + 1/c}$$

$$G_{db}(\omega_M) = 20 \cdot \log K + 10 \cdot \log c$$