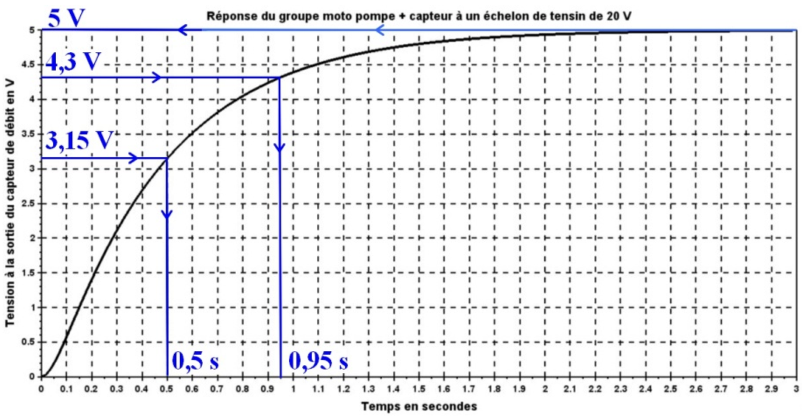
Régulation de jet d'eau : Corrigé

1- Identification de la fonction de transfert du groupe moto pompe

A partir de la réponse à un échelon de tension de 20 V de la fonction de transfert du moto réducteur suivit du capteur de débit : $H_{MP}(p)\times K_{Cap}$ on en déduit :

☞ La tangente à l'origine est horizontale et il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. La fonction de transfert est donc un second ordre de facteur d'amortissement supérieur ou égal à 1. S'écrivant sous la forme :

$$H_{MP}(p) = \frac{K_{MP}}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}\,.\,K_{Cap}$$



☞ La valeur finale de la sortie $u_m(t)$ est de 5 V pour une entrée u(t) de 20V. D'où le gain $K_{MP}.K_{Cap} = \frac{5}{20}$.

On en déduit : $$K_{MP} = \frac{5}{20.K_{Cap}} = \frac{5}{20\times 5} = 0{,}05\ \mathrm{l.s^{-1}.V^{-1}}.$$

☞ Les 63% de la valeur finale ($0{,}63 \times 5 = 3{,}15$ V) sont obtenus à la date $\tau_1 + \tau_2 = 0{,}5$ s. Les 86% de la valeur finale ($0{,}86 \times 5 = 4{,}3$ V) sont obtenus à la date $2.\tau_1 + \tau_2 = 0{,}95$ s.

On en déduit : $\tau_1 = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45$ s et : $\tau_2 = 0{,}5 - 0{,}45 = 0{,}05$ s

D'où la fonction de transfert du groupe moto pompe : $$\mathbf{H_{MP}(p) = \frac{0{,}05}{(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)}}$$

2- Gain de l'adaptateur

Pour un fonctionnement normal le gain de l'adaptateur doit être égal au gain de la boucle de retour (à partir de la réponse Q(p)). On a donc : $\mathbf{K_A = K_{Cap} = 5\ V.s.l^{-1}}$

3- Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) pour un correcteur proportionnel

Avec un correcteur proportionnel qui est donc un gain pur K_p, on obtient la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) : $$FTBO(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{0{,}05\times 5\ .\ K_P}{(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)} = \frac{0{,}25.K_P}{(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)}$$

D'où la FTBF : $$H_{Prop}(p) = \frac{\dfrac{0{,}25.K_P}{(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)}}{1+\dfrac{0{,}25.K_P}{(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)}}$$

Soit : $$H_{Prop}(p) = \frac{0{,}25.K_P}{1+0{,}25.K_P+0{,}5.p+2{,}25.10^{-2}.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $$\mathbf{H_{Prop}(p) = \frac{\dfrac{0{,}25.K_P}{1+0{,}25.K_P}}{1+\dfrac{0{,}5}{1+0{,}25.K_P}.p+\dfrac{2{,}25.10^{-2}}{1+0{,}25.K_P}.p^2}}$$

4- Dimensionnement du correcteur proportionnel

Cette FTBF est un second ordre simple de gain statique : $\dfrac{0{,}25.K_P}{1+0{,}25.K_P}$.

Donc à un échelon d'entrée unitaire la réponse aura une valeur finale de $\dfrac{0{,}25.K_P}{1+0{,}25.K_P}$.

On a donc en réponse à un échelon dunitaire, une erreur statique de : $1-\dfrac{0{,}25.K_P}{1+0{,}25.K_P}=\dfrac{1}{1+0{,}25.K_P}$

Donc pour vérifier le premier critère du cahier des charges ($\varepsilon_S \le 0{,}05$) il faut : $\dfrac{1}{1+0{,}25.K_P}\le 0{,}05$

Soit : $K_P \ge \dfrac{\dfrac{1}{0{,}05}-1}{0{,}25}$ D'où pour le première critère du cahier des charges il faut : $\mathbf{K_P \ge 76}$

Ce 2nd ordre à : ☞ Une pulsation propre de : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1+0{,}25.K_P}{2{,}25.10^{-2}}}$

Un facteur d'amortissement : ☞ $\xi=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{1+0{,}25.K_P}{2{,}25.10^{-2}}}.\dfrac{0{,}5}{1+0{,}25.K_P}=\dfrac{0{,}25}{\sqrt{2{,}25.10^{-2}.(1+0{,}25.K_P)}}$

Donc pour vérifier le second critère du cahier des charges ($D_{\%} \le 0{,}05$) il faut : $\xi \ge 0{,}69$

Soit : $\dfrac{0{,}25}{\sqrt{2{,}25.10^{-2}.(1+0{,}25.K_P)}}\ge 0{,}69 \quad\Leftrightarrow\quad K_P \le \dfrac{\dfrac{0{,}25^2}{0{,}69^2\times 2{,}25.10^{-2}}-1}{0{,}25}$

D'où pour le second critère du cahier des charges il faut : $\mathbf{K_P \le 19{,}3}$

Ces deux critères sont en contradiction car on ne peut avoir $K_P \le 19{,}3$ et $K_P \ge 76$.

Donc un correcteur proportionnel ne permet pas de respecter le cahier des charges.

5- Correcteur proportionnel intégral

Ayant : $C(p)=K_P+\dfrac{K_i}{p}$ on obtient : $C(p)=\dfrac{K_i+K_p.p}{p}=\dfrac{K_i.\left(1+\dfrac{K_p}{K_i}.p\right)}{p}$

De plus : $C(p)=\dfrac{K_C.(1+\tau_C.p)}{p}$ donc par identification on a :

$\mathbf{K_i = K_C}$ et : $\mathbf{K_p = K_C.\tau_C}$

6- Dimensionnement du correcteur proportionnel intégral

La constante de temps est choisie de manière à compenser la plus grande constante de temps groupe moto pompe. On choisit donc : $\tau_C = 0{,}45$ s. On obtient la FTBO :

$$FTBO(p)=\frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)}=\frac{0{,}05\times 5\ .\ K_C.(1+0{,}45.p)}{p.(1+0{,}45.p).(1+0{,}05.p)}=\frac{0{,}25.K_C}{p.(1+0{,}05.p)}$$

D'où la FTBF : $H_{PI}(p)=\dfrac{\dfrac{0{,}25.K_C}{p.(1+0{,}05.p)}}{1+\dfrac{0{,}25.K_C}{p.(1+0{,}05.p)}}=\dfrac{0{,}25.K_C}{0{,}25.K_C+p+0{,}05.p^2}$

Soit sous sa forme canonique : $\mathbf{H_{PI}(p)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p+\dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}}$

Ce 2nd ordre à : ☞ Une pulsation propre de : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{0{,}25.K_C}{0{,}05}} = \sqrt{5.K_C}$

☞ Un facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{1}{2}.\sqrt{5.K_C}\,.\,\dfrac{1}{0{,}25.K_C} = \dfrac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{K_C}}$

Donc pour vérifier le second critère du cahier des charges ($D_{\%} \leq 0{,}05$) il faut : $\dfrac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{K_C}} \geq 0{,}69$

Soit : $K_C \leq \dfrac{4 \times 5}{0{,}69^2}$ **D'où pour le 2nd critère du cahier des charges il faut : $K_C \leq 42{,}0$**

La FTBF est un second ordre simple de gain statique unitaire donc **le premier critère du cahier des charges est forcément respecté car l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle.**

Pour $K_C = 42\ s^{-1}$ on a : ☞ $\xi = 0{,}69$ soit un temps de réponse réduit de $t_{5\%}.\omega_0 = 2{,}9$ (voir abaque)

☞ Une pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{5 \times 42} = 14{,}5\ rad.s^{-1}$

On en déduit un temps de réponse : $\mathbf{t_{5\%} = \dfrac{2{,}9}{14{,}5} = 0{,}2\ s}$ **$t_{5\%} \leq 0{,}3$ s donc 3ième critère vérifié**

Calculons l'erreur de trainage en réponse à une rampe de pente $0{,}4\ l.s^{-2}$.
Dans le domaine de Laplace cette erreur est de :

$$\varepsilon(p) = Q_C(p) - Q(p) = Q_C(p) - Q_C(p).H_{PI}(p) = Q_C(p)\,.\,(1 - H_{PI}(p))$$

Or : $H_{PI}(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}$ On en déduit : $1 - H_{PI}(p) = \dfrac{\dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}{1 + \dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}$

Donc pour une rampe de pente a $\left(Q_C(p) = \dfrac{a}{p^2}\right)$: $\varepsilon(p) = \dfrac{a}{p^2}\,.\,\dfrac{\dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}{1 + \dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}$

$$\varepsilon(p) = \frac{a.\left(\dfrac{1}{0{,}25.K_C} + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p\right)}{p.\left(1 + \dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2\right)} \qquad \text{Donc :} \quad p.\varepsilon(p) = \frac{a.\left(\dfrac{1}{0{,}25.K_C} + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p\right)}{1 + \dfrac{1}{0{,}25.K_C}.p + \dfrac{0{,}05}{0{,}25.K_C}.p^2}$$

Or par le théorème de la valeur finale on a l'erreur de trainage : $\varepsilon_t = \lim\limits_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{p \to 0} p.\varepsilon(p)$

On en déduit l'erreur de trainage : $\varepsilon_t = \dfrac{a}{0{,}25.K_C}$ Soit pour $K_C = 42\ s^{-1}$ et $a = 0{,}4\ l.s^{-2}$

$\mathbf{\varepsilon_t = \dfrac{0{,}4}{0{,}25 \times 42} = 3{,}8.10^{-2}\ l.s^{-1}}$ $\Rightarrow$ **$\varepsilon_t \leq 0{,}05\ l.s^{-1}$ donc 4ième critère vérifié**

Pour $K_C = 42$ et $\tau_C = 0{,}45$ s les 4 critères du cahier des charges sont donc respectés.

Sachant que $K_i = K_C$ et $K_p = K_C.\tau_C$ On choisit les gains di correcteur proportionnel intégral :

$K_i = 42\ s^{-1}$ et : **$K_p = 42 \times 0{,}45 = 19$**